STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

ZC 71

Geordende Vektorruimten en Positieve Operatoren

naar een college van
dr. M.A. Kaashoek

door

dr. N.P. Dekker.

oktober 1969

Hoofdstuk I Inleiding

Par. 1 Grondbegrippen

1.1 Definitie. Zij E een niet lege verzameling. Een relatie $\leq$ gedefinieerd in E heet een partiele ordening (of kortweg, ordening) in E indien hij voldoet aan

(i) $x \leq x$ $(x \in E)$

(ii) $(x \leq y,\ y \leq x) \rightarrow x = y$

(iii) $(x \leq y,\ y \leq z) \rightarrow x \leq z$

Voor $x \leq y$ schrijven we ook wel $y \geq x$.

1.2 Definitie. Zij E een reele lineaire ruimte (= vectorruimte over $\mathbb{R}$; zie [1] Def. 26), en $\leq$ een ordening in E. Het paar $(E,\leq)$ heet een geordende vectorruimte (afgekort, o.v.) als geldt

(i) $x \leq y \rightarrow x+z \leq y+z$ $(z \in E)$

(ii) $x \leq y \rightarrow \alpha x \leq \alpha y$ $(0 \leq \alpha \in \mathbb{R})$

1.3 Definitie. Zij $(E,\leq)$ een o.v.. De verzameling

$$K := \{x \in E \mid x \geq 0\}$$

heet de positieve kegel (of kortweg, de kegel) van E.

1.4 Eigenschappen. Zij $(E,\leq)$ een o.v. met kegel K. Dan geldt

(i) $K \neq \emptyset$

(ii) $K+K \subset K$ (d.w.z. $(x \in K,\ y \in K) \rightarrow x+y \in K$)

(iii) $\alpha K \subset K$ voor $0 \leq \alpha \in \mathbb{R}$ (d.w.z. $(x \in K,\ \alpha \geq 0) \rightarrow \alpha x \in K$)

(iv) $K \cap (-K) = \{0\}$

Bewijs: Triviaal.

1.5 Opmerking. Zij E een reële lineaire ruimte en K een deelverzameling van E die voldoet aan de eisen (ii), (iii), (iv) van 1.4. Definieer in E een relatie $\leq'$ door

$$x \leq' y \leftrightarrow y-x \in K.$$

Dan is $(E,\leq')$ een o.v. met kegel K

Bewijs: Bij wijze van voorbeeld bewijzen we 1.1(iii) en 1.2(i).

$x \leq' y,\ y \leq' z$

$\rightarrow\ y-x \in K,\ z-y \in K$

$\rightarrow\ z-x \in K+K \subset K$ (volgens 1.4(ii))

$\rightarrow\ x \leq' z.$

$x \leq' y$

$\rightarrow\ (y+z)-(x+z) = y-z \in K$

$\rightarrow\ x+z \leq' y+z.$

1.6 Definitie. Zij $(E,\leq)$ een o.v., en $x \in E$, $y \in E$ met $x \leq y$. Dan heet de verzameling

$$[x,y] := \{z \in E \mid x \leq z \leq y\}$$

een orde-interval.

1.7 Eigenschap. Een ordeinterval is een convexe verzameling (d.w.z. $(u \in [x,y],\ v \in [x,y],\ 0 \leq \lambda \leq 1) \rightarrow (\lambda u + (1-\lambda)v \in [x,y])$).

Bewijs: Laat u,v,λ gekozen zijn als boven. Dan volgt uit 1.2(ii)

$$\lambda x \leq \lambda u \leq \lambda y\ ,\quad (1-\lambda)x \leq (1-\lambda)v \leq (1-\lambda)y\ ,$$

en dus, met behulp van 1.2(i),

$$x \leq \lambda u + (1-\lambda)v \leq y.$$

1.8 Definities. Zij $(E,\leq)$ een o.v., en B een deelverzameling van E. B heet naar boven begrensd (resp. naar beneden begrensd) als er een $z \in E$ bestaat zo, dat

$$x \leq z \text{ (resp. } x \geq z) \text{ voor alle } x \in B.$$

Zo'n element z heet een bovengrens (resp. ondergrens) van B. Als B zowel naar boven als naar beneden begrensd is, dan heet B (orde)-begrensd; dus, B is ordebegrensd als B ligt in een ordeinterval. B heet naar boven gericht (resp. naar beneden gericht) als bij ieder tweetal x,y in B een $z \in B$ bestaat zo dat

$$x \leq z\ ,\quad y \leq z \quad (\text{resp. } x \geq z\ ,\quad y \geq z).$$

Een element $u \in E$ heet het <u>supremum</u> (resp. <u>infimum</u>) van B als geldt:

(i) u is een bovengrens ~~xax~~ (resp. ondergrens) van B,

(ii) als z een bovengrens (resp. ondergrens) van B is, dan is $z \geq u$ (resp. $z \leq u$).

Notatie: $u =: \sup B$ (resp. $u =: \inf B$).

Indien B bestaat uit twee elementen x en y, en $\sup B$ bestaat, dan schrijven we: $x \vee y := \sup B$. Analoog, $x \wedge y := \inf B$.

1.9 <u>Definitie</u>. Een o.v. $(E,\leq)$ wordt een <u>Riesz-ruimte</u> (ook wel, lineair rooster) genoemd als voor elk tweetal x,y in E, $x \vee y$ en $x \wedge y$ bestaan.

1.10 Opmerking. Een ordening $\leq$ op een vezameling E heet een <u>lineaire ordening</u> als voor elk tweetal x,y in E geldt: $x \leq y$ of $x \geq y$. Klaarblijkelijk is een o.v. met een lineaire ordening een Riesz-ruimte.

Par 2 . Eenvoudige eigenschappen

2.1 Lemma. Zij $(E,\leq)$ een o.v., en laat x en y elementen van E zijn waarvoor $x \vee y$ bestaat. Dan bestaan ook

(i) $(x+z) \vee (y+z)$, en er geldt $(x+z) \vee (y+z)=(x \vee y)+z$ $\quad (z \in E)$;

(ii) $x \wedge y$, en er geldt $x+y=(x \vee y)+(x \wedge y)$;

(iii) $\alpha x \vee \alpha y$, en er geldt $\alpha x \vee \alpha y=\alpha(x \vee y)$ $\quad (\alpha \geq 0)$

(iv) $\alpha x \vee \alpha y$, en er geldt $\alpha x \vee \alpha y=\alpha(x \wedge y)$ $\quad (\alpha \leq 0)$.

Hetzelfde geldt met verwisseling van $\vee$ en $\wedge$.

Bewijs:

(i) Stel $c:=(x \vee y)+z$. Dan $c-z=x \vee y$

$\quad c-z \geq x$ en $c-z \geq y$

$\quad \rightarrow c \geq x+z$ en $c \geq y+z$

$\quad \rightarrow c$ is een bovengrens van $\{x+z,y+z\}$.

Veronderstel d is een bovengrens van $\{x+z,y+z\}$. Dan

$\quad d \geq x+z$ en $d \geq y+z$

$\quad \rightarrow d-z \geq x$ en $d-z \geq y$

$\quad \rightarrow d-z \geq x \vee y$

$\quad \rightarrow d \geq (x \vee y)+z=c$

Hieruit volgt onmiddelijk het gestelde.

(ii) Door toepassing van (i) vinden we

$\quad (x \vee y)-(x+y)=(x-(x+y)) \vee (y-(x+y))=(-y) \vee (-x)$.

Rest te bewijzen dat $(-y) \vee (-x)=-(y \wedge x)$. Stel $d=(-y) \vee (-x)$. Dan

$\quad d \geq -y$ en $d \geq -x$

$\quad \rightarrow y \geq -d$ en $x \geq -d$

$\quad \rightarrow -d$ is een ondergrens van $\{x,y\}$.

Zij f een ondergrens van $\{x,y\}$. Dan

$\quad f \leq x$ en $f \leq y$

$\quad \rightarrow -x \leq -f$ en $-y \leq -f$

$\quad \rightarrow -f \geq (-y) \vee (-x)=d$

$\quad \rightarrow f \leq -d$

Dus $-d=x \wedge y$, waaruit het gestelde

Het bewijs van (iii) en (iv) volgt direct uit de voorgaande delen

2.2 Gevolg. Zij $(E,\leq)$ een o.v. met de eigenschap dat $x \vee 0$ bestaat voor iedere $x \in E$. Dan is $(E,\leq)$ een Riesz-ruimte.

Bewijs: Neem y,z in E. Dan bestaat $(y-z)\vee 0$. Uit 2.1(i) en (ii) volgt nu de existentie van $y \vee z$ en $y \wedge z$.

Zij $(E,\leq)$ een o.v., en x een element van E waarvoor $x \quad 0$ bestaat. Dan bestaan ook

$$(x \vee 0)+(-x) = 0 \vee (-x),$$

en

$$\begin{aligned}(x \vee 0)+(0 \vee (-x)) &= 2(x \vee 0)-((x \vee 0)-(0 \vee (-x)))\\ &= 2(x \vee 0)-((x \vee 0)+(0 \wedge x))\\ &= 2(x \vee 0)-x = ((2x) \vee 0)-x = x \vee (-x).\end{aligned}$$

De volgende definitie is daarom zinvol.

2.3 Definitie. Zij $(E,\leq)$ een o.v., en x een element van E waarvoor $x \vee 0$ bestaat. We noemen

$x^+ := x \vee 0$ het positieve deel van x,

$x^- := (-x) \vee 0$ het negatieve deel van x,

$|x| := x \vee (-x)$ de absolute waarde van x.

2.4 Voorbeeld. De verzameling der begrensde reele functies op een verzameling X duiden we aan met $B_r(X)$. Definieert men in $B_r(X)$ de volgende operaties:

$$(f+g)(t) := f(t)+g(t) \quad (t \in X)$$

$$(\alpha f)(t) := \alpha f(t) \quad (t \in X)$$

$$g \leq f \leftrightarrow (g(t) \leq f(t) \text{ voor alle } t \in X),$$

dan is $B_r(X)$ een Riesz-ruimte. Er geldt

$$(f \vee g)(t) = \max\{f(t),g(t)\} \quad (t \in X),$$

$$f^+(t) = \max\{f(t),0\} \quad (t \in X),$$

$$f^-(t) = \max\{-f(t),0\} \quad (t \in X),$$

$$|f|(t) = |f(t)| \quad (t \in X).$$

In het volgende lemma worden een aantal eigenschappen van de zojuist gedefinieerde begrippen opgesomd. De (eenvoudige) bewijzen worden aan de lezer overgelaten

2.5 Lemma. Zij $(E,\leq)$ een o.v.,en x een element van E waarvoor $x \vee 0$ bestaat. Dan geldt:

(i) $\{x^+, x^-, |x|\} \subset K$

(ii) $x = x^+ - x^-$

(iii) $|x| = x^+ + x^-$

(iv) $(\alpha x)^+ = \alpha x^+$, $(\alpha x)^- = \alpha x^-$ $\quad (\alpha \geq 0)$

$(\alpha x)^+ = -\alpha x^-$, $(\alpha x)^- = -\alpha x^+$ $\quad (\alpha \leq 0)$

(v) $|\alpha x| = |\alpha| . |x|$ $\quad (\alpha \in \mathbb{R})$

(vi) $x^+ \leq |x|$, $x^- \leq |x|$, $-x^- \leq x \leq x^+$

(vii) $x^+ \wedge x^- = 0$

Afspraak. Ter vereenvoudiging van de notatie zullen we voortaan in uitdrukkingen van de vorm $(\alpha x) \vee y$ de haakjes weglaten. Dus

$\alpha x \vee y := (\alpha x) \vee y$ (wel te onderscheiden van $\alpha(x \vee y)$!).

In het byzonder

$-x \vee y := (-x) \vee y$.

Hetzelfde met vervanging van $\vee$ door $\wedge$.

2.6 Gevolg. Zij $(E,\leq)$ een o.v.,en laat x en y elementen van E zijn waarvoor $x \vee 0$ en $y \vee 0$ bestaan. Dan geldt

$x \leq y \Leftrightarrow (x^+ \leq y^+$ én $x^- \geq y^-)$.

Bewijs:

$(\rightarrow)$ Volgens het gegeven en 2,5 is

$x \leq y \leq y^+$ en $0 \leq y^+$

$\rightarrow \quad x \vee 0 \leq y^+$

$\rightarrow \quad x^+ \leq y^+$.

Merk nu op dat ook $-x \vee 0$ en $-y \vee 0$ bestaan, en dat $-y \leq -x$. Dus

$(-y)^+ \leq (-x)^+$

$\rightarrow \quad y^- \leq x^-$

$(\Leftarrow)$ $x = x^+-x^- \leq y^+-x^- \leq y^+-y^- = y$.

2.7 Lemma. Zij $(E,\leq)$ een o.v., en laat x en y elementen van E zijn waarvoor $x \vee y$ bestaat. Dan bestaan ook $(x-y)^+$, $(y-x)^+$ en $|x-y|$. Voorts:

(i) $x \vee y = (x-y)^+ + y = (y-x)^+ + x$

(ii) $x \wedge y = x-(x-y)^+ = y-(y-x)^+$

(iii) $x+y = (x \vee y)+(x \wedge y)$

(iv) $|x-y| = (x \vee y)-(x \wedge y)$

(v) $x \vee y = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$

(vi) $x \wedge y = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$.

Bewijs: Uit de gegevens volgt de existentie van

$$(x \vee y)-y = (x-y) \vee 0 = (x-y)^+$$

en van

$$(x \vee y)-x = 0 \vee (y-x) = (y-x)^+,$$

en dus ook van

$$(x-y)^+ + (y-x)^+ = (x-y)^+ + (x-y)^- = |x-y|.$$

Van de opgesomde betrekkingen volgt nu (i) onmiddelijk uit het bovenstaande, terwijl (iii) reeds is bewezen onder 2.1(ii). De overige volgen gemakkelijk uit (i) en (iii).

De geintroduceerde operaties: $\vee$, $\wedge$, $^+$, $^-$, $|\ |$ noemen we de rooster-operaties. Uit het voorafgaande blijkt dat ze als volgt samenhangen (vooropgesteld dat de betrokken elementen gedefinieerd zijn):

$$x \vee y = \tfrac{1}{2}(x+y+|x-y|)$$

$$x \wedge y = x+y-(x \vee y)$$

$$x^+ = -(-x \wedge 0)$$

$$x^- = (-x)^+$$

$$|x| = x+2x^-$$

2.8 Lemma. Zij $(E,\leq)$ een o.v.. Laat A en B deelverzamelingen van E zijn, waarvoor sup A, sup B, sup(A+B) bestaan. Dan bestaan ook $\sup(\alpha A)$ voor $\alpha \geq 0$, en $\inf(\alpha A)$ voor $\alpha \leq 0$, en

(i) $\sup A + \sup B = \sup(A+B)$

(ii) $\sup(\alpha A) = \alpha.\sup A \quad (\alpha \geq 0)$

(iii) $\inf(\alpha A) = \alpha.\sup A \quad (\alpha \leq 0)$

Hetzelfde geldt met verwisseling van sup en inf.

Bewijs: Stel $a:=\sup A$, $b:=\sup B$, en $c:=\sup(A+B)$.

(i) Kennelijk is a+b een bovengrens van A+B, dus $c \leq a+b$.

Omgekeerd,

$$x+y \leq c \quad (x \in A,\ y \in B)$$
$$\rightarrow \ x \leq c-y \quad (x \in A,\ y \in B)$$
$$\rightarrow \ a=\sup A \leq c-y \quad (y \in B)$$
$$\rightarrow \ y \leq c-a \quad (y \in B)$$
$$\rightarrow \ b=\sup B \leq c-a$$

Dus $c=a+b$.

(ii) Voor $\alpha = 0$ is de bewering triviaal. Zij dus $\alpha \neq 0$.

Kennelijk is $\alpha.a$ een bovengrens van A. Omgekeerd, als z een bovengrens van αA is, dan

$$\alpha x \leq z \quad (x \in A)$$
$$\rightarrow \ x \leq \frac{1}{\alpha} z \quad (x \in A)$$
$$\rightarrow \ a \leq \frac{1}{\alpha} z.$$

Hieruit volgt dat $\alpha.a \leq z$, en dus is $\alpha.a = \sup(\alpha A)$.

De rest van het bewijs verloopt analoog.

Par. 3 Voorbeelden

3.1 Voorbeeld. De verzameling $\mathbb{R}$, voorzien van gebruikelijke optelling en scalar-vermenigvuldiging, en de ordening:

$$x \leq y \quad \leftrightarrow \quad x \leqq y$$

is een Rieszruimte met lineaire ordening.

3.2 Voorbeeld. $\mathbb{R}^n$ met coordinaatsgewijze optelling en scalar-vermenigvuldiging, en de coordinaatsgewijze ordening:

$$(x_1,\dots,x_n)=x \leq y=(y_1,\dots,y_n) \quad \leftrightarrow \quad x_i \leqq y_i \qquad (i=1,\dots,n)$$

is een Rieszruimte. Dit is onmiddelijk duidelijk maar volgt ook uit het volgende lemma.

3.3 Lemma. Zij $\{(E_\nu,\leq_\nu)\}_{\nu \in I}$ een collectie Rieszruimten. Zij $E=\prod_{\nu\in I}E_\nu$ het directe product van de vectorruimten E_ν (vgl. [1] pag.53) en voorzie dit van de product-ordening $\leq$:

$$f \leq g \quad \leftrightarrow \quad f(\nu) \leq_\nu g(\nu) \qquad (\nu \in I)$$

Dan is $(E,\leq)$ een Rieszruimte.

Bewijs: Merk op dat

$$(f \vee g)(\nu)=f(\nu) \vee_\nu g(\nu) \qquad (\nu \in I).$$

3.4 Voorbeeld. $\mathbb{R}^n$ (met gebruikelijke vector-structuur) voorzien van de lexicographische ordening:

$$x \leq y \quad \leftrightarrow \quad x=y \text{ of } \exists i \text{ met } 1\leq i\leq n \text{ zo,dat } x_i<y_i \text{ en } x_j=y_j \ (j=1,\dots,i-1)$$

is een lineair geordende Rieszruimte.

In voorbeeld 2.4 zagen we reeds dat $B_r(X)$ een Rieszruimte is. Het is een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^X$ en de ordening is de relatieve product-ordening van $\mathbb{R}^X$. Bovendien geldt

$$f \vee_{B_r(X)} g = f \vee_{\mathbb{R}^X} g \qquad (f \text{ en } g \text{ in } B_r(X)).$$

Dit laatste geldt niet altijd bij een relatieve (geerfde) ordening:

3.5 Voorbeeld. Zij $C_r[0,1]$ de (vegtor-)ruimte der reële continue functies op $[0,1]$, voorzien van de gewone ordening (i.e. de relatieve product-ordening van $\mathbb{R}^{[0,1]}$). Dit is een Riesz-ruimte. Zij

$$M := \{f \in C[0,1] \mid f(t) = \alpha t + \beta \quad (\alpha, \beta \text{ in } \mathbb{R})\}$$

M is een lineaire deelruimte van $C[0,1]$ en bij de relatieve ordening een Riesz-ruimte. Maar niet steeds geldt

$$f \vee_M g = f \vee_{C[0,1]} g \, !$$

Blijkens het volgende voorbeeld is een lineaire deelruimte van een Riesz-ruimte bij de relatieve ordening niet noodzakelijk een Riesz-ruimte (wel een o.v.).

3.7 Voorbeeld. Beschouw $\mathbb{R}^2$ met de coordinaatsgewijze ordening, en zij

$$M := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2\}$$

De relatieve ordening op M is de triviale:

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x = y$$

Het volgende hoofdstuk is gewijd aan de bestudering van een ander belangrijk voorbeeld van een Riesz-ruimte, n.l. de ruimte $M_n(\mathbb{R})$ der reele nxn matrices. De algemene theorie wordt voortgezet in hoofdstuk III.

Hoofdstuk II Positieve matrices

Par. 4 Irreducibele matrices

Met $M_n(\mathbb{R})$ zij aangeduid de verzameling van alle reële nxn-matrices. De elementen ~~man~~ van een matrix $A \varepsilon M_n(\mathbb{R})$ worden aangegeven met de corresponderende kleine letter $a_{i,j}$ $(i,j=1,\ldots,n)$; de matrix A zelf ook wel met $(a_{i,j})$. $M_n(\mathbb{R})$ is een (reele) vectorruimte bij de operaties:

$$A+B := (a_{i,j}+b_{i,j})$$
$$\lambda A := (\lambda a_{i,j}).$$

Deze vectorruimte is lineair isomorf met $\mathbb{R}^{n^2}$ onder de afbeelding $J: M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2}$,

$$J(A) = x \quad , \quad x_{(i-1)n+j} = a_{i,j}.$$

Laat $\mathbb{R}^{n^2}$ coordinaatsgewijs geordend zijn. We voorzien $M_n(\mathbb{R})$ van de (unieke) ordening waarvoor

$$A \geq B \quad \leftrightarrow \quad J(A) \geq J(B).$$

Daar $\mathbb{R}^{n^2}$ een Riesz-ruimte is, geldt dan hetzelfde voor $M_n(\mathbb{R})$; o.m. hebben we: $\quad A \geq 0 \leftrightarrow (a_{i,j} \geq 0$ voor $i,j=1,\ldots,n)$,

$$A \vee B = (a_{i,j} \vee b_{i,j}) \quad , \quad A \wedge B = (a_{i,j} \wedge b_{i,j}) ,$$
$$A^+ = (a_{i,j}{}^+) \quad , \quad A^- = (a_{i,j}{}^-) \quad , \quad |A| = (|a_{i,j}|).$$

Iedere $A \varepsilon M_n(\mathbb{R})$ bepaalt ondubbelzinnig een lineaire afbeelding $T_A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ door de formule

$$T_A(x) := A.x,$$

waar A.x het matrix-product van A met de als kolom geschreven vector x aanduidt. Omgekeerd, behoort bij elke lineaire afbeelding $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ juist één matrix $A_T \ \varepsilon \ M_n(\mathbb{R})$, bepaald door de eis dat de coordinaten van de vector $T(e_k)$ de k^{de} kolom van de matrix A_T vormen (hierin is e_k de k^e eenheids-vector in $\mathbb{R}^n$, dus $(e_k)_i = \delta_{k,i}$). In dat geval is

$$T_{(A_T)} = T \quad , \quad A_{(T_A)} = A.$$

e_k de k^{de} kanonieke basisvector in $\mathbb{R}^n$, d.w.z. $(e_k)_i = \delta_{k,i}$) In dat geval is

$$T_{(A_T)} = T \quad , \quad A_{(T_A)} = A .$$

Ter vereenvoudiging van de notatie zullen in het vervolg geen onderscheid meer maken in de notatie tussen een matrix en de daardoor bepaalde lineaire afbeelding. Met $A(x)$ of Ax wordt dus zowel $A.x$ als $T_A(x)$ aangeduid.

In dit hoofdstuk zullen we, sprekend over $\mathbb{R}^n$, deze ruimte steeds coordinaatsgewijs geordend denken.

4.1 Eigenschappen. Zij $A \in M_n(\mathbb{R})$. Dan geldt

(i) $A \geq 0 \quad \leftrightarrow \quad (Ax \geq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}^n$ met $x \geq 0)$

(ii) $|Ax| \leq |A|(|x|) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$.

Bewijs:

(i) Als $Ax \geq 0$, voor alle $x \in \mathbb{R}^n$, met $x \geq 0$, dan is in het bijzonder

$$Ae_k \geq 0 \quad (k=1,\ldots,n).$$

Daaruit volgt

$$a_{i,j} \geq 0 \quad (i,j=1,\ldots,n).$$

Het omgekeerde is triviaal.

(ii) Voor iedere $x \in \mathbb{R}^n$ geldt

$$|Ax|_i = |(Ax)_i| = \left|\sum_{j=1}^n a_{i,j}\, x_j\right|$$
$$\leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}||x_j| = (|A|(|x|))_i \quad (i=1,\ldots,n).$$

Hieruit volgt het gestelde.

De topologie van $\mathbb{R}^n$ (en eventueel $\mathbb{D}^n$) is de 'gewone' topologie, d.w.z. afkomstig van de metriek d,

$$d(x,y) := \|x-y\| := \left(\sum_{i=1}^n |x_i-y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

4.2. <u>Definitie</u>. Een <u>algebra</u> B over $\mathbb{R}$ is een reële lineaire ruimte waarin een vermenigvuldiging gedefinieerd is zo, dat

(i) B is een ring t.o.v. optelling en vermenigvuldiging,

(ii) $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$ $\quad (\lambda \in \mathbb{R},\ x,y \text{ in } B)$.

Een lineaire deelruimte I van de algebra B heet een <u>algebraisch ideaal</u> in B als

$$(x \in I,\ y \in B) \rightarrow (xy \in I,\ yx \in I).$$

Voorbeelden van algebra's zijn o.m.:

(i) $\mathbb{R}^n$ met als vermenigvuldiging het inwendig product ".":

$$x.y := (x_1y_1,\dots,x_ny_n)$$

(ii) $M_n(\mathbb{R})$ met de matrix-vermenigvudiging.

(iii) $C_r(X)$, de verzameling van alle continue reële functies op een topologische ruimte X, met puntsgewijze operaties.

4.3 <u>Stelling</u>. Zij I een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^n$. Dan zijn de volgende uitspraken aequivalent:

(i) I is een algebraisch ideaal

(ii) $I = \{0\}$, of er is een deelverzameling $V := \{i_1,\dots,i_r\}$ van $\{1,\dots,n\}$ zo dat

$$I = \text{sp}\ \{e_j \mid j \in V\}$$

(d.w.z. I is de lineaire deelruimte opgespannen door $\{e_j \mid j \in V\}$)

(iii) $(\ |a| \le |b|,\ a \in \mathbb{R}^n,\ b \in I) \rightarrow a \in I$.

<u>Bewijs</u>:

(i)→(ii): Neem aan $I \neq \{0\}$. Definieer

$$V := \{j \in \{1,\dots,n\} \mid \exists\, a \in I \text{ zo dat } a_j \neq 0\}.$$

Stel voorts

$$I_V := \text{sp}\ \{\ e_j \mid j \in V\}.$$

Als a een element is van I, dan is

$$a = \sum_{j=1}^{n} a_j . e_j = \sum_{j \in V} a_j . e_j \in I_V.$$

Dus $I \subset I_V$. Omgekeerd, als $j \in V$, dan is er een a in I met $a_j \neq 0$, en dus

$$e_j = \left(\frac{1}{a_j} e_j\right).a \in I.$$

Daaruit volgt dat $I_V \subset I$. Dus $I = I_V$.

(ii)→(iii): Als $I = \{0\}$ is het gestelde triviaal. Neem $b \in I$, en $a \in \mathbb{R}^n$ zo dat $|a| \leq |b|$. Dan is

$$|a_k| \leq |b_k| = 0 \quad (k \notin V),$$

en dus

$$a = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k = \sum_{k \in V} a_k e_k \in I$$

(iii)→(i): Neem $a \in I$, en $x \in \mathbb{R}^n$. Zij $\alpha := \max\{|x_i| \mid i=1,\ldots,n\}$. Dan is

$$|x.a| = |x|.|a| \leq \alpha|a| = |\alpha a|.$$

Daar $\alpha a \in I$, volgt hieruit $x.a \in I$ (en dus ook $a.x \in I$).

4.4 Definitie. Zij $A \in M_n(\mathbb{R})$. A heet reducibel, als er een decompositie van $\{1,\ldots,n\}$ bestaat in twee niet-lege deelverzamelingen V_1, V_2 zo dat

$$a_{i,j} = 0 \quad (i \in V_1,\ j \in V_2).$$

Als A niet reducibel is, dan heet A irreducibel.

4.5 Stelling. Zij $A \in M_n(\mathbb{R})$. A is reducibel als en alleen als er een niet-triviaal algebraisch ideaal I in $\mathbb{R}^n$ is dat A-invariant is; d.w.z.

$$I \neq \{0\} \quad , \quad I \neq \mathbb{R}^n \quad , \quad A[I] \subset I.$$

Bewijs:

(i) Veronderstel dat A reducibel is, en zij V_2 de in def. 4.4 genoemde verzameling. Dan is $I := I_{V_2}$ een niet-triviaal algebraisch ideaal, waarvoor geldt

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, e_i = \sum_{i \in V_2} a_{i,j}\, e_i \in I \quad (j \in V_2),$$

en dus, voor $x \in I$,

$$Ax = A\left(\sum_{j \in V_2} x_j\, e_j\right) = \sum_{j \in V_2} x_j (Ae_j) \in I.$$

D.w.z. I is A-invariant.

(ii) Zij I een niet-triviaal A-invariant ideaal. Dan is $I = I_V$, voor zekere niet-lege echte deelverzameling V van $\{1,\dots,n\}$. Stel

$$V_2 := V \quad , \quad V_1 := V^c \ (:=\{1,\dots,n\} \setminus V).$$

Voor $j \in V_2$, is $e_j \in I$, en dus

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, e_i = Ae_j \in I.$$

Dit betekent dat $a_{i,j} = 0$, voor $i \notin V_2$; m.a.w.

$$a_{i,j} = 0 \quad (i \in V_1,\ j \in V_2).$$

4.6 <u>Definitie</u>. Een <u>permutatie-matrix</u> (van de orde n) is een (nxn) matrix, waarvan alle elementen 0 of 1 zijn, en iedere rij en kolom precies één 1 bevat.

Een permutatiematrix S (opgevat als afbeelding van $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$) permuteert de basisvectoren e_i; preciezer, als $B:=\{e_1,\dots,e_n\}$ de de kanonieke basis in $\mathbb{R}^n$ voorstelt, dan is de restrictie $S_{|B}$ een permutatie van B (vgl. [2], par. 3). Omgekeerd, als σ een permutie van B is, dan wordt door

$$S(x) = S\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j\, e_j\Big) := \sum_{j=1}^{n} x_j(\sigma e_j)$$

ondubbelzinnig een permutatiematrix S gedefinieerd zo dat $S_{|B} = \sigma$. Van de volgende eigenschappen is nu (i) onmiddelijk duidelijk (vgl. [2], par. 15), terwijl (ii) volgt met behulp van 4.3.

4.7 Eigenschappen

(i) De permutatiematrices van de orde n vormen een groep (t.o.v. de matrixvermenigvuldiging); deze groep is isomorf met de symmetrische groep $\mathfrak{S}_n$.

(ii) Als S een permutatiematrix is van orde n, en I een algebraisch ideaal in $\mathbb{R}^n$, dan is $S[I]$ een algebraisch ideaal in $\mathbb{R}^n$.

4.8 Stelling. Zij $A \in M_n(\mathbb{R})$. A is reducibel als en alleen als er een permutatiematrix S bestaat zo dat

$$S^{-1}.A.S = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$$

met matrices B, C, D, waarvan D vierkant met orde kleiner dan n.

Bewijs:

(i) Zij A reducibel, en laat $V_1 =: \{i_1, \ldots, i_r\}$ en $V_2 =: \{i_{r+1}, \ldots, i_n\}$ zo gekozen zijn als in def. 4.4. Leg de matrix S vast door de eis

$$S(e_k) := e_{i_k} \quad (k=1,\ldots,n).$$

Dan is S een permutatiematrix en

$$S^{-1}.A.S(e_k) = S^{-1}.A(e_{i_k}) = S^{-1}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{j,i_k} e_j\Big)$$
$$= S^{-1}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{i_j,i_k} e_{i_j}\Big) = \sum_{j=1}^{n} a_{i_j,i_k} e_j$$

Dit betekent dat voor de elementen $b_{j,k}$ van de matrix $S^{-1}.A.S$ geldt

$$b_{j,k} = a_{i_j,i_k} = 0 \quad (j=1,\ldots,r,\ k=r+1,\ldots,n).$$

De matrix D is derhalve $n-r \times n-r$.

(ii) Neem aan dat S een permutatiematrix is met de vermelde eigenschap. Dan is klaarblijkelijk $S^{-1}.A.S$ reducibel, terwijl $A=S.(S^{-1}.A.S).S^{-1}$. Het is dus voldoende de volgende bewering te bewijzen: Als A reducibel is, en S een permutatiematrix, dan is $S.A.S^{-1}$ reducibel. Welnu, zij I een niet-triviaal A-invariant algebraisch ideaal. Dan is $J := S[I]$ een niet-triviaal algebraisch ideaal (volgens 4.7(ii)), waarvoor geldt

$$S.A.S^{-1}[J] = S.A[I] \subset S[I] = J.$$

D.w.z. J is $S.A.S^{-1}$-invariant, dus $S.A.S^{-1}$ is reducibel.

4.6 Definitie. Een vector $x \in \mathbb{R}^n$ heet definiet positief (notatie: $x > 0$) als $x_i > 0$ $(i=1,\ldots,n)$.

Een matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ heet definiet positief (notatie: $A > 0$) als $a_{i,j} > 0$ $(i,j=1,\ldots,n)$.

4.7 Eigenschappen. Zij $A \in M_n(\mathbb{R})$.

(i) Als A definiet positief is, dan is A irreducibel.

(ii) $A > 0 \;\leftrightarrow\; (Ax > 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}^n$ met $0 \neq x \geq 0)$

Bewijs:

(i) Triviaal.

4.8 Lemma. Zij $A \in M_n(\mathbb{R})$ een irreducibele matrix, waarvoor geldt $A \geq 0$. Voorts zij x een element van $\mathbb{R}^n$ met $x \geq 0$, $x \neq 0$, $x \not> 0$. Dan heeft $(E+A)x$ meer coordinaten ongelijk aan 0 dan x (E beduidt de eenheidsmatrix).

Bewijs: Zij V_1 de collectie indices i waarvoor $x_i = 0$, en $V_2 = \{1, \ldots, n\} \setminus V_1$. Dan is $V_1 \neq \phi$, en $V_2 \neq \phi$. Veronderstel, $y := (E+A)x$ heeft niet meer coordinaten ongelijk aan 0 dan x. Uit de formule

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} (\delta_{i,k} + a_{i,k}) x_k = (1 + a_{i,i}) x_i + \sum_{k \neq i} a_{i,k} x_k \qquad (1)$$

volgt dat dan

$$y_i = 0 \quad (i \in V_1) \quad , \quad y_i \neq 0 \quad (i \in V_2).$$

Dus geldt, voor $i \in V_1$,

$$\sum_{k \in V_2} a_{i,k} x_k = \sum_{k \neq i} a_{i,k} x_k = 0.$$

Daar $x_k > 0$, voor alle $k \in V_2$, volgt hieruit

$$a_{i,k} = 0 \quad (i \in V_1, k \in V_2),$$

in tegenspraak met de irreducibiliteit van A.

4.9 Stelling. Een matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A \geq 0$, is irreducibel als en alleen als $(E+A)^{n-1} > 0$.

Bewijs:

(i) Zij $(E+A)^{n-1} > 0$. Als A reducibel is, dan bestaat er een niet-triviaal A-invariant alg. ideaal I. Dit is echter eveneens invariant voor $(E+A)^{n-1}$, in tegenspraak met 4.7(i).

(ii) Zij A irreducibel. Kies x zo dat $x \neq 0$, $x \geq 0$. Als $x > 0$, dan is ook $(E+A)x > 0$ (zie formule 1), en dus (door inductie) $(E+A)^{n-1}x > 0$. Als $x \not> 0$, dan volgt uit lemma 4.8 dat $(E+A)x$ meer coordinaten ongelijk aan 0 heeft dan x, zodat (opnieuw door inductie) $(E+A)^{n-1}x$ zeker alle coordinaten ongelijk aan nul heeft. Dus, ook in dit geval, $(E+A)^{n-1}x > 0$.

Par 5 Spectraaltheorie van positieve matrices

Voor de spectraaltheorie is het noodzakelijk het scalairenlichaam uit te breiden tot de complexe getallen. De verzameling der complexe $n \times n$ matrices duiden we aan met $M_n(\mathbb{C})$. Hoewel we in $\mathbb{C}^n$ en $M_n(\mathbb{C})$ geen ordening zullen introduceren, gebruiken we wel de notaties $|z|$ (met $z \in \mathbb{C}^n$) voor het punt $x \in \mathbb{R}^n$ met coordinaten

$$x_i = |z_i| \quad (i=1,\dots,n),$$

en $|A|$ (met $A \in M_n(\mathbb{C})$) voor de matrix $B \in M_n(\mathbb{R})$ met elementen

$$b_{i,j} = |a_{i,j}| \quad (i,j=1,\dots,n).$$

Voor de volledigheid vatten we hier de belangrijkste beginselenn samen van de algemene spectraaltheorie van matrices. Voor details zij verwezen naar de literatuur (b.v.).

Zij $A \in M_n(\mathbb{C})$. Een getal $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ heet een eigenwaarde van A als er een vector $z \in \mathbb{C}^n$, ongelijk aan 0, bestaat zo dat

$$Az = \lambda_0 z.$$

De vector z heet dan een eigenvector van A bij de eigenwaarde λ_0. De eigenvectoren van A bij λ_0 vormen tezamen met 0 een lineaire deelruimte van $\mathbb{C}^n$. Een getal λ_0 is een eigenwaarde van A als en alleen als

$$\det(\lambda_0 E-A) = 0.$$

De uitdrukking $\det(\lambda E-A)$ (met variabele $\lambda \in \mathbb{C}$) heet de karakteristieke veelterm van A. De verzameling der eigenwaarden van A heet het spectrum van A, en wordt aangeduid met $\sigma(A)$. Daar een veelterm steeds nulpunten (in $\mathbb{C}$) heeft is $\sigma(A)$ een niet-lege deelverzameling van het complexe vlak. De spectraalradius $r(A)$ van A is gedefinieerd als

$$r(A) := \max \{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Zij λ_o een eigenwaarde van A. De algebraische multipliciteit $n(\lambda_o$ van λ_o is de multipliciteit van λ_o als nulpunt van de karakteristieke veelterm. De meetkundige multipliciteit $m(\lambda_o)$ van λ_o is de dimensie van de eigenruimte bij λ_o, d.w.z.

$$m(\lambda_o) := \dim \{z \in \mathbb{C}^n \mid Az = \lambda_o z\}.$$

Steeds geldt

$$m(\lambda_o) = n - \mathrm{rang}(\lambda_o E - A) \qquad (1)$$

$$m(\lambda_o) \leqq n(\lambda_o).$$

Als B nog een $n \times n$ matrix is met $\det(B) \neq 0$, dan heeft de matrix $B.A.B^{-1}$, en ook de getransponeerde A^T van A, dezelfde spectraal-eigenschappen (eigenwaarden, multipliciteiten enz.); want

$$\det(\lambda E - A) = \det(\lambda E - B.A.B^{-1}) = \det(\lambda E - A^T),$$

$$\mathrm{rang}(\lambda E - A) = \mathrm{rang}(\lambda E - B.A.B^{-1}) = \mathrm{rang}(\lambda E - A^T).$$

Tenslotte, zij $A \in M_n(\mathbb{R})$, en λ_o een reële eigenwaarde. Dan behoren bij λ_o ook reële eigenvectoren (d.w.z. eigenvectoren $x \in \mathbb{R}^n$); immers, als $Az = \lambda_o z$ en $z_j = x_j + iy_j$ met reële x_j, y_j, dan ook $Ax = \lambda_o x$ en $Ay = \lambda_o y$. We kunnen dus definieren

$$m'(\lambda_o) := \dim \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \lambda_o x\}.$$

Voor $m'(\lambda_o)$ geldt dan echter het analogon van formule (1), waaruit onmiddelijk volgt dat

$$m'(\lambda_o) = m(\lambda_o).$$

5.1 Stelling (Perron 1907). Zij $A \in M_n(\mathbb{R})$ een definiet positieve matrix. Dan

(i) $r(A) > 0$

(ii) $r(A)$ is een eigenwaarde van A met algebraische multipliciteit 1,

(iii) bij $r(A)$ behoort een definiet positieve eigenvector.

Bewijs: Op grond van 4.7(i), is de stelling een onmiddelijk gevolg van de volgende, iets recenter, stelling van Frobenius:

5.2 Stelling (Frobenius, $\pm$1910). Zij $A \in M_n(\mathbb{R})$ een irreducibele matrix, waarvoor geldt $A \geq 0$. Dan

(i) $r(A) > 0$,

(ii) $r(A)$ is een eigenwaarde van A met algebraische multipliciteit 1,

(iii) bij $r(A)$ behoort een definiet positieve eigenvector.

Bewijs: Het bewijs wordt uiteengelegd in een aantal deelresultaten, aangeduid met romeinse cijfers.

I. Voor iedere $x \in \mathbb{R}^n$ met $0 \leq x \neq 0$ bestaat

$$r_x := \max \{\rho \in \mathbb{R} \mid Ax \geq \rho x\}.$$

Bovendien geldt

$$r_x = \min \{\frac{(Ax)_i}{x_i} \mid x_i \neq 0, i=1,\ldots,n\}. \qquad (1)$$

Bewijs: Eenvoudig.

II. Er is een $z \in \mathbb{R}^n$ met $z > 0$, zo dat

$$r_z = r := \max \{r_x \mid 0 \neq x \geq 0\}$$

Bewijs: Definieer

$$K^0 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \neq x \geq 0\} \quad , \quad M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, \|x\|=1\}.$$

Dan is M een compacte deelverzameling van K^0, en aangezien

$$r_{\alpha x} = r_x \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0),$$

geldt

$$\sup \{r_x \mid x \in K^0\} = \sup \{r_x \mid x \in M\}.$$

Merk op dat uit formule (1) volgt dat r_x, als functie van x, continu is op de verzameling

$$K^+ := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x > 0\}.$$

Voorts is, volgens 4.9, $(E+A)^{n-1} > 0$, zo dat

$$N := (E+A)^{n-1}[M] \subset K^+$$

Daar N bovendien compact is, bestaat derhalve een $z \in N$ met

$$r_z = \max \{r_y \mid y \in N\}.$$

Het is duidelijk dat

$$r_z \leqq \sup\{r_x \mid x \in K^+\} \leqq \sup\{r_x \mid x \in K^0\} \leqq \sup\{r_x \mid x \in M\}. \quad (2)$$

Zij nu $x \in M$, en $y := (E+A)^{n-1}x$. Dan is $Ax \geq r_x x$, en dus

$$Ay = A(E+A)^{n-1}x = (E+A)^{n-1}Ax \geq r_x(E+A)^{n-1}x = r_x y.$$

Dit betekent dat $r_y \geqq r_x$, en dus

$$\max\{r_y \mid y \in N\} \geqq \sup\{r_x \mid x \in M\}.$$

Gecombineerd met formule (2), vinden we nu

$$r_z = \max\{r_x \mid x \in K^+\} = \max\{r_x \mid x \in K^0\} = \max\{r_x \mid x \in M\},$$

waarmee het gestelde is bewezen.

III. $\quad r > 0$

<u>Bewijs</u>: Bekijk $u := (1,\ldots,1)$ in $\mathbb{R}^n$. Dan is, op grond van de irreducibiliteit (en positiviteit) van A,

$$(Au)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} > 0. \quad (i=1,\ldots,n).$$

Daaruit volgt $r_u > 0$, en dus $r > 0$.

IV. Zij w een punt waarvoor $r_w = r$. Dan is

$$w > 0 \quad , \; Aw = r\,w.$$

(In het bijzonder dus, $Az = r\,z$)

<u>Bewijs</u>: Veronderstel $Aw \neq r\,w$, d.w.z.

$$0 \neq Aw - r\,w \geq 0.$$

Voor $v := (E+A)^{n-1}w$ geldt dan

$$v > 0 \quad , \quad Av - r\,v = (E+A)^{n-1}(Aw - r\,w) > 0,$$

en dus

$$r_v = \min\left\{ \frac{(Av)_i}{v_i} \;\middle|\; i=1,\ldots,n\right\} > r, \text{ een contradictie.}$$

Derhalve is $Aw = r\,w$. Daaruit volgt bovendien

$$(1+r)^{n-1}w = (E+A)^{n-1}w > 0,$$

en dus $w > 0$,

V. $\quad r = r(A)$

<u>Bewijs</u>: Zij λ een eigenwaarde van A, en $y \in \mathbb{C}^n$ een bijbehorende eigenvector ($y \neq 0$). Definieer $v \in \mathbb{R}^n$ door

eigenvector (dus $y \neq 0$). Definieer $v \in \mathbb{R}^n$ als $v := |y|$.

Dan is, voor iedere i,

$$(Av)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|y_j| \geq |\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, y_j| = |(Ay)_i| = |\lambda y_i| = |\lambda| v_i.$$

Daaruit volgt

$$Av \geq |\lambda|\, v$$

$$\rightarrow\ r_v \geq |\lambda|$$

$$\rightarrow\ r \geq |\lambda|.$$

Daar λ willekeurig gekozen was, en anderzijds r een eigenwaarde van A is, volgt hieruit $r = r(A)$.

VI. r is een eigenwaarde met meetkundige multipliciteit 1.

Bewijs: Zij x ($\neq 0$) een reële eigenvector bij r. Dan zijn alle coordinatem van x ongelijk aan 0. Immers, volgens 4.1(ii), is

$$r|x| = |Ax| \leq A(|x|),$$

zodat $r_{|x|} \geq r$, en dus in feite $r_{|x|} = r$. We kunnen dus IV toepassen, en vinden

$$(\ A(|x|) = r|x|\ ),\quad |x| > 0.$$

Zij nu y nog een reële eigenvector bij r. Definieer

$$z := \frac{y_1}{x_1}x - y.$$

Dan is

$$Az = r\,z \quad , \quad z_1 = 0,$$

en dus, volgens het voorafgaande toegepast op z, noodzakelijk

$$z = 0.$$

D.w.z. x en y zijn lineair afhankelijk.

VII r is een eigenwaarde met algebraische multipliciteit 1.

Bewijs: We moeten aantonen dat de afgeleide van de karakteristieke veelterm $\det(\lambda E - A)$ in het punt r niet 0 is. Zij dus

$$\gamma := \lim_{\lambda \to r} \frac{\det(\lambda E - A)}{\lambda - r},$$

en definieer, voor iedere λ, de matrix $B(\lambda)$ door

$$b_{i,j}(\lambda) := m_{j,i}(\lambda) := (-1)^{i+j} \det(\lambda E-A)_{i,j}$$

($m_{j,i}(\lambda)$ is de minor van het element $\lambda\delta_{i,j}-a_{i,j}$ in de matrix $\lambda E-A$; zie [2] blz. 27-29). Dan geldt

$$B(\lambda).(\lambda E-A) = (\lambda E-A).B(\lambda) = \det(\lambda E-A)\, E.$$

(i) $B(r) \neq 0$.

Want: Daar, volgens VI, de meetkundige multipliciteit 1 is (d.w.z. $\operatorname{rang}(rE-A) = n-1$), is minstens één minor $m_{i,j}(r)$ ongelijk aan 0. Dus $B(r)$ is niet de nul-matrix.

(ii) $B(r)z = \gamma z$.

Want: $Az = r\, z$

$$\rightarrow (\lambda E-A)z = (\lambda-r)\, z$$

$$\rightarrow \det(\lambda E-A)\, z = B(\lambda).(\lambda E-A)z = (\lambda-r)B(\lambda)z$$

$$\rightarrow B(\lambda)z = \frac{\det(\lambda E-A)}{\lambda-r}\, z$$

$$\rightarrow B(\lambda)z = \gamma\, z.$$

(iii) Voor iedere j ($j=1,\ldots,n$) is er een λ_j zo dat

$$b_{i,j}(r) = \lambda_j\, z_i \quad (i=1,\ldots,n).$$

Want: Uit de formule

$$(r\,E-A).B(r) = \det(r\,E-A)\,E = 0$$

volgt dat iedere kolom van $B(r)$ een eigenvector van A bij r , en dus een veelvoud van z is.

(iv) $B(r) \geq 0$, of $B(r) \leq 0$.

Want: Merk op dat met A ook A^T aan de voorwaarden van de stelling voldoet. Het tot nu toe afgeleide geldt dus m.m. voor A^T i.p.v. A. In aanmerking nemend dat A^T dezelfde spectraaleigenschappen als A heeft (in het bijzonder, dezelfde spectraalradius r), volgt dus uit (iii): Er is een $z' > 0$ in $\mathbb{R}^n$ zo, dat voor iedere i ($i=1,\ldots,n$) een getal μ_i bestaat met

$$b_{i,j}(r) = \mu_i\, z'_j \quad (j=1,\ldots,n).$$

Neem nu aan dat $b_{1,1} \geqq 0$. Dan volgt uit (iii) en de zojuist afgeleide formule

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \geqq 0 \\ \rightarrow\ & b_{i,1} \geqq 0 \quad (i=1,\ldots,n) \\ \rightarrow\ & \mu_i \geqq 0 \quad (i=1,\ldots,n) \\ \rightarrow\ & b_{i,j} \geqq 0 \quad (i,j=1,\ldots,n). \end{aligned}$$

Een analoge redenering geldt als $b_{1,1} \leqq 0$.

Tenslotte, veronderstel dat $\gamma = 0$. Dan is

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}(r)\, z_j = (B(r)z)_i = 0 \quad (i=1,\ldots,n) && \text{(volgens (ii))} \\ \rightarrow\ & b_{i,j}(r)\, z_j = 0 \quad (i,j=1,\ldots,n) && \text{(wegens (iv) en daar } z > 0) \\ \rightarrow\ & b_{i,j}(r) = 0 \quad (i,j=1,\ldots,n). \end{aligned}$$

Dit laatste is in tegenspraak met (i), en dus is VII bewezen.

Hiermee zijn alle delen van stelling 5.2 aangetoond.

5.3 Gevolg. Zij $A \in M_n(\mathbb{R})$ een irreducibele matrix, met $A \geq 0$. Dan is

$$\min\{\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \mid i=1,\ldots,n\} \leqq r(A) \leqq \max\{\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \mid i=1,\ldots,n\}.$$

Bewijs:

(i). Zij $u := (1,\ldots,1)$. Dan is

$$\frac{(Au)_i}{u_i} = (Au)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \quad (i=1,\ldots,n).$$

Gebruikmakend van enkele onderdelen uit het bewijs van 5.2, vinden we dus

$$\begin{aligned} \min\{\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \mid i=1,\ldots,n\} &= \min\{\frac{(Au)_i}{u_i} \mid i=1,\ldots,n\} \\ &= r_u \leqq r = r(A). \end{aligned}$$

(ii). Neem een $z \in \mathbb{R}^n$ met $z > 0$, en $Az = r(A)\, z$. Dan is

$$r(A)\, z_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, z_j \quad (i=1,\ldots,n).$$

Bepaal k zo dat $z_k = \max\{z_1,\ldots,z_n\}$. Dan vinden we

$$r(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} z_k^{-1} z_j \leqq \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} \leqq \max\{\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \mid i=1,\ldots,n\}.$$

Daarmee is het gestelde bewezen.

De volgende stelling geeft een gedeeltelijke verscherping van 5.2. Bij het bewijs ervan zullen we gebruik maken van het volgende resultaat uit de analyse (zie [3] deel II, par 235,236):

Zij $p(\lambda):=\lambda^n+\sum_{i=1}^{n} a_i\lambda^{n-i}$ een veelterm met complexe coefficienten, met nulpunten $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. Dan is er, bij iedere $\varepsilon>0$, een $\delta>0$ zo dat van iedere veelterm $q(\lambda):=\lambda^n+\sum_{i=1}^{n} b_i\lambda^{n-i}$, waarvoor geldt $|b_i-a_i|<\delta$ $(i=1,\ldots,n)$, de nulpunten $\mu_1,\ldots,\mu_n$ zo genummerd kunnen worden dat $|\lambda_i-\mu_i|<\varepsilon$ $(i=1,\ldots,n)$. M.a.w. de nulpunten van een veelterm zijn een continue functie van de coefficienten.

5.4 Stelling. Zij $A \in M_n(\mathbb{R})$ en $A \geq 0$. Dan is $r(A)$ een eigenwaarde van A met een positieve eigenvector.

Bewijs: Zij $F \in M_n(\mathbb{R})$ de matrix met $f_{i,j}=1$ $(i,j=1,\ldots,n)$. Definieer voor ieder natuurlijk getal m de matrix

$$A_m := A + \frac{1}{m} F.$$

Dan is $A_m > 0$; dus is, volgens 5.1, $r(A_m)$ een eigenwaarde van A_m met een definiet positieve eigenvector $z_{(m)}$, waarvan we nog mogen veronderstellen dat $\|z_{(m)}\|=1$. Voorts geldt

$$\lim_{m\to\infty} r(A_m) = r(A);$$

Immers, nummer de eigenwaarden λ_i van A (d.w.z., de nulpunten van $\det(\lambda E-A)$) zo dat

$$r(A) = |\lambda_1| = \ldots = |\lambda_k| < |\lambda_{k+1}| \leq \ldots |\lambda_n|.$$

Kies een positief getal ε zo dat

$$\varepsilon < \frac{1}{3} \min\{ |\lambda_i-\lambda_j| \mid \lambda_i\neq\lambda_j \ (i,j=1,\ldots,n)\}.$$

Volgens de geciteerde continuiteitsstelling, is er een getal N zodat voor iedere $m>N$ de eigenwaarden $\lambda^m{}_i$ van A_m zo te nummeren zijn dat $|\lambda^m{}_i-\lambda_i| < \varepsilon$ $(i=1,\ldots,n)$. Dit betekent dat

$$r(A_m) \in \{\lambda^m{}_1,\ldots,\lambda^m{}_k\} \qquad (m > N),$$

en dus dat

$|r(A_m$

$$|r(A_m)-r(A)| < \varepsilon \qquad (n > N).$$

Tenslotte, laat $\{z_{(m_j)}\}$ een convergente deelrij zijn van de (begrensde) rij $\{z_{(m)}\}$, met limiet z, zeg. Dan is $\|z\|=1$ (dus $z \neq 0$), $z \geq 0$, en bovendien

$$Az = \lim_{j\to\infty} A_{m_j} z_{(m_j)} = \lim_{j\to\infty} r(A_{m_j})\, z_{(m_j)} = r(A)\, z.$$

Hiermee is het gestelde bewezen.

Dat van de overige resultaten uit 5.2 bij reducibele A niets te redden is, blijkt uit het volgende voorbeeld.

5.5 Voorbeeld. Zij

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dan is $r(A)$ (= 0) een eigenwaarde met meetkundige multipliciteit 1, zonder definiet positieve eigenvectoren, en met algebraische multipliciteit 2.

Voor nog enkele resultaten die verbamd houden met de stelling van Frobenius (-Perron) verwijzen we naar de vraagstukkenverzameling (vraagstuk I). Zonder bewijs citeren we de volgende partiele omkering:

5.6 Stelling. Zij $A \in M_n(\mathbb{R})$ een matrix met $A \geq 0$, waarvoor geldt:

(i) r(A) is een eigenwaarde van A met algebraische multipliciteit 1,

(ii) bij $r := r(A)$ behoort een definiet positieve eigenvector van A,

(iii) bij r behoort een definiet positieve eigenvector van A^T.

Dan is A irreducibel.

Bewijs: Zie [4], par. XIII.4.

De rest van deze paragraaf is gewijd aan nog een resultaat van Frobenius, dat een goede indruk verschaft omtrent de vorm van het spectrum van een positieve irreducibele matrix. Daartoe moeten we eerst nog wat nader ingaan op de eigeschappen van positieve matrices.

5.7 Lemma. Zij $A \in M_n(\mathbb{C})$. Als er een z bestaat met

$$z > 0 \quad , \quad Az = |A| z,$$

dan is $A \geq 0$.

Bewijs: Uit het gegeven volgt

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, z_j = \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\, z_j \qquad (i=1,\dots,n)$$

$$\rightarrow \sum_{j=1}^{n} (|a_{i,j}| - \mathrm{Re}\, a_{i,j})\, z_j = 0 \qquad (i=1,\dots,n)$$

$$\rightarrow \quad |a_{i,j}| = \mathrm{Re}\, a_{i,j} \qquad (i,j=1,\dots,n)$$

$$\rightarrow \quad |a_{i,j}| = a_{i,j} \qquad (i,j=1,\dots,n).$$

5.8 Lemma. Zij $A \in M_n(\mathbb{R})$ een (irreducibele) matrix met $A \geq 0$. Als voor $C \in M_n(\mathbb{C})$ geldt $|C| \leq A$, dan is $r(C) \leq r(A)$.

Bewijs: Zij λ een eigenwaarde van C, en y een bijbehorende eigenvector. Volgens een formule, analoog aan 4.1(ii), is nu

$$A(|y|) \geq |C|(|y|) \geq |Cy| = |\lambda\, y| = |\lambda|\ |y|.$$

Dus geldt, aangenomen dat A irreducibel is(vgl. bewijs 5.2),

$$|\lambda| \leq r_{|y|} \leq r(A),$$

en dus, daar λ een willekeurige eigenwaarde van C is, $r(C) \leq r(A)$. (Voor reducibele A kan de stelling nu bewezen worden met een methode zoals aangegeven in het bewijs van 5.4)

5.9 Lemma. Zij $A \in M_n(\mathbb{R})$ een irreducibele matrix met $A \geq 0$. Als voor $C \in M_n(\mathbb{C})$ geldt

$$|C| \leq A \quad , \quad r(C) = r(A),$$

dan is $|C| = A$.

Bewijs: Zij λ een eigenwaarde van C met $|\lambda| = r(C) = r(A)$, en y een bijbehorende eigenvector. Dan is

$$A|y| \geq |C|(|y|) \geq |Cy| = |\lambda\, y| = |\lambda|\,|y| = r(A)|y|. \tag{2}$$

Dit betekent dat $r_{|y|} = r(A)$, en dus (zie stap IV in bewijs 5.2),

$$|y| > 0 \quad , \quad A(|y|) = r(A)|y| \tag{3}$$

Hieruit en uit (2) volgt nu $A(|y|) = |C|(|y|)$, oftewel

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|y_j| = \sum_{j=1}^{n} |c_{i,j}|\,|y_j| \qquad (i=1,\ldots,n).$$

Daar $|y| > 0$, impliceert dit (vgl. bewijs 5.7)

$$a_{i,j} = |c_{i,j}| \qquad (i,j=1,\ldots,n).$$

5.10 Opmerking.

(i) In 5.9 kan de irreducibiliteit van A niet worden gemist. Dit ziet men b.v. aan de hand van de matrix A uit voorbeeld 5.5 met $C := \frac{1}{2} A$.

(ii) Evenmin geldt de omkering van 5.9, in de zin dat $|C|=A$ impliceert $r(C)=r(A)$. Neem maar

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C := \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dan is $|C| = A > 0$, en $0 = r(C) < r(A) = 2$.

5.11 Stelling. Zij $A \in M_n(\mathbb{R})$ een irreducibele matrix met $A \geq 0$, en $C \in M_n(\mathbb{C})$ een matrix waarvoor geldt

$$|C| \leq A \quad , \quad r(C) = r(A) := r.$$

Als λ een eigenwaarde van C is met $|\lambda| = r$, dan is er een diagonaalmatrix D zo ,dat

$$|D| = E \quad , \quad C = \frac{\lambda}{r} D.A.D^{-1}.$$

Bewijs: Zij y een eigenvector van C, behorende bij λ. Merk op dat de formules (2), (3) dan van toepassing zijn. Definieer de matrix D door

$$d_{i,j} := \delta_{i,j}\frac{y_i}{|y_i|} \qquad (i,j=1,\ldots,n)$$

Dan is D een inverteerbare matrix, met $|D|=E$, waarvoor geldt $D(|y|) = y$. Voor $F := \frac{r}{\lambda} D^{-1}.C.D$ hebben we dus

$$F(|y|) = \frac{r}{\lambda} D^{-1} C(y) = \frac{r}{\lambda} D^{-1}(\lambda\, y) = \frac{r}{\lambda} \lambda\, |y| = r|y| = A(|y|).$$

Maar

$$A = |C| = |\frac{r}{\lambda} D^{-1} C.D| = |F|.$$

We kunnen dus lemma 5.7 toepassen op F, en vinden $F \geq 0$, d.w.z.

$$F = |F| = A.$$

Daaruit volgt het gestelde.

5.12 Opmerking. Het spectrum van C (in 5.11) komt door draaiing voort uit dat van A; preciezer

$$\sigma(C) = \frac{\lambda}{r}\, \sigma(A).$$

Bovendien, als $\mu \in \sigma(C)$, dan heeft μ dezelfde algebraische - en meetkundige multipliciteit als de eigenwaarde $\frac{\lambda}{r}\mu$ van A. Dit volgt gemakkelijk uit de gelijkheden

$$\det(\nu E - C) = \frac{\lambda}{r} \det(\frac{r}{\lambda}\nu E - A) \quad , \quad \operatorname{rang}(\nu E - C) = \operatorname{rang}(\frac{r}{\lambda}\nu E - A)$$

(vgl. de inleiding van deze paragraaf).

5.13 Definitie. Zij $A \in M_n(\mathbb{C})$. De verzameling

$$\{\lambda \in \sigma(A) \mid |\lambda| = r(A)\}$$

noemen we het perifere spectrum van A, en de punten ervan de perifere eigenwaarden van A.

5.14 Stelling (Frobenius). Zij $A \in M_n(\mathbb{R})$ een irreducibele matrix met $A \geq 0$. Dan geldt:

(i) iedere perifere eigenwaarde heeft algebraische multipliciteit 1,

(ii) als $\lambda_o, \ldots, \lambda_{k-1}$ de perifere eigenwaarden van A zijn, dan zijn $\frac{\lambda_o}{r}, \ldots, \frac{\lambda_{k-1}}{r}$ juist de k^e eenheidswortels,

(iii) $\sigma(A)$ is invariant voor draaiing over een hoek $\frac{2\pi}{k}$, d.w.z.

$$\sigma(A) = \exp(\frac{2\pi i}{k})\, \sigma(A).$$

Bewijs.

(i) We weten dat r een (perifere) eigenwaarde van A is met algebraische multipliciteit 1. Zij nu λ een willekeurige perifere eigenwaarde van A. Dan bestaat er, volgens 5.11, een diagonaalmatrix D met $|D|=E$ zo, dat

$$A = \frac{\lambda}{r} D.A.D^{-1}.$$

Dit betekent, volgens 5.12, dat λ dezelfde alg. multipliciteit heeft als r, dus 1.

(ii) Zij $\{r=\lambda_o, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}\}$ het perifere spectrum van A, en stel

$$\gamma_j := \frac{\lambda_j}{r} \quad (j=o,\ldots,k-1) \quad , \quad G := \{1=\gamma_o, \gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}\}.$$

We zullen aantonen dat G een groep is. Voor iedere j, zij D_j een matrix, zoals bepaald in 5.11, dus

$$A = \gamma_j D_j.A.D_j^{-1} \quad , \quad |D_j| = E \quad (j=o,\ldots,k-1).$$

Dan is,

$$\begin{aligned} A = \gamma_j D_j.A.D_j^{-1} &= \gamma_j D_j.(\gamma_l D_l.A.D_l^{-1}).D_j^{-1} \\ &= \gamma_j \gamma_l (D_j.D_l).A.(D_j.D_l)^{-1} \quad (j,l=o,\ldots,k-1). \end{aligned}$$

Dit betekent dat $\gamma_j \gamma_l r$ in het perifere spectrum van A ligt, m.a.w. $\gamma_j \gamma_l \varepsilon G$. Dus G is een ondergroep van orde k van de multiplicatieve groep $\mathbb{T}$ der complexe getallen met modulus 1, en derhalve noodzakelijk de groep der k^e eenheidswortels.

(iii) Volgt direct uit (ii) en opmerking 5.12.

5.15 <u>Aanvulling</u>. Onder de voorwaarden van 5.14 bestaat er een permutatiematrix S zo, dat

$$S.A.S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & .. & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & A_{k-1\,k} \\ A_{k1} & 0 & 0 & .. & 0 \end{pmatrix},$$

waarin de diagonaal uit vierkante matrices bestaat, (mits k > 0).

<u>Bewijs</u>: Zie [9], par XIII.2.

Par. 6

In deze paragraaf is $(E,\leq)$ steeds een Riesz-ruimte met kegel K. We beginnen met een aantal regels die iets zeggen over het verbamd tussen de roosteroperaties. Daarbij zijn x,y,z,elementen van E.

6.1 Associatieve wetten.

$$(x\vee y)\vee z=x\vee(y\vee z)=\sup\{x,y,z\}$$

$$(x\wedge y)\wedge z=x\wedge(y\wedge z)=\inf\{x,y,z\}$$

Bewijs: Triviaal

6.2 Distributieve wetten.

$$(x\vee y)\wedge z=(x\wedge z)\vee(y\wedge z)$$

$$(x\wedge y)\vee z=(x\vee z)\wedge(y\vee z)$$

Bewijs: We bewijzen de eerste betrekking. Zonder moeite ziet men dat

$$(x\vee y)\wedge z\geq(x\wedge z)\vee(y\wedge z)$$

Stel $w:=(x\wedge z)\vee(y\wedge z)$. Dan

$$w\geq x\wedge z=x+z-(x\vee z)\quad\text{(volgens 2.7(iii))}$$

$$\rightarrow\quad w-z+(x\vee z)\geq x$$

Daar hetzelfde geldt met vervanging van x ddor y, volgt nu

$$(w-z+(x\vee z))\vee(w-z+(y\vee z))\geq x\vee y$$

$$\rightarrow\quad w-z+((x\vee z)\vee(y\vee z))\geq x\vee y\quad\text{(volgens 2.1(i))}$$

$$\rightarrow\quad w-z+((x\vee y)\vee z)\geq x\vee y$$

$$\rightarrow\quad w-z+(x\vee y)+z-((x\vee y)\wedge z)\geq x\vee y$$

$$\rightarrow\quad w\geq(x\vee y)\wedge z$$

Hiermee is de formule bewezen.

6.3 Lemma.

(i) $|x+y|\leq|x|+|y|$ (driehoeksongelijkheid)

(ii) $||x|-|y||\leq|x-y|$

(iii) $|(x\vee z)-(y\vee z)|+|(x\wedge z)-(y\wedge z)|=|x-y|$

(iv) $|x^+-y^+|+|x^--y^-|=|x-y|$

(v) $(x+y)^+\leq x^+ + y^+$ ...

(vi) Aequivalent zijn: (a) $|z| \leq x$

(b) $\exists\, u_1,u_2$ in K zó, dat $z=u_1-u_2$, $x=u_1+u_2$

(c) $\exists\, u_1,u_2$ in K zó, dat $z=u_1-u_2$, $0\leq u_1\leq x$, $0\leq u_2\leq x$.

Bewijs: (i) is practisch triviaal, en (ii) volgt uit (i).

(iii): $|(x \vee z)-(y \vee z)|=((x \vee z) \vee (y \vee z))-((x \vee z) \wedge (y \vee z))$ (2.7(iv))

$$=((x \vee y) \vee z)-((x \wedge y) \vee z)$$

$$=((x \vee y) \vee z)-(x \wedge y)-z+((x \wedge y) \wedge z) \quad (2.7(iii))$$

Op soortgelijke wijze vindt men

$$|(x \wedge z)-(y \wedge z)|=(x \vee y)+z-((x \vee y) \vee z)-((x\wedge y) \wedge z).$$

Opgeteld,

$$|(x \vee z)-(y \vee z)|+|(x \wedge z)-(y \wedge z)|=(x \vee y)-(x \wedge y)=|x-y|.$$

(iv) is (iii) met $z=0$. En (v) is gemakkelijk te verifieren.

(vi) (a)→(b): $|z| \leq x \rightarrow (z^++z^- \leq x)$

$$\rightarrow \exists\, u \in K \text{ zo dat } x=z^++z^-+u$$

Stel nu $u_1:=z^++\frac{1}{2}u$, en $u_2:=z^-+\frac{1}{2}u$. Dan volgt (b).

(b)→(c) is triviaal.

(c)→(a): $(z=u_1-u_2$ met $0\leq u_1\leq x$, $0\leq u_2\leq x) \rightarrow$

$\rightarrow (z \leq u_1 \leq x$, en $-z \leq u_2 \leq x)$

$\rightarrow |z| \leq x$.

6.4 Lemma. Laat u,v,w elementen van K zijn. Dan geldt

(i) $(u+v) \wedge w \leq (u \wedge w)+(v \wedge w)$

(ii) $(u+v) \vee w \leq (u \vee w)+(v \vee w)$

(iii) $(u+v) \vee w \geq (u \vee w)+(v \vee w)-w$.

Bewijs: We bewijzen alleen (i).

$(u+v) \wedge w \geq u \wedge w$

$\rightarrow ((u+v) \wedge w)-(u \wedge w) \geq 0$

$\rightarrow ((u+v) \wedge w)-(u \wedge w)=|((u+v) \wedge w)-(u \wedge w)| \leq |(u+v)-u|$ (6.3(iii

$$=|v|=v.$$

Daar bovendien

$$((u+v) \wedge w)-(u \wedge w) \leq w,$$

volgt nu onmiddelijk het gestelde.

6.5 Stelling. Een Riesz-ruimte heeft de interpolatie-eigenschap:

Als $\{u_1,\dots,u_n\} \subset K$ en $\{v_1,\dots,v_m\} \subset K$, terwijl

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{j=1}^{m} v_j$$

dan zijn er elementen $w_{i,j}$ $(i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m)$ in K zo dat

$$u_i = \sum_{j=1}^{m} w_{i,j} \quad \text{en} \quad v_j = \sum_{i=1}^{n} w_{i,j} \qquad (i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m).$$

Bewijs (door inductie naar n en m): Als n=1 of m=1 is er niets te bewijzen.

(i) n=m=2. We hebben

$$u_1+u_2=v_1+v_2 .$$

Stel $w_{1,1}:=u_1 \wedge v_1$. Dan volgen hieruit

$$w_{1,2}=u_1-w_{1,1}$$

$$w_{2,1}=v_1-w_{1,1},$$

beide in K, en ook

$$w_{2,2}=u_2-w_{2,1}=u_2-v_1+w_{1,1}=v_2-u_1+w_{1,1}=v_2-w_{1,2}.$$

Rest dus nog slechts te bewijzen dat $w_{2,2}$ in K ligt. Welnu,

$$u_2-w_{2,1}=v_2-w_{1,2} \geq -w_{1,2}$$

$$\rightarrow \quad w_{2,1} \leq u_2+w_{1,2}$$

$$\rightarrow \quad w_{2,1}=(u_2+w_{1,2}) \wedge w_{2,1} \leq (u_2 \wedge w_{1,2})+(w_{1,2} \wedge w_{2,1}) \qquad (6.4(i)).$$

Maar

$$w_{1,2} \wedge w_{2,1}=(u_1-w_{1,1}) \wedge (v_1-w_{1,1})=(u_1 \wedge v_1)-w_{11}=w_{1,1}-w_{1,1}=0 .$$

Dus

$$w_{2,1}=u_2 \wedge w_{2,1}$$

$$\rightarrow \quad u_2 \geq w_{2,1}$$

$$\rightarrow \quad w_{2,2} \geq 0.$$

(ii) n=2, m $\geq$ 2 (inductie naar m). We hebben

$$u_1+u_2=v_1+\dots+v_{m-1}+v_m$$

Stel $v_1':=v_1+\dots+v_{m-1}$ en $v_2':=v_m$, en pas (i) toe. Er zijn $z_{i,j} \in K$ zo dat

$$u_1=z_{1,1}+z_{1,2} \qquad v_1+\dots+v_{m-1}=v_1'=z_{1,1}+z_{2,1}$$

$$u_2=z_{2,1}+z_{2,2} \qquad v_m \qquad =v_2'=z_{1,2}+z_{2,2}.$$

Volgens inductie-aanname zijn er $w_{i,j} \in K$ $(i=1,2;\ j=1,\dots,m-1)$ zó, dat

$$v_j = w_{1,j} + w_{2,j} \qquad (j=1,\dots,m-1)$$
$$z_{1,1} = \sum_{j=1}^{m-1} w_{1,j},\quad z_{2,1} = \sum_{j=1}^{m-1} w_{2,j}\ .$$

Definieer nu

$$w_{1,m} := z_{1,2},\quad w_{2,m} := z_{2,2}\ .$$

Dan is inderdaad

$$v_j = w_{1,j} + w_{2,j} \qquad (j=1,\dots,m),$$
$$u_i = \sum_{j=1}^{m} w_{i,j} \qquad (i=1,2)\ .$$

(iii) $n > 2,\ m \geq 2$ (inductie naar n). Analoog aan (ii).

6.6 Stelling. Een Riesz-ruimte heeft de decompositie-eigenschap:

$$[0,x] + [0,y] = [0,x+y]$$

Bewijs: Men ziet onmiddelijk in dat

$$[0,x] + [0,y] \subset [0,x+y].$$

Neem nu $z \in [0,x+y]$. Dan is er een $w \geq 0$ zo dat

$$z + w = x + y$$

Volgens 6.5 bestaan er dus $w_{i,j} \in K$ $(i=1,2,\ j=1,2)$ zo dat

$$z = w_{1,1} + w_{1,2}\ ,\quad x = w_{1,1} + w_{2,1}\ \text{(en dus } w_{1,1} \in [0,x])$$
$$w = w_{2,1} + w_{2,2}\ ,\quad y = w_{1,2} + w_{2,2}.\ \text{(en dus } w_{1,2} \in [0,y]).$$

Dus $w \in [0,x] + [0,y]$.

6.7 Opmerking. Voor de formulering van de interpolatie- en decompositie eigenschap is het niet nodig te veronderstellen dat $(S,\leq)$ een Riesz-ruimte is. Men kan dus spreken over o.v. met de interpol. eig.; volgens bovenstaand bewijs hebben deze vanzelf de decomp. eig.. Omgekeerd heeft iedere o,v. met decomp. eig. de interpol. eig., maar er zijn o.v. met de interpol. eig. die geen Riesz-ruimte zijn (zie [5] section 1.1.7).

Uit voorbeeld 3.5 bleek dat voor een deelruimte M van E, zelfs al is M (bij de relatieve ordening) een Riesz-ruimte, niet noodzakelijk behoeft te gelden dat $x \vee y$ (d.w.z. $x \vee_E y$) in M ligt voor elk tweetal x,y in M.

6.8 Definities. Zij $(E,\leq)$ (nog steeds) een Riesz-ruimte, en M een lineaire deelruimte van E.
lineaire deelruimte van E

(i) M heet een Riesz-deelruimte van E, als $x \vee y \in M$ voor elk tweetal x,y in M.

(ii) M heet een (orde-)ideaal als

$$(x \in M,\ |y| \leq |x|) \to y \in M.$$

(iii) M heet een band, als M een ideaal is, en voor iedere naar boven gerichte verzameling $B \subset M$, waarvoor sup B bestaat (in E), geldt $\sup B \in M$.

6.9 Eigenschap. Een ideaal M in E is een Riesz-deelruimte van E.

Bewijs: Neem x,y in M. Dan

$$x-y \in M$$
$$\to |x-y| \in M$$
$$\to x \vee y = \tfrac{1}{2}(x+y+|x-y|) \in M$$

6.10 Voorbeelden.

(i) Zij E de ruimte $B_r[0,2]$ (vgl 2.4), en

$$M:=\{f \in E \mid f(t)=0 \text{ voor alle } t \in [0,1]\}.$$

Dan is M een band in E.

(ii) Zij E de ruimte l_1; d.w.z. de verzameling der rijtjes $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ van reële getallen, waarvoor $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i| < \infty$, met termsgewijze optelling en scalar-vermenigvuldiging. Geef E de ordening met kegel

$$K:=\{x \in l_1 \mid x_i \geq 0 \ (i=1,2,\ldots)\}.$$

Dan is l_1 een Riesz-ruimte, waarin $(x \vee y)_i = x_i \vee y_i$ $(i=1,2,\ldots)$.

Definieer

$$M:=\{x \in l_1 \mid x_i=0, \text{ voor bijna alle } i\}.$$

M is een deelruimte, en als $x \in M$ en $|y| \leq |x|$ dan

$|y_i|=|y|_i \leq |x|_i=|x_i|=0$ voor bijna alle i.

Dus $y \in M$. D.w.z. M is een ideaal. Maar M is geen band, want:

Definieer voor elke k (k=1,2,...) een element x^k van l_1 door

$$x^k_i := 0 \text{ voor } i>k$$
$$= \frac{1}{i^2} \text{ voor } 1 \leq i \leq k.$$

Dan is $\{x^k \mid k=1,2,...\}=:B$ een naar boven gerichte deelverzameling van M met

$$\sup B = (1, \frac{1}{2^2}, ...) \in l_1 \setminus M.$$

6,10 Lemma. Zij $\{M_\nu \mid \nu \in I\}$ een collectie deelruimten van E, en stel

$$M := \cap\{M_\nu \mid \nu \in I\}.$$

(i) Als alle M_ν Riesz-deelruimten zijn, dan is M een Riesz-deelruimte van E.

(ii) Als alle M_ν idealen zijn, dan is M een ideaal.

(iii) Als alle M_ν banden zijn, dan is M een band.

Bewijs: Triviaal.

6.11 Opmerking. Zij $x \in E$. De doorsnede van alle Riesz-deelruimten (resp. idealen, resp. banden) die x bevatten, noemt men de Riesz-deelruimte (resp. het ideaal, resp. de band) voortgebracht door x.

(i) Zij $u \in K$. De Riesz-deelruimte (R_u) voortgebracht door u is de deelruimte voortgebracht door u; in formule,

$$R_u = Sp(u) := \{\alpha u \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Zoals een voorbeeld in $\mathbb{R}^2$ reeds aantoont, geldt dit niet voor willekeurige $u \in E$.

(ii) Zij $u \in K$. Het ideaal I_u voortgebracht door u is

$$I_u = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n.[-u,u].$$

Bewijs: Stel

$$F := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n.[-u,u].$$

Het is duidelijk dat $F \subset I_u$; rest te bewijzen dat F een ideaal is.

Welnu, als x,y in F liggen, dan geldt

$$\exists\ n_1,n_2 \text{ in } \mathbb{N} \text{ zó dat } x \in n_1.[-u,u],\ y \in n_2[-u,u]$$

$$\rightarrow\ \exists\ x_1,y_1 \text{ in } [-u,u] \text{ zo dat } x = n_1.x_1,\ y = n_2.x_2.$$

Kies $m \geq \max\{n_1,n_2\}$, en stel $x_2 := \frac{n_1}{m}x_1$, $y_2 := \frac{n_2}{m}y_1$. Dan is

$$x+y = m(x_2+y_2) = 2m\left(\frac{x_2+y_2}{2}\right)$$

$$\in 2m.[-u,u] \qquad \text{(volgens 1.7)}$$

$$\rightarrow\ x+y \in F.$$

Voorts is het onmiddelijk duidelijk dat

$$(x \in F,\ \alpha \in \mathbb{R})\ \rightarrow\ \alpha x \in F.$$

Dus F is een deelruimte van E. Tenslotte, indien

$$x \in F,\ |y| \leq |x|$$

dan geldt

$$\exists\ n \in \mathbb{N} \text{ zo dat } x \in n.[-u,u],\ |y| \leq |x|$$

$$\rightarrow\ |y| \leq |x| \leq n.u$$

$$\rightarrow\ y \in n.[-u,u] \subset F.$$

Dus F is een ideaal.

Zij X een compacte Hausdorff ruimte. De verzameling $C_r(X)$ is bij de gewone (puntsgewijze) operaties en ordening (vgl 3.5) een Riesz-ruimte en tevens een algebra. Behalve over (orde-)idealen kunnen we dus ook spreken over algebraische idealen (zie def. 4.2; de [illegible] 6.13 en 6.14 vormen een generalisatie van 4.4.1). We geven $C_r(X)$ de topologie der uniforme convergentie (zie [1], def 29). Als V een (gesloten) deelverzameling van X is, dan is klaarblijkelijk de verzameling

$$I_V := \{f \in C_r(X) \mid f(t)=0 \quad (t \in V)\}$$

een gesloten algebraisch ideaal in $C_r(X)$. Omgekeerd geldt:

6.13 <u>Lemma</u>. Als I een gesloten algebraisch ideaal in $C_r(X)$ is, dan is er een gesloten deelverzameling V van X zo dat $I = I_V$.

<u>Bewijs</u>: Stel

$$V := \{t \in X \mid f(t)=0 \quad (f \in I)\}.$$

V is gesloten, en $I \subset I_V$. Neem $f \in I_V$. Z.b.d.a.,

$$\|f\| := \max\{|f(t)| \mid t \in X\} = 1.$$

Kies ε zo dat $0<\varepsilon<1$, en definieer

$$W := \{t \in X \mid |f(t)| \geq \varepsilon\}$$

W is compact, niet leeg, en $W \cap V = \phi$. Voor iedere $t \in W$ bestaat een $f_t \in I$ zo, dat $|f_t(t)| > 1$; dus zo, dat

$$|f_t(u)| > 1 \text{ voor alle } u \text{ in een omgeving } U_t \text{ van } t.$$

Er bestaan nu $t_1,\ldots,t_n$ in W zo dat

$$W \subset U_{t_1} \cup \ldots \cup U_{t_n}.$$

Stel

$$g_\varepsilon := f_{t_1}{}^2 + \ldots + f_{t_n}{}^2.$$

Dan is $g_\varepsilon \in I$, $g_\varepsilon \geq 0$, en $g_\varepsilon(t) > 1$ voor alle $t \in W$. De functie

$$h_\varepsilon := fg_\varepsilon(\varepsilon+g_\varepsilon)^{-1}$$

ligt in I, daar I een algebraisch ideaal is, en eenvoudige berekening toont aan dat

$$|f(t)-h_\varepsilon(t)| = \left|\frac{\varepsilon f}{\varepsilon+g_\varepsilon}(t)\right| \leq \varepsilon \qquad (t \in X).$$

Omdat I gesloten is, volgt hieruit $f \in I$.

6.14 Stelling. Zij I een gesloten deelverzameling van $C_r(X)$. I is een algebraisch ideaal als en alleen als I een orde-ideaal is.

Bewijs:

(i) Zij I een alg. ideaal. Volgens 6.13 is er een gesloten $V \subset X$ zó dat $I = I_V$. Dus

$$\begin{aligned}(f \in I,\ |g| \leq |f|) &\rightarrow (f(t)=0 \text{ voor } t\in V,\ |g(t)| \leq |f(t)| \text{ voor } t\in X)\\ &\rightarrow g(t)=0 \text{ voor } t \in V\\ &\rightarrow g \in I_V = I.\end{aligned}$$

Dus I is een orde-ideaal.

(ii) Zij I een orde-ideaal. Neem $f \in C_r(X)$ en $g \in I$. Stel $\alpha := \|f\|$; dan is $\alpha g \in I$, en

$$|fg| = |f|\,|g| \leq \alpha\cdot|g| = |\alpha g|$$

Daaruit volgt $fg \in I$. Dus I is een alg. ideaal.

Zij (nog steeds) $(E,\leq)$ een Riesz-ruimte, en zij M een lineaire deelruimte van E. Voorts zij $\hat{E}:=E/M$ de bijbehorende quotientruimte (|1|, def.12). De elementen van $\hat{E}$ worden aangeduid met representanten, $\hat{x}:=x+M$. We definieren in $\hat{E}$ een relatie $\leq$ als volgt:

$$\hat{x} \leq \hat{y} \quad \rightarrow \quad y-x \in K+M. \tag{1}$$

De bijbehorende kegel $\{\hat{x} \mid \hat{x} \geq \hat{0}\}$ noteren we met $\hat{K}$. Dan is gemakkelijk na te gaan dat geldt:

(i) $\hat{K} + \hat{K} \subset \hat{K}$

(ii) $\alpha\hat{K} \subset \hat{K}$ $\quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0)$

Niet steeds geldt echter $\hat{K} \cap -\hat{K} = \{\hat{0}\}$, zodat $\leq$ niet automatisch een ordening in $\hat{E}$ definieert. (Tegenvoorbeeld: Neem $E:=C_r[0,1]$, en zij M de (Riesz-)deelruimte der constante functies. Als f gedefinieerd wordt door $f(t):=t$, dan is $\hat{0} \neq \hat{f} \in \hat{K} \cap -\hat{K}$.) We hebben echter:

6.15 <u>Stelling</u>. Als M een ideaal is in E, dan definieert (1) een ordening in E/M. Bij deze zgn. <u>kanonieke ordening</u> is E/M een Riesz-ruimte. Bovendien

$$\widehat{x \vee y} = \hat{x} \vee \hat{y} \quad , \quad \widehat{x \wedge y} = \hat{x} \wedge \hat{y}.$$

<u>Bewijs</u>: Om aan te tonen dat $\leq$ een ordening is, moeten we laten zien dat $\hat{K} \cap -\hat{K} = \{\hat{0}\}$. Welnu, zij $\hat{x} \in \hat{K} \cap -\hat{K}$. Dan geldt:

$\exists\, u_1,u_2$ in K en m_1,m_2 in M zo dat $x=u_1=m_1$, $-x=u_2+m_2$.

$\rightarrow$ $0=x+(-x)=(u_1+m_1)+(u_2+m_2)=u_1+u_2+(m_1+m_2)$

$\rightarrow$ $0 \leq u_1 \leq u_1+u_2 \in M$

$\rightarrow$ $u_1 \in M$ (want M is een ideaal)

$\rightarrow$ $\hat{x} = \hat{0}$.

Dat $(\hat{E},\leq)$ een Riesz-ruimte is, zullen we bewijzen door aan te tonen dat: $\widehat{x \vee 0} = \hat{x} \vee \hat{0}$, voor iedere $\hat{x} \in \hat{E}$ (vgl. 2.2). Het is duidelijk dat $\widehat{x \vee 0}$ een bovengrens van $\{\hat{x},\hat{0}\}$ is. Zij nu $\hat{z}$ een bovengrens van $\{\hat{x},\hat{0}\}$. Dan zijn er m_1 en m_2 in M zo, dat

$$z-x-m_1 \geq 0 \quad , \quad z-m_2 \geq 0.$$

Stel $m:=m_1 \wedge m_2$. Dan is

$$z-x-m=z-x-m_1+(m_1-m) \geq 0 \quad , \quad z-m=z-m_2+(m_2-m) \geq 0$$

en dus $z-m \geq x \vee 0$. Daaruit volgt

$$\hat{z} = \widehat{z-m} \geq \widehat{x \vee 0}.$$

Dus $\widehat{x \vee 0} = \hat{x} \vee \hat{0}$.

De overgebleven formules volgen uit de zojuist bewezen betrekking en de volgende stelling (waaruit blijkt dat de quotientafbeelding een Riesz-homomorfisme is).

6.16 Definitie. Laat $(E,\leq)$ en $(F,\leq)$ Riesz-ruimten zijn (Dat de ordeningen in E en F met hetzelfde symbool $\leq$ zijn aangegeven kan moeilijk verwarring wekken). Zij $J:E \longrightarrow F$ een lineaire afbeelding ([ ] def. 8). We noemen J een Riesz-homomorfisme, als

$$J(x \vee y)=Jx \vee Jy \quad , \quad J(x \wedge y)=Jx \wedge Jy$$

6.17 Stelling. Laat $(E,\leq)$ en $(F,\leq)$ Riesz-ruimten zijn, en $J:E \longrightarrow F$ een lineaire afbeelding. Aequivalent zijn de beweringen:

(i) J is een Riesz-homomorfisme,

(ii) $x \wedge y=0 \rightarrow Jx \wedge Jy=0$

(iii) $J(x^+)=(Jx)^+$

(iv) $J(x^-)=(Jx)^-$

(v) $J|x|=|Jx|$

(vi) $J(x \vee y)=Jx \vee Jy$

(vii) $J(x \wedge y)=Jx \wedge Jy$.

Bewijs: We bewijzen alleen (ii) → (iii). De overige relaties volgen onmiddelijk uit de lineariteit van J en de samenhang tussen de roosteroperaties (zie na lemma 2.7).

(ii) → (iii). Voor $x \in E$ geldt

$$(Jx)^+=(Jx) \vee 0=(J(x^+-x^-)) \vee 0=(J(x^+)-J(x^-)) \vee 0=J(x^+)-(J(x^-) \wedge J(x^+))$$

Maar volgens 2.5.(vii) is $x^+ \wedge x^-=0$, en dus $J(x^+) \wedge J(x^-)=0$. Daaruit volgt $(Jx)^+=J(x^+)$.

6.18 <u>Definitie.</u> Een Riesz-ruimte $(E,\leq)$ heet <u>Archimedisch geordend</u> (afgekort, <u>A.o.</u>) als, voor iedere $y \in E$,

$$(\alpha x \leq y \text{ voor alle } \alpha > 0) \rightarrow x \leq 0$$

6.19 <u>Lemma.</u> $(E,\leq)$ is A.o. als en alleen als voor iedere $u \in K$ geldt

$$\inf \{ \tfrac{1}{n} u \mid n=1,2,\ldots \} = 0.$$

<u>Bewijs:</u>

(i) Zij $(E,\leq)$ A.o.. Klaarblijkelijk is 0 een ondergrens van

$$U := \{ \tfrac{1}{n} u \mid n=1,2,\ldots \}.$$

Zij x een ondergrens van U. Kies een $\alpha > 0$, en bepaal $n_0 \in \mathbb{N}$ zó dat $n_0 > \alpha$. Dan is

$$\alpha x \leq \frac{\alpha}{n_0} u \leq n_0 \frac{\alpha}{\alpha} \frac{1}{n_0} u = u.$$

Daar α willekeurig is ,volgt hieruit $x \leq 0$.

(ii) Omgekeerd,

$$\alpha x \leq y \quad (\alpha > 0)$$
$$\rightarrow \alpha x^+ \leq y^+ \quad (\alpha > 0)$$
$$\rightarrow nx^+ \leq y^+ \quad (n \in \mathbb{N})$$
$$\rightarrow x^+ \leq \inf \{ \tfrac{1}{n} y^+ \mid n \in \mathbb{N} \} = 0$$
$$\rightarrow x \leq 0.$$

6.20 <u>Voorbeelden.</u> $\mathbb{R}$ (met de gewone ordening) is A.o.. Daar het product van A.o. Riesz-ruimten (met de product-ordening), en een Riesz-deelruimte van een A.o. Riesz-ruimte (met de relatieve ordening) weer A.o. zijn, volgt nu onmiddelijk: $\mathbb{R}^n$ met coordinaatsgewijze ordening, $C_r(X)$, l_1 zijn A.o.. Daarentegen is $\mathbb{R}^n$ met lexicografische ordening niet A.o. ($n \geq 2$). (Want: $\frac{1}{m}(1,\ldots,1) \geq (0,1,\ldots,1) \neq (0,\ldots,0)$, voor alle $m \in \mathbb{N}$.)

6.21 <u>Definities.</u> Een Riesz-ruimte $(E,\leq)$ heet <u>orde-volledig</u> (afgekort <u>o.c.</u>) als iedere niet-lege naar boven begrensde deelverzameling van E een supremum heeft.

$(E,\leq)$ heet <u>σ-orde-volledig</u> (afgekort, <u>σ-o.c.</u>), als iedere niet-lege aftelbare naar boven begrensde deelverzameling van E een supremum heeft.

Indien $\phi \neq B \subset E$, en

$$\tilde{B} := \{\sup A \mid \phi \neq A \subset B, A \text{ eindig}\},$$

dan is $\tilde{B}$ een naar boven gerichte deelverzameling van E, en $B \subset \tilde{B}$. Voorts bestaat $\sup \tilde{B}$ als en alleen als $\sup B$ bestaat, en dan zijn beide gelijk. Het volgende lemma is daarom evident.

6.21 Lemma. De volgende beweringen zijn aequivalent:

(i) $(E,\leq)$ is o.c..

(ii) Voor iedere niet lege naar boven gerichte, naar boven begrensde deelverzameling van E bestaat het supremum.

(iii) Voor iedere niet lege, (naar beneden gerichte) naar beneden begrensde deelverzameling van E bestaat het infimum.

6.22 Stelling. Een σ-o.c. Riesz-ruimte $(E,\leq)$ is A.o..

Bewijs. Zij $u \in K$. De verzameling

$$U := \{ \tfrac{1}{n} u \mid n \in \mathbb{N} \}$$

is naar beneden begrensd; dus bestaat $x := \inf U$, en

$$\tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}.\inf U = \inf(\tfrac{1}{2}U) \quad \text{(volgens 2.8(ii))}$$
$$= \inf U = x$$

Dus $x = 0$.

6.23 Voorbeelden.

(i) $\mathbb{R}^n$, coordinaatsgewijs geordend, is o.c.

(ii) $\mathbb{R}^n$, lexicographisch geordend, is niet σ-o.c. $(n \geq 2)$.

(iii) $B_r(X)$ (X willekeurige verz.) is o.c..

(iv) $C_r[0,1]$ is niet σ-o.c..

(Voor een σ-o.c., niet o.c., Riesz-ruimte, zie [6] Problem 3N, gecombineerd met 4N)

Par 7 Positieve lineaire afbeeldingen

Laat $(E_1,\leq)$ en $(E_2,\leq)$ o.v. zijn. De verzameling $L(E_1,E_2)$ der lineaire afbeeldingen $T:E_1 \longrightarrow E_2$ is een lineaire ruimte onder puntsgewijze optelling en scalar-vermenigvulding.

7.1 <u>Definitie</u>. Zij $T \in L(E_1,E_2)$. T heet een <u>positieve lineaire afbeelding</u> (Notatie: $T \geq 0$), als

$$(x \in E_1,\ x \geq 0) \rightarrow Tx \geq 0.$$

We schrijven

$$K(E_1,E_2) := \{\ T \in L(E_1,E_2)\ |\ T \geq 0\}.$$

7.2 <u>Eigenschappen</u>.

(i) $K(E_1,E_2) + K(E_1,E_2) \subset K(E_1,E_2)$

(ii) $\alpha K(E_1,E_2) \subset K(E_1,E_2) \quad (\alpha \geq 0)$

(iii) Indien de kegel K_1 van E_1 de ruimte E_1 voortbrengt (i.e. $E_1 = K_1 - K_1$), dan bovendien

$$K(E_1,E_2) \cap -K(E_1,E_2) = \{0\}$$

Indien voldaan is aan (iii) dan is $(L(E_1,E_2),\leq)$ dus een o.v.. Dit is zeker het geval als E_1 een Riesz-ruimte is.

<u>Bewijs</u>: We bewijzen alleen (iii). De rest is triviaal.

(iii): Zij $E_1 = K_1 - K_1$. Neem $T \in K(E_1,E_2) \cap -K(E_1,E_2)$. Dan

$$T \geq 0\ ,\ -T \geq 0$$

$$\rightarrow Tu \geq 0\ ,\ -Tu \geq 0 \quad (u \in K_1)$$

$$\rightarrow Tu = 0 \quad (u \in K_1)$$

Neem nu $x \in E_1$. Dan is $x = u_1 - u_2$ met u_1 en u_2 in K_1; dus

$$Tx = Tu_1 - Tu_2 = 0 - 0 = 0,$$

d.w.z. $T = 0$.

7.3 <u>Definitie</u>. Zij $T \in L(E_1,E_2)$. T heet <u>orde-begrensd</u> (afgekort, <u>o.b.</u>) als voor iedere orde-begrensde verzameling $A \subset E_1$, $T[A]$ een orde-begrensde deelverzameling van E_2 is. De verzameling der o.b. lineaire afbeeldingen duiden we aan met $L^b(E_1,E_2)$.

De volgende eigenschappen zijn gemakkelijk te verifieren:

7.4 Eigenschappen,

(i) T is o.b., als het beeld onder T van ieder orde-interval een orde-begrensde verzameling is.

(ii) Als $T \geq 0$, dan is T o.b..

(iii) $L^b(E_1,E_2)$ is een lineaire deelruimte van $L(E_1,E_2)$.

(iv) Als $E_1=K_1-K_1$, dan is $L^b(E_1,E_2)$ een o.v. met kegel $K(E_1,E_2)$.

7.5 Stelling. Laat $(E_1,\leq)$ en $(E_2,\leq)$ Riesz-ruimten zijn, waarbij $(E_2,\leq)$ o.c.. Dan is $L^b(E_1,E_2)$ ook een Riesz-ruimte. Bovendien geldt voor T, T_1, T_2 in $L^b(E_1,E_2)$:

(i) $T^+x = \sup\{Ty \mid 0 \leq y \leq x\}$ $(x \geq 0)$

(ii) $(T_1 \vee T_2)x = \sup\{T_1x_1+T_2x_2 \mid x_1, x_2 \text{ in } K_1,\ x=x_1+x_2\}$ $(x \geq 0)$

(iii) $(T_1 \wedge T_2)x = \inf\{T_1x_1+T_2x_2 \mid x_1,x_2 \text{ in } K_1,\ x=x_1+x_2\}$ $(x \geq 0)$

(iv) $|T|x = \sup\{T(x_1-x_2) \mid x_1, x_2 \text{ in } K_1,\ x=x_1+x_2\}$ $(x \geq 0)$

(v) $|T|x = \sup\{Tz \mid |z| \leq x\}$ $(x \geq 0)$

(vi) $|Tx| \leq |T|(|x|)$.

Bewijs: Bij het bewijs maken we gebruik van het volgende lemma:

7.6 Lemma. Laat $(E_1\leq)$ en $(E_2,\leq)$ o.v. zijn, terwijl $E_1=K_1-K_1$. Zij L: $K_1 \longrightarrow E_2$ een afbeelding waarvoor geldt

(i) $L(x_1+x_2) = Lx_1 + Lx_2$ $(x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0)$

(ii) $L(\alpha x) = \alpha Lx$ $(x \geq 0,\ \alpha \geq 0)$.

Dan is er juist één $S \in L^{\sim}(E_1,E_2)$ zo dat $S|_{K_1} = L$ (d.w.z. $Sx=Lx$ voor $x \in K_1$).

Bewijs: Neem $y \in E_1$. Dan is $y=x_1-x_2$ met x_1,x_2 in K_1. Definieer

$$Sy := Lx_1 - Lx_2.$$

Ondubbelzinnigheid: Als $y=x_1'-x_2'$ met x_1',x_2' in K_1, dan

$$x_1+x_2' = x_1'+x_2$$

$$\Rightarrow Lx_1+Lx_2' = L(x_1+x_2') = L(x_1'+x_2) = Lx_1' + Lx_2$$

$$\Rightarrow Lx_1 - Lx_2 = Lx_1' - Lx_2'.$$

Additiviteit: Zij $x=u_1-u_2$ en $y=v_1-v_2$ met u_1,u_2,v_1,v_2 in K_1. Dan

$$S(x+y) = S(u_1-u_2+v_1-v_2) = S((u_1+v_1)-(u_2+v_2)) =$$
$$= L(u_1+v_1)-L(u_2+v_2) = Lu_1 + Lv_1 - Lu_2 - Lv_2 =$$
$$= Sx + Sy$$

De homogeniteit bewijst met analoog; de uniciteit is triviaal.

Bewijs van stelling 7.6:

Neem $T \varepsilon L^b(E_1,E_2)$. We zullen aantonen dat $T \vee 0$ bestaat en dat (i) geldt. Voor $x \varepsilon K_1$ definieren we

$$Lx := \sup \{Ty \mid 0 \leq y \leq x\} = \sup T[0,x]$$

Dit is mogelijk, daar T o.b., en E_2 o.c. is. Dan geldt

$$L(x_1+x_2) = \sup T[0,x_1+x_2]$$
$$= \sup T[\ [0,x_1]+[0,x_2]\ ] \quad \text{(volgens 6.6)}$$
$$= \sup(T[0,x_1] + T[0,x_2])$$
$$= \sup T[0,x_1] + \sup T[0,x_2] \quad \text{(volgens 2.8(i))}$$
$$= Lx_1 + Lx_2 \quad (x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0).$$

Zoöok:

$$L(\alpha x) = \alpha Lx. \quad (\alpha \geq 0,\ x \geq 0).$$

Dus $L:K_1 \longrightarrow E_2$ voldoet aan de eisen van lemma 7.6. Er bestaat dus een $S \varepsilon L(E_1,E_2)$ zo dat $S|_{K_1} = L$. Voor $x \geq o$ is

$$Sx = Lx = \sup T[0,x] \geq Tx \quad , \quad Sx \geq 0$$

Dus $S \varepsilon L^b(E_1,E_2)$ (wegens 7.4(ii)), en S is een bovengrens in $L^b(E_1,E_2)$ van $\{T,0\}$. Tenslotte, als S_1 eveneens zo'n bovengrens is, dan geldt voor $x \geq 0$,

$$Sx = Lx = \sup T[0,x] \leq \sup S_1[0,x] = S_1x.$$

Dus $S \leq S_1$. Derhalve bestaat $T \vee 0 = S$ (waaruit volgt dat $L^b(E_1,E_2)$ een Riesz-ruimte is), en formule (i) geldt.

(ii). Daar $T_1 \vee T_2 = ((T_1-T_2) \vee 0)+T_2$, is voor $x \geq 0$:

$$(T_1 \vee T_2)x = ((T_1-T_2) \vee 0)x+T_2x = \sup (T_1-T_2)[0,x] + T_2x$$
$$= \sup \{(T_1-T_2)y+T_2x \mid 0 \leq y \leq x\} \quad (2.8(i))$$
$$= \sup \{T_1y-T_2(x-y) \mid 0 \leq y \leq x\}$$
$$= \sup \{T_1x_1+T_2x_2 \mid x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x=x_1+x_2\}$$

(iii) en (iv) volgen uit (ii).

(v) volgt uit (iv) met behulp van 6.3.(vi).

(vi) volgt uit (v).

7.7 <u>Stelling</u>. Laat voldaan zijn aan de voorwaarden van stelling 7.5. Dan is de Riesz-ruimte $L^b(E_1,E_2)$ o.c., en voor iedere niet-lege naar boven gerichte, naar boven begrensde deelverzameling B van $L^b(E_1,E_2)$ geldt

$$(\sup B)x = \sup \{Tx \mid T \in B\} \qquad (x \geq 0)$$

<u>Bewijs</u>: Zij $B \subset L^b(E_1,E_2)$ een verzameling met de genoemde eigenschappen, en zij S_0 een bovengrens van B ($S_0 \in L^b(E_1,E_2)$). Voor iedere $x \in K_1$ is $\{Tx \mid T \in B\}$ naar boven begrensd door S_0x. Dus, daar E_2 o.c. is, bestaat

$$Lx := \sup \{Tx \mid T \in B\}. \qquad (x \geq 0).$$

Merk op dat voor elk tweetal T_1,T_2 in B een $T \in B$ bestaat zó dat $T \geq T_1$, $T \geq T_2$. Dus

$$T_1x_1 + T_2x_2 \leq Tx_1 + Tx_2 = T(x_1+x_2) \qquad (x_1,x_2 \text{ in } K_1)$$

Daaruit volgt (met behulp van 2.8.(i))

$$\begin{aligned} Lx_1 + Lx_2 &= \sup \{T_1x_1 \mid T_1 \in B\} + \sup \{T_2x_2 \mid T_2 \in B\} \\ &= \sup \{T_1x_1+T_2x_2 \mid T_1,T_2 \text{ in } B\} \\ &\leq \sup \{T(x_1+x_2) \mid T \in B\} = L(x_1+x_2) \qquad (x_1,x_2 \text{ in } K_1). \end{aligned}$$

Daar de tegengestelde ongelijkheid (trivialerwijze) ook geldt is dus

$$Lx_1 + Lx_2 = L(x_1+x_2). \qquad (x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0).$$

Voorts is onmiddelijk in te zien dat

$$L(\alpha x) = \alpha Lx \qquad (\alpha \geq 0,\ x \geq 0).$$

We hebben dus een functie $L : K_1 \longrightarrow E_2$ die voldoet aan de eisen van lemma 7.6. Derhalve is er een unieke $S \in L(E_1,E_2)$ met $S|_{K_1} = L$. Uit de ongelijkheden

$$T \leq S \leq S_0 \qquad (T \in B)$$

volgt nu dat S o.b. is, en dat $S = \sup \{T \mid T \in B\}$.

In de rest van deze paragraaf is $(E,\leq)$ een Riesz-ruimte met kegel K. Daar $(\mathbb{R},\leq)$ een o.c. Riesz-ruimte is ,kunnen we hwt voorafgaande toepassen op de ruimte $L(E,\mathbb{R})$ der lineaire functionalen op E. We gebruiken de notaties:

$$E^* := L(E,\mathbb{R})$$

$$E^b := L^b(E,\mathbb{R})$$

$$K^* := K(E,\mathbb{R}) = \{f \in E \mid f(x) \geq 0 \quad (x \geq 0)\}.$$

Twee elementen x en y in E noemen we disjunct, als $|x| \wedge |y| = 0$ (Notatie: $x \perp y$). Uit 2.5(vii) volgt dat $x^+ \perp x^-$, voor iedere $x \in E$.

7.8 Lemma. Zij $u \in K$ en $\varphi \in K^*$ (dus $\varphi \in E^b$). Dan is er een $\varphi_u \in E^b$ met de eigenschappen:

(i) $0 \leq \varphi_u \leq \varphi$

(ii) $\varphi_u(x) = \varphi(x)$, voor alle $x \in I_u$ (zie 6.12 (ii))

(iii) $\varphi_u(x) = 0$, voor alle x met $x \perp u$.

Bewijs: Definieer

$$1_u(x) := \sup \{\varphi(z) \mid 0 \leq z \leq x \ , \ z \in I_u\} = \sup \varphi[I_u \cap [0,x]] \quad (x \in K).$$

We weten dat voor het ideaal I_u, voortgebracht door u, geldt

$$I_u = \cup \{n[-u,u] \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Hieruit en uit de ideaal-definitie volgt gemakkelijk

$$I_u \cap [0,x_1+x_2] = I_u \cap [0,x_1] + I_u \cap [0,x_2]. \quad (x_1,x_2 \text{ in } K).$$

Daaruit volgt

$$1_u(x_1+x_2) = 1_u(x_1) + 1_u(x_2) \quad (x_1,x_2 \text{ in } K),$$

terwijl bovendien

$$1_u(\alpha x) = \alpha 1_u(x) \quad (\alpha \geq 0,\ x \geq 0).$$

We kunnen dus lemma 6.7 toepassen op de functie $1_u : K \longrightarrow \mathbb{R}$ en vinden een lineaire functionaal φ_u op E waarvoor $\varphi_u|_K = 1_u$. Daaruit volgt onmiddelijk (i) (en dus ook $\varphi_u \in E^b$).

(ii). Als $x \in I_u$, dan ook $x^+ \in I_u$ en $x^- \in I_u$. Dus

$$\varphi_u(x^+) = \sup \varphi[I_u \cap [0,x^+]\,] = \sup \varphi[0,x^+] = \varphi(x^+)$$

Op dezelfde wijze, $\varphi_u(x^-)=\varphi(x^-)$; en dus $\varphi_u(x)=\varphi(x)$.

(iii). Neem aan $x \perp u$. Dan ook $x^+ \perp u$, en $x^- \perp u$. Nu is

$$z \in I_u \cap [0,x^+] \leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ zo dat } z \in n[-u,u] \cap [0,x^+]$$
$$\leftrightarrow (0 \leq z \leq n.u\ ,\ 0 \leq z \leq x^+)$$
$$\leftrightarrow 0 \leq z \leq x^+ \wedge n.u$$

Daar $x^+ \wedge n.u \leq n(x^+ \wedge u) = 0$, volgt dus dat

$$\varphi_u(x^+) = \sup \varphi[I_u \cap [0,x^+]\ ] = \sup \varphi\{0\} = 0.$$

Op dezelfde wijze vindt men $\varphi_u(x^-)=0$; en dus $\varphi_u(x) = 0$.

7.9 Stelling. Zij $(E,\leq)$ een Riesz-ruimte. Dan is E^b (met de kegel K^*) een o.c. Riesz-ruimte. Als $f \in E^b$, en $x \in K$, dan geldt

(i) $f^+(x) = \sup \{f(z) \mid 0 \leq z \leq x\}$

(ii) $f^-(x) = \sup \{-f(z) \mid 0 \leq z \leq x\}$

(iii) $|f|(x) = \sup \{f(z) \mid |z| \leq x\}$

Als $x \in E$, en $\varphi \in K^*$, dan geldt

(iv) $\varphi(x^+) = \max \{\psi(x) \mid 0 \leq \psi \leq \varphi\}$

(v) $\varphi(x^-) = \max \{-\psi(x) \mid 0 \leq \psi \leq \varphi\}$

(vi) $\varphi(|x|) = \max \{\psi(x) \mid |\psi| \leq \varphi\}$

Bewijs: We behoeven nog slechts (iv), (v), (vi) te bewijzen.

(iv) Als $0 \leq \psi \leq \varphi$, en $x \in E$, dan is

$$\psi(x) \leq \psi(x^+) \leq \varphi(x^+).$$

Dus is $\varphi(x^+)$ een bovengrens van $\{\psi(x) \mid 0 \leq \psi \leq \varphi\}$. Uit lemma 7.8 volgt de existentie van een φ_{x^+}, waarvoor o.m. geldt:

$$0 \leq \varphi_{x^+} \leq \varphi\ ,\quad \varphi_{x^+}(x^+)=\varphi(x^+)\ ,\quad \varphi_{x^+}(x^-)=0$$

Daaruit volgt

$$\varphi_{x^+}(x) \in \{\psi(x) \mid 0 \leq \psi \leq \varphi\}\ ,\quad \varphi_{x^+}(x)=\varphi_{x^+}(x^+)=\varphi(x^+).$$

Dus

$$\varphi(x^+) = \max \{\psi(x) \mid 0 \leq \psi \leq \varphi\}.$$

(v) volgt onmiddelijk uit (iv).

(vi): $\varphi(|x|)=\varphi(x^+)+\varphi(x^-) = \max\{\psi(x) \mid 0 \leq \psi \leq \varphi\} + \max\{-\chi(x) \mid 0 \leq \chi \leq \varphi\}$

$$= \max \{\psi(x) - \chi(x) \mid 0 \leq \psi \leq \varphi,\ 0 \leq \chi \leq \varphi\}$$
$$= \max \{\tau(x) \mid |\tau| \leq \varphi\} \quad \text{(volgens 6.3.(vi))}.$$

Daar $(E^b,\leq)$ een Riesz-ruimte is, is ook $E^{bb}:=(E^b)^b$ met de gebruikelijke ordening een Riesz-ruimte. Voor iedere $x \in E$, is de functie $Jx:E^b \longrightarrow \mathbb{R}$, gedefinieerd door

$$(Jx)(f) := f(x) \quad (f \in E^b),$$

een element van $L(E^b,\mathbb{R})$. Bovendien is

$$Jx = J(x^+)-J(x^-) \in K^{b*}-K^{b*} = E^{bb}$$

(hierin is K^{b*} de kegel van $E^{b*}:=L(E^b,\mathbb{R})$, en dus van E^{bb}). Zo wordt dus een, kennelijk lineaire, afbeelding $J:E \longrightarrow E^{bb}$ gedefinieerd. Voor iedere $x \in E$, en iedere $f \in K^*$, geldt

$$\begin{aligned} |Jx|(f) &= \sup\{(Jx)(g) \mid |g| \leq f\} \quad \text{(volgens 7.9(iii))} \\ &= \sup\{g(x) \mid |g| \leq f\} \\ &= f(|x|) \quad \text{(volgens 7.9(vi))} \\ &= (J|x|)(f). \end{aligned}$$

Daar $K^*-K^* = E^b$, volgt hieruit dat

$$|Jx| = J|x|,$$

d.w.z. J is een Riesz-homomorfisme.

In het algemeen is J echter géén 1-1 afbeelding (neem, bijvoorbeeld, maar het geval dat E niet Λ.o. is!). Voor condities, waaronder J wel 1-1, dus een Riesz-isomorfisme, is, zie |7|, Th. 23.15.

Hoofdstuk IV Genormeerde ruimten

In dit hoofdstuk zal, als regel zonder verwijzingen, worden gebruik gemaakt van de beginselen van de theorie der genormeerde ruimten; men zie daarvoor het collegedictaat Functionaal-analyse [1], in het bizonder de paragrafen III.2, III.3, III.8. Als gebruik wordt gemaakt van resultaten, die niet in deze paragrafen te vinden zijn, zal in de text daarnaar nader worden verwezen.

Par. 8 Genormeerde Riesz-ruimten

8.1 Definitie. Zij $(E,\leq)$ een Riesz-ruimte, en laat in E een norm $\|..\|$ gedefinieerd zijn zo dat $(E,\|..\|)$ een genormeerde ruimte is, terwijl bovendien voor x,y in E geldt

$$|x| \leq |y| \quad \rightarrow \quad \|x\| \leq \|y\|$$

Dan noemen we $(E,\leq,\|..\|)$ een genormeerde Riesz-ruimte. Indien $(E,\|..\|)$ bovendien een Banach-ruimte is, dan heet $(E,\leq,\|..\|)$ een Banach-rooster.

8.2 Lemma. De rooster-operaties in een genormeerde Riesz-ruimte zijn continu.

Bewijs: Voor de operatie $|..|:E \rightarrow E$ volgt de continuiteit onmiddelijk uit 6.3(ii) en definitie 8.1. Daar in een genormeerde ruimte de vector-operaties continu zijn, volgt de continuiteit van de overige roosteroperaties nu uit de bekende samenhang tussen de rooster-operaties (zie ná lemma 2.7).

8.3 Voorbeelden

(i) $\mathbb{R}^n$ met coordinaatsgewijze ordening en de norm $\|x\|:=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}$ is een Banach-rooster.

(ii) $C_r(X)$ (X compact Hausdorff, gewone ordening), voorzien van norm $\|f\|:=\sup\{|f(t)| \mid t \in X\}$, is een Banach-rooster.

(iii) l_p $(1\leq p<\infty)$ (zie [1] blz. 95) met de relatieve productordening van $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, en de norm $\|x\|_p:=(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p)^{1/p}$ is een Banachrooster.

Hetzelfde geldt voor l_∞ met de norm $\|x\|_\infty := \sup\{|x_i| \mid i \in \mathbb{N}\}$.

(iv) Op $\mathbb{R}^n$ ($n>1$) met de lexicografische ordening is geen norm te definieren zo dat een genormeerde Riesz-ruimte ontstaat. Dit volgt uit de volgende stelling.

8.4 Stelling. Een genormeerde Riesz-ruimte $(E,\leq,\|..\|)$ is Archimedisch geordend.

Bewijs: Neem $u \in K$, en zij $w \in K$ een ondergrens van $\{\frac{1}{n}u \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dan is

$$\begin{aligned} & 0 \leq w \leq \tfrac{1}{n}u \quad (n \in \mathbb{N}) \\ \rightarrow\quad & \|w\| \leq \tfrac{1}{n}.\|u\| \quad (n \in \mathbb{N}) \\ \rightarrow\quad & \|w\| = 0 \\ \rightarrow\quad & w = 0 \end{aligned}$$

Dus $\inf\{\frac{1}{n}u \mid n \in \mathbb{N}\} = 0$, d.w.z. $(E,\leq)$ is A.o..

Als $(E,\|..\|)$ en $(F,\|..\|)$ genormeerde ruimten beide (over $\mathbb{R}$ of over $\mathbb{C}$) dan duiden we de verzameling der continue (=begrensde) lineaire afbeeldingen $T:E \longrightarrow F$ aan met $L^c(E,F)$ (zulks in afwijking van [1]). Onder puntsgewijze optelling en scalar-vermenigvuldiging is $L^c(E,F)$ een vectorruimte over hetzelfde scalairenlichaam als E en F. Voorzien van de norm

$$\begin{aligned} \|T\| &:= \inf\{\mu \mid \mu\geq 0,\ \|Tx\| \leq \mu.\|x\| \quad (x \in E)\} \\ &= \sup\{\|Tx\| \mid x \in E,\ \|x\|=1\} \end{aligned}$$

is $L^c(E,F)$ een genormeerde ruimte; als F een Banach-ruimte is, dan is ook $L^c(E,F)$ een Banach-ruimte. In het byzonder, als E een reële genormeerde ruimte is, dan is de ruimte $L^c(E,\mathbb{R})$ der continue lineaire functionalen een (reële) Banach-ruimte; deze wordt aangegeven met E'.

We onderzoeken het verband tussen E^b en E'.

8.5 <u>Stelling</u>. Zij $(E, \leq, \|..\|)$ een genormeerde Riesz-ruimte. Dan is E' een ideaal in E^b.

<u>Bewijs:</u>

(i) Zij $f \in E'$. Voldoende opdat f o.b. zij, is dat $f[[-y,y]]$ begrensd is voor elke $y \in K$ (ga na). Zij dus $x \in [-y,y]$; dan geldt

$$|f(x)| \leq \|f\|.\|x\| \leq \|f\|.\|y\|.$$

d.w.z. $f(x) \in [-\|f\|.\|y\|, \|f\|.\|y\|]$. Dus $f \in E^b$.

E' is derhalve een deelverzameling (en dus een lineaire deelruimte) van E^b.

(ii) Zij $f \in E'$, $g \in E^b$, en $|g| \leq |f|$. Dan geldt voor $x \in E$,

$$|g(x)| \leq |g|(|x|) \leq |f|(|x|) \quad (7.5(vi))$$
$$= \sup\{f(z) \mid |z| \leq |x|\} \quad (7.9(iii)).$$

Merk op dat, voor $|z| \leq |x|$,

$$f(z) \leq \|f\|.\|z\| \leq \|f\|.\|x\|,$$

en dus $|g(x)| \leq \|f\|.\|x\|$. Daaruit volgt dat $g \in E'$, met $\|g\| \leq \|f\|$.

E' is dus een ideaal in E^b (en zelfs een Banach-rooster).

8.6 <u>Opmerking</u>. E' is in het algemeen geen band in E^b. Dit blijkt uit het volgende tegenvoorbeeld:

$$E := \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid x_i = 0 \text{ voor bijna alle } i\}$$
$$\|x\| := \max\{|x_i| \mid i \in \mathbb{N}\}$$

Voorzien van de gewone (relatieve product-) ordening is dit een genormeerde Riesz-ruimte. Definieer de functionalen f en f_k door

$$f(x) := \sum_{i=1}^{\infty} i.x_i \quad , \quad f_k(x) := \sum_{i=1}^{k} i.x_i \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Dan is $f \in K^* \subset E^b$, maar $f \notin E'$ (want: der rij $\{e^j\}_{j=1}^{\infty}$ in E, gedefinieerd door $(e^j)_i := \delta_{i,j}.\frac{1}{j}$, convergeert naar 0, terwijl $f(e^j)=1$).

Voorts $f_k \in K$, en ook $f_k \in E'$ voor elke k (want: $|f_k(x)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} i.\|x\|$ voor $x \in E$). Tenslotte ziet men gemakkelijk in dat de verzameling $\{f_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ naar boven gericht is, en dat $f = \sup\{f_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Dus E' is geen band.

8.7 <u>Stelling</u>. Als $(E,\leq,\|..\|)$ een genormeerde Riesz-ruimte is, dan is E' een orde-volledige Banach-rooster.

<u>Bewijs</u>: In het bewijs van 8.5 merkten we reeds op dat E' een Banach-rooster is.

Zij $B \subset E'$ niet-leeg, naar boven gericht, met bovengrens $g \in E'$. Stelt men, bij gekozen $f_0 \in B$,

$$B_1 := \{f \in B \mid f \geq f_0\} \quad , \quad B_2 := |f_0| + B_1 \ ,$$

dan is $B_2 \subset K^* \cap E'$, en sup B_2 bestaat (in E') juist dan als sup B (in E') bestaat (e.w., $\sup B = \sup B_2 - |f_0|$). M.a.w., we mogen veronderstellen dat B voldoet aan

$$0 \leq f \leq g \quad (f \in B) \quad , g \in E'.$$

Daar E^b o.c. is, bestaat $h := \sup B$ in E^b, en daarvoor geldt:

$$|h(x)| \leq |h|(|x|) = h(|x|) \leq g(|x|)$$
$$= |g(|x|)| \leq \|g\|.\||x|\| = \|g\|.\|x\| \quad (x \in E).$$

Hieruit volgt dat h in E' ligt, en dus is h het supremum van B in E'. Dus E' is o.c..

8.8 <u>Stelling</u>. Als $(E,\leq,\|..\|)$ een Banach-rooster is, dan is $E' = E^b$.

<u>Bewijs</u>: Daar $E^b = K^* - K^*$, is het voldoende aan te tonen dat $K^* \subset E'$. Neem dus $\varphi \in K^*$, en veronderstel dat φ niet begrensd is. D.w.z.:

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, x_n \in E \text{ zo dat } \|x_n\|=1 \text{ en } |\varphi(x_n)| > 2^{n+1}.$$

Stel nu $y_n := |2^{-n}.x_n|$. Dan geldt

$$y_n \geq 0, \quad \|y_n\| \leq 2^{-n}, \quad |\varphi(y_n)| > 2.$$

Definieer voorts, voor elke $k \in \mathbb{N}$, $s_k := \sum_{n=1}^{k} y_n$. Dan is

$$\|s_k - s_l\| = \|\sum_{n=k+1}^{l} y_n\| \leq \sum_{n=k+1}^{l} 2^{-n}.$$

Derhalve is $\{s_k\}$ een Cauchy-rij, en dus bestaat $s := \lim \{s_k\}$. Gebruikmakend van 8.2 ziet men gemakkelijk dat $s \geq s_k$, voor alle k, en dus

$$\varphi(s) \geq \varphi(s_k) = \sum_{n=1}^{k} \varphi(y_k) > 2k \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Dit is een contradictie.

Par 9. De stelling van Stone-Weierstrasz

Zij X een compacte Hausdorff-ruimte. Zoals we reeds opmerkten (8.3.(ii)) is $C_r(X)$, met de gebruikelijke vector-operaties, ordening en (sup.-)norm, een Banach-rooster. Bovendien is $C_r(X)$ een algebra, waarin geldt $\|f.g\| \leq \|f\|.\|g\|$ (d.w.z. het is een Banach-algebra). Een lineaire deelruimte A van $C_r(X)$ heet een <u>deel-algebra</u> als

$$(f \in A,\ g \in A) \rightarrow f.g \in A.$$

Deze paragraaf is gewijd aan een beschouwing van deel-algebra's van $C_r(X)$. We formuleren alleen de resultaten. Voor de bewijzen verwijzen naar [1] par. 1.2.; de daar gegeven argumentaties sluiten uitstekend aan bij de door ons in het voorafgaande ontwikkelde theorie. Slechts merken we, terwille van de 'vertaling', op dat een lineaire deelruimte A van $C_r(X)$ in [1] een 'gaas' heet, als en alleen als A een Riesz-deelruimte van $C_r(X)$ is.

9.1 <u>Stelling</u>. Zij A een gesloten deelalgebra van $C_r(X)$. Dan is A een Riesz-deelruimte van $C_r(X)$.

<u>Bewijs:</u> [1], Lemma 1.2.5.

9.2 <u>Lemma</u>. Zij M een gesloten Riesz-deelruimte van $C_r(X)$. Neem aan dat voor ieder tweetal verschillende punten p,q in X, en ieder paar α,β in $\mathbb{R}$, een $f_{p,q} \in M$ bestaat zo dat

$$f_{p,q}(p) = \alpha \quad , \quad f_{p,q}(q) = \beta \ .$$

Dan is $M = C_r(X)$.

<u>Bewijs:</u> [1], Lemma 1.2.3.

9.3 <u>Stelling van Kakutani-Krein</u> (1941).

Zij M een gesloten Riesz-deelruimte van $C_r(X)$, zo dat

(i) $1_X \in M$ $\quad (1_X(t) := 1$, voor alle $t \in X)$

(ii) M scheidt de punten van X (d.w.z.: Voor ieder tweetal ... met de eigenschap dat $f(p) \neq f(q)$). Dan is $M = C_r(X)$.

verschillende punten p,q in X bestaat een $f \in M$ zo dat $f(p) \neq f(q)$).
Dan is $M = C_r(X)$.
Bewijs: [/] Lemma 1.2.4.

9.4 Stelling van Stone-Weierstrasz.
Zij Λ een gesloten deelalgebra van $C_r(X)$, zo dat
(i) $1_X \in \Lambda$
(ii) Λ scheidt de punten van X.
Dan is $\Lambda = C_r(X)$.
Bewijs: Volgt onmiddellijk uit 9.1 en 9.3.

Voor enkele verscherpingen van de hier geciteerde stellingen en vewante resultaten zij verwezen naar de opgaven van vraagstuk V van de vraagstukkenverzameling en naar de betrokken paragraaf in [/].

Par 10 De representatiestelling van Kakutani-Krein

In deze paragraaf willen we de vraag beantwoorden, wanneer een genormeerde Riesz-ruimte norm- en Riesz-isomorf is met een $C_r(X)$. Daar in $C_r(X)$ in ieder geval geldt

$$[-1_X, 1_X] = \{f \in C_r(X) \mid \|f\| \leq 1\},$$

voeren we de volgende definitie in:

10.1 <u>Definitie</u>. Zij $(E, \leq, \|..\|)$ een genormeerde Riesz-ruimte. Een element $u \in K$ heet een <u>orde-eenheid</u> (of kortweg, <u>eenheid</u>) als

$$[-u, u] = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}.$$

Het is duidelijk dat een genormeerde Riesz-ruimte hoogstens één eenheid heeft. Voorts, als u eenheid van E is, dan is $\|u\|=1$.

Via een reeks lemma's zullen we het volgende resultaat bewijzen: Een Banach-rooster met eenheid is norm- en Riesz-isomorf met een $C_r(X)$ (Kakutani, 1941).

Bij de bewijsvoering zullen we gebruik maken van enkele belangrijke resultaten uit de functionaal-analyse, die we hieronder eerst kort zullen samenvatten.

(i) <u>De stelling van Hahn-Banach</u> (zie [1] par. 2.7).

We gebruiken speciaal het volgende

<u>Gevolg</u>([1] blz. 80). Zij $(E, \|..\|)$ een genormeerde ruimte. Bij iedere $x \in E$, met $x \neq 0$, bestaat een lineaireefunctionaal f op E, met de eigenschap dat

$$f(x) = \|x\| \quad , \quad |f(y)| \leq \|y\| \quad (y \in E).$$

Voor deze functionaal f geldt dus bovendien

$$f \in E' \quad , \quad \|f\| = 1.$$

(ii) <u>De stelling van Banach-Alaoglu-Bourbaki</u>. (zie [1] par. 3.13).

In de formulering van deze stelling komt behalve de reeds bekende norm-topologie in E' nog een andere topologie op E' voor:

<u>Definitie</u>. Zij $(E, \|..\|)$ een genormeerde ruimte. De <u>zwak*-</u> (of <u>$\sigma(E',E)$-)topologie</u> in E' is de zwakste topologie in E', waarvoor

de afbeeldingen $e_x : E' \longrightarrow \mathbb{R}$ ($x \in E$),

$$e_x(f) := f(x) \quad (f \in E')$$

continue (lineaire) functionalen zijn. We verwijzen naar deze topologie d.m.v. het voorvoegsel '$\sigma(E',E)$-'; bijvoorbeeld, $\sigma(E',E)$-cl V betekent: de afsluiting van V in de zwak*-topologie. Een basis voor het omgevingen-systeem van een element f_0 van E' in de (E',E)-topologie wordt gevormd door de verzamelingen

$$U_{f_0}(x_1,\ldots,x_n;\delta) := \{f \in E' \mid |f(x_i)-f_0(x_i)| \leq \delta \quad (i=1,\ldots,n)\},$$

met $\{x_1,\ldots,x_n\} \subset E$, en $\delta > 0$. Het is duidelijk dat de zwak*-topologie (i.h.a.) zwakker is dan de normtopologie van E'.

Stelling. Zij $(E,\|..\|)$ een genormeerde ruimte. Dan is de eenheidsbol S' in E'

$$S' := \{f \in E' \mid \|f\| \leq 1\}$$

$\sigma(E',E)$-compact.

(iii). <u>De stelling van Krein-Milman</u> ([7], section 15).

<u>Definitie</u>. Zij V een convexe verzameling in een lineaire ruimte. Een punt $z \in V$ heet een <u>extreem punt</u> van V als $V\setminus\{z\}$ een convexe verzameling is (dus, als z geen inwendig punt is van enig lijnstuk dat geheel in V ligt). De verzameling der extreme punten van V duiden we aan met ext V.

Het is duidelijk dat (voor convexe V) conv ext V $\subset$ V (conv ext V betekent de convexe uitbreiding van ext V, i.e. de doorsnede van alle convexe verzamelingen die ext V bevatten). De stelling van Krein-Milman, toegespitst op de ruimte E', zegt nu:

<u>Stelling</u>. Zij V een $\sigma(E',E)$-compacte convexe niet lege deelverzameling van E'. Dan is ext V niet leeg, en

$$V = \sigma(E',E)\text{-cl conv ext } V.$$

Tot nader order is $(E,\leq,\|..\|)$ steeds een genormeerde Riesz-ruimte met eenheid u.

10.2 Lemma. $E' = E^b$, en voor iedere $g \in K^*$ geldt $\|g\| = g(u)$.

Bewijs: We weten al dat $E' \subset E^b$. Daar $E^b = K^* - K^*$, behoeven we voor de omgekeerde inclusie slechts aan te tonen dat $K^* \subset E'$. Zij dus $g \in K^*$, en neem $x \in E$ met $x \neq 0$. Dan is

$$\frac{x}{\|x\|} \in [-u,u]$$
$$\rightarrow \quad |x| \leq \|x\|.u$$
$$\rightarrow \quad |g(x)| \leq |g|(|x|) = g(|x|) \leq g(\|x\|.u) = \|x\|.g(u)$$
$$\rightarrow \quad g \in E' \ , \ \|g\| \leq g(u)$$

Daar

$$|g(u)| = g(u) = 1.g(u) = \|u\|.g(u)$$

geldt zelfs $\|g\| = g(u)$.

We definieren

$$X := \{f : E \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ is Riesz-homomorfisme}, \ f(u)=1\}.$$

10.3 Lemma. X is een zwak*-gesloten deelverzameling van de eenheidsbol S' van E'.

Bewijs: Zij f een element van X. Daar f een Riesz-homomorfisme is, geldt zeker $f \in K^*$. Uit 10.2 volgt nu onmiddelijk $f \in S'$. Dus $X \subset S'$.

Zij $f_o \in \sigma(E',E)$-cl X. Kies $x \in E$, een $\delta > 0$. De verzameling

$$U_{f_o}(x;|x|;u;\delta) := \{f \in E' \mid |f(x)-f_o(x)|<\delta, \ |f(|x|)-f_o(|x|)|<\delta, \ |f(u)-f_o(u)|<\delta\}$$

is een $\sigma(E',E)$-omgeving van f_o. Neem een $f \in X \cap U_{f_o}(x,|x|,u;\delta)$. Dan blijkt

$$\begin{aligned}||f_o(x)|-f_o(|x|)| &\leq ||f_o(x)|-|f(x)||+||f(x)|-f(|x|)| \\ &\quad +|f(|x|)-f_o(|x|)| \\ &\leq |f_o(x)-f(x)|+0+\delta = 2\delta,\end{aligned}$$

$$|1-f_o(u)| = |f(u)-f_o(u)| < \delta.$$

Dus f_o is een Riesz-homomorfisme met $f_o(u)=1$, d.w.z. $f_o \in X$. Derhalve is X $\sigma(E',E)$-gesloten.

De verzameling X, voorzien van de relatieve $\sigma(E',E)$-topologie, noemen we de structuur-ruimte van E.

10.4 Lemma. De structuurruimte X van E is een niet-lege compacte Hausdorff-ruimte.

Bewijs: Het is duidelijk dat X een Hausdorff-ruimte is. Voorts is volgens 10.3, X een $\sigma(E',E)$-gesloten deelverzameling van S', die, op grond van de stelling van Banach-Alaoglu-Bourbaki, $\sigma(E',E)$-compact is. Dus X is eveneens $\sigma(E',E)$-compact. Rest te bewijzen dat X niet-leeg is. Definieer daartoe

$$B := \{g \in E' \mid g \geq 0, g(u) = 1\},$$

en merk op dat:

1. $B \subset S'$

Want, volgens 10.2 geldt voor iedere $g \in B$

$$\|g\| = g(u) = 1.$$

2. B is $\sigma(E',E)$ compact

Want: We kunnen B schrijven als

$$B = \cap\{e_x^{-1}|\mathbb{R}^+| \mid x \in K\} \cap e_u^{-1}\{1\},$$

waarin $\mathbb{R}^+ := \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \geq 0\}$. Daar $\mathbb{R}^+$ en $\{1\}$ gesloten verzamelingen zijn, en alle functies e_x zwak*-continu, is B zwak*-gesloten, en dus -compact vanwege 1. en de stelling van B.-A.-B..

3. $B \neq \phi$

Want: Daar $E \neq \{0\}$, volgt uit de stelling van Hahn-Banach dat ook $E' \neq \{0\}$. Dus is $K^* \neq \{0\}$, en bijgevolg $B \neq \phi$.

4. B is convex.

Dit stelt ons in staat de stelling van Krein-Milman toe te passen, en we concluderen dat

$$\text{ext } B \neq \phi.$$

In 3 stappen zullen we nu aantonen dat ext B = X (voor het bewijs van ons lemma is eigenlijk de inclusie ext $B \subset X$ voldoende).

(i) $(0 \leq g \leq h \in \text{ext } B) \rightarrow g = g(u).h$

Want: Op grond van 10.2, is het gestelde triviaal als $g(u)=0$, of als $g(u)=h(u)$. Neem dus z.b.d.a. aan dat

$$0 < g(u) < 1 = h(u).$$

Definieer

$$k := \frac{g}{g(u)} \quad , \quad l := \frac{h-g}{1-g(u)} \; .$$

Dan is $k \in B$, $l \in B$, en

$$g(u).k + (1-g(u)).l = h \in \text{ext } B.$$

Dit is slechts mogelijk indien $k=l=h$. Dus $g = g(u).h$.

(ii) $\text{ext } B \subset X$

Want: Neem $h \in \text{ext } B$. Om aan te tonen dat h een Riesz-homomorfisme is kiezen we x,y in E met $x \wedge y=0$, en bekijken $h(x) \wedge h(y)$. Uit lemma 7.8 volgt de existentie van een $\varphi_x \in E^b$, die voldoet aan:

$$0 \leq \varphi_x \leq h \quad , \quad \varphi_x(x)=h(x) \quad , \quad \varphi_x(y)=0.$$

Volgens (i) is dus

$$\varphi_x = \varphi_x(u).h,$$

en in het bizonder $\varphi_x(u).h(x)=\varphi_x(x)=h(x)$. Daaruit volgt óf

$$\varphi_x(u)=0 \;\rightarrow\; h(x)=0 \;\rightarrow\; h(x) \wedge h(y)=0$$

óf

$$\varphi_x(u)=1 \;\rightarrow\; h=\varphi_x \;\rightarrow\; h(y)=\varphi_x(y)=0 \;\rightarrow\; h(x) \wedge h(y)=0.$$

In elk geval vinden we dus $h(x) \wedge h(y)=0$; d.w.z. h is een Riesz-homomorfisme.

(iii) $\text{ext } B = X$

Want: We weten dat $X \subset B$. Neem een $h \in X$, en veronderstel dat

$$h = \lambda.f + (1-\lambda).g$$

met f,g in B, en $0 < \lambda < 1$. Daar h een Riesz-homomorfisme is, geldt

$$|\lambda.f(x)| \leq \lambda.f(|x|) \leq h(|x|) = |h(x)| \qquad (x \in E).$$

Daaruit volgt $h^{-1}\{0\} \subset f^{-1}\{0\}$, en dus $f = h$, (dit laatste, omdat $h^{-1}\{0\}$ een maximale deelruimte van E is; d.w.z.

iedere x in E is te schrijven als $x=z+\alpha_o u$ met $h(z)=0$, en dus $h(x)=h(z)+\alpha h(u)=0+\alpha_o 1=f(z)+\alpha f(u)=f(x)$. Zie [/], blz. 52). Dus h is een extreem punt van B.

Voor iedere x in E is $e_x|_X$ een continue functie van de structuur ruimte X naar $\mathbb{R}$. We definieren dus een functie $J:E \longrightarrow C_r(X)$ door te zetten $J(x):=e_x|_X$, oftewel

$$J(x)(f) := f(x) \qquad (x \in E,\ f \in X).$$

Zonder moeite is in te zien dat J een Riesz-homomorfisme is, en dat $J(u) = 1_X$.

10.5 <u>Lemma</u>. J is een norm- en Riesz-isomorfisme van E op een dichte deelruimte van $C_r(X)$.

<u>Bewijs:</u>

(i) Om te bewijzen dat J een isometrie is merken we eerst op dat

$$\|J(x)\| = \max\{|J(x)(f)| \mid f \in X\} = \max\{|f(x)| \mid f \in X\} \leq \|x\|,$$

voor alle x in E . Voor de omgekeerde ongelijkheid, kies $x \neq 0$ in E en stel $x_o := |x|$. Definieer

$$B_o := \{f \in E' \mid f \geq 0,\ f(u)=1,\ f(x_o)=\|x_o\|\}.$$

Daarvoor geldt:

1. B_o is convex en zwak*-compact.

Dit bewijst men zoals in 10.4 voor B.

2. $B_o \neq \phi$.

Want: Volgens de stelling van Hahn-Banach, bestaat er een $g \in E'$ met de eigenschap

$$\|g\| = 1 \quad , \quad g(x_o) = \|x_o\|.$$

Dus voor $f:=|g|$ geldt

$$f(x_o) = |g|(x_o) \geq |g(x_o)| = \|x_o\|,$$

en voorts (daar E' een Banach-rooster is) $\|f\| = \||g|\| = \|g\|=1$, zodat

$$f(x_o) \leq \|f\|.\|x_o\| = \|x_o\|.$$

Dit betekent dat $f \in B_o$.

3. $\phi \neq \text{ext } B_o \subset \text{ext } B \subset X$.

Want: Volgens 1. en 2. mogen we op B_o de stelling van Krein-Milman toepassen; daaruit volgt ext $B_o \neq \phi$. Neem nu $h \in \text{ext } B_o$, en veronderstel dat $h=\lambda.f+(1-\lambda)g$ met f,g in B en $0 < \lambda < 1$. Dan is

$$\|x_o\| = h(x_o) = \lambda.f(x_o)+(1-\lambda)g(x_o) \leq \lambda.\|x_o\|+(1-\lambda)\|x_o\| = \|x_o\|,$$

waaruit onmiddellijk volgt dat $f(x_o) = \|x_o\| = g(x_o)$; m.a.w. f en g liggen in B_o. Dus h is een extreem punt van B.

Conclusie: Er is een $k \in X$ met $k(x_o) = \|x_o\|$. Daarvoor geldt dus

$$J(x_o)(k) = k(x_o) = \|x_o\| = \|x_o\|.\|k\|.$$

Bij gevolg vinden we

$$\|J(x)\| = \||J(x)|\| = \|J(|x|)\| = \|J(x_o)\| \geq \|x_o\| = \|x\|.$$

Tezamen met het reeds opgemerkte levert dit de isometrie van J.

(ii) Om te bewijzen dat $J[E]$ dicht is in $C_r(X)$, definieren we

$$M := \text{cl } J[E] \quad (=\text{topologische afsluiting van } J[E] \text{ in } C_r(X)).$$

Dan geldt:

1. M is een gesloten Riesz-deelruimte van $C_r(X)$.

Want: Kennelijk is $J[E]$ een Riesz-deelruimte van $C_r(X)$. Uit de continuiteit van de vector- en rooster-operaties volgt hetzelfde voor de afsluiting M van $J[E]$.

2. $1_X \in M$ (en wel, $1_X = J(u)$)

3. M scheidt de punten van X.

Want: Als f en g in X liggen, en, bijvoorbeeld, $f(x) \neq g(x)$, dan is $J(x)(f) \neq J(x)(g)$; dus reeds $J[E]$ scheidt de punten van X.

Conclusie: Op M is de stelling van Kakutani-Krein (9.3) van toepassing. Dit betekent $M = C_r(X)$.

Indien, in het voorafgaande, E een Banach-rooster is, dan is $J[E]$ gesloten, en dus:

10.6 <u>Stelling</u> (Kakutani) Een Banach-rooster $(E, \leq, \|..\|)$ met eenheid is is norm- en Riesz-isomorf met $C_r(X)$ (waarin X de structuurruimte van E is).

Par 11 Riesz-homomorfismen op $C_r(X)$

In deze paragraaf is X steeds een willekeurige compacte Hausdorff-ruimte. In de algebra $C_r(X)$ zijn, volgens stelling 6.14, "de (gesl algebraische idealen dezelfde als de orde-idealen." Zoals zal blijken geldt hetzelfde voor Riesz-homomorfismen en algebra-homomorfismen tussen algebra's van de vorm $C_r(X)$. Per definitie, een lineaire afbeelding L van een algebra A in een algebra B (beide over $\mathbb{R}$) is een <u>algebra-homomorfisme</u> indien $L(a_1.a_2) = L(a_1).L(a_2)$, voor alle a_1, a_2 in A.

11.1 <u>Stelling</u>. Zij L een reële lineaire functionaal op $C_r(X)$, waarvoor geldt $L(1_X)= 1$. Dan zijn aequivalent de beweringen:

(i) L is een Riesz-homomorfisme

(ii) L is een algebra-homomorfisme

(iii) Er is juist één $x \in X$, zo dat $L(f)= f(x) \quad (f \in C_r(X))$.

<u>Bewijs</u>:

(ii)→(i): Neem $f \in C_r(X)$. Dan is

$$|f| = \sqrt{f^2} \quad \text{(d,w,z,} \quad |f|(x)= \sqrt{(f(x))^2}, \text{ voor alle } x \in X).$$

Daar L een algebra-homomorfisme is, volgt hieruit

$$L(|f|)= L(\sqrt{|f|^2})= L(\sqrt{|f|}^{\,2})= (L(\sqrt{|f|}))^2 \geq 0$$

en

$$(L(f))^2= L((f)^2)= L(|f|^2)= (L|f|)^2 .$$

Tezamen geeft dit

$$|L(f)|= |L(|f|)|= L(|f|),$$

dus L is een Riesz-homomorfisme.

(i)→(iii): Zij L een Riesz-homomorfisme met $L(1_X)= 1$. Dan is L continu (met $\|L\|=1$; vgl. 10.3), zodat

$$N := \{f \in C_r(X) \mid L(f)= 0\}$$

een gesloten verzameling is. Bovendien is N kennelijk een orde-ideaal, en dus, volgens 6,14, een algebraisch ideaal. Volgens 6.13 betekent dit, dat er een gesloten niet-lege deelverzameling V van X bestaat zo, dat

$$N = I_V := \{f \in C_r(X) \mid f(x) = 0 \quad (x \in V)\}.$$

Zij x_o een punt van V. Dan geldt; voor iedere $f \in C_r(X)$,

$$\begin{aligned} L(f-L(f)1_X) &= L(f)-L(f)L(1_X) \\ &= L(f)-L(f)1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$f-L(f)1_X \in N = I_V,$$

oftewel

$$f(x_o)-L(f) = (f-L(f)1_X)(x_o) = 0.$$

We zien dus dat

$$L(f) = f(x_o) \quad (f \in C_r(X)).$$

Daar $C_r(X)$ de punten van X scheidt, volgt uit deze formule tegelijkertijd dat het punt x_o uniek bepaald is door L (m.a.w. $V = \{x_o\}$).

(iii)→(ii): Triviaal.

11.2 Opmerking. Het voorgaande betoog kan, met geringe wijzigingen, ook gelezen worden als bewijs van de volgende bewering:
Zij L een reele lineaire functionaal op $C_r(X)$. Dan zijn de volgende uitspraken aequivalent:

(i) L is een Riesz-homomorfisme met $L(1_X) = 1$.

(ii) L is een niet-triviaal (i.e. $\neq 0$) algebra-homomorfisme.

(iii) Er is een $x \in X$ zo, dat $L(f) = f(x) \quad (f \in C_r(X))$.

Uit het bewijs van 10.4 (speciaal dl. (iii)), toegepast op $E := C_r(X)$, zien we dat deze uitspraken ook nog aequivalent zijn met:

(iv) $L \in \operatorname{ext} B_X$, waarin $B_X := \{L \in C_r(X)' \mid L \geq 0, L(1_X) = 1\}$.

In het bijzonder wordt dus door bovenstaande regel (iii) een 1-1 correspondentie vastgelegd tussen de punten van X en de extreme punten van B_X. Dit is zelfs een homeomorfisme:

11.3 Lemma. De afbeelding $H: X \longrightarrow \text{ext } B_X$, gedefinieerd door

$$H(x)(f) := f(x) \quad (f \in C_r(X),\ x \in X),$$

is een homeomorfisme van X op ext B_X.

Bewijs: We zagen reeds dat H een 1-1afbeelding van X op ext B_X is. Om te bewijzen dat H topologisch is, merken we op dat de verzamelingen van de vorm

$$V_{x_o}(f_1,\ldots,f_n;\delta) := \{x \in X \mid |f_i(x)-f_i(x_o)| < \delta \quad (i=1,\ldots,n)\},$$

met $x_o \in X$, $\{f_1,\ldots,f_n\} \subset C_r(X)$, $\delta > 0$, een basis voor de topologie van de (compacte Hausdorff-)ruimte X vormen (dit volgt b.v. onmiddellijk uit [8], stelling 60). Maar

$$\begin{aligned} H[V_{x_o}(f_1,\ldots,f_n;\delta)] &= \{Hx \mid x \in X,\ |f_i(x)-f_i(x_o)| < \delta \ (i=1,\ldots,n)\} \\ &= \{Hx \mid x \in X,\ |Hx(f_i)-Hx_o(f_i)| < \delta \ (i=1,\ldots,n)\} \\ &= \{L \in \text{ext } B_X \mid |L(f_i)-L_o(f_i)| < \delta \ (i=1,\ldots,n)\} \\ &= U_{L_o}(f_1,\ldots,f_n;\delta), \end{aligned}$$

waarin $L_o := H(x_o)$. Dus "H voert een basis voor de topologie van X over in een basis voor de topologie van ext B_X". D.w.z. H is een homeomorfisme.

11.4 Stelling. Laat X en Y compacte Hausdorff-ruimten zijn, en $T: C_r(X) \longrightarrow C_r(Y)$ een lineaire afbeelding met $T(1_X) = 1_Y$. Dan zijn de volgende uitspraken aequivalent:

(i) T is een Riesz-homomorfisme

(ii) T is een algebra-homomorfisme

(iii) Er is juist één continue functie $\varphi: Y \longrightarrow X$, zo dat $T(f) = f \circ \varphi$, voor alle $f \in C_r(X)$.

Bewijs:

(ii)→(i): Zij T een algebra-homomorfisme. Voor iedere $y \in Y$ definieren we $L_y : C_r(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ door

$$L_y(f) := T(f)(y) \qquad (f \in C_r(X)), \tag{1}$$

Het is gemakkelijk in te zien dat L_y een algebra-homomorfisme is met $L_y(1_X) = 1$. Volgens 11.1 is er dus een unieke $x \in X$ (afhankelijk van y) zo, dat

$$L_y(f) = f(x) \qquad (f \in C_r(X)). \tag{2}$$

Daaruit volgt

$$T(|f|)(y) = L_y(|f|) = |f|(x) = |f(x)| = |T(f)(y)| = |T(f)|(y) \qquad (y \in Y).$$

Dus $T(|f|) = |T(f)|$, d.w.z. T is een Riesz-homomorfisme.

(i)→(iii): Zij T een Riesz-homomorfisme met $T(1_X) = 1_Y$. Definieer opnieuw, voor iedere $y \in Y$, een functie L_y volgens formule (1). Dan is L_y een Riesz-homomorfisme met $L_y(1_X) = 1$, zodat, volgens 11.1, een $x \in X$ bestaat waarvoor (2) geldt. Stel nu $\varphi(y) := x$; dan wordt daardoor een functie $\varphi : Y \longrightarrow X$ gedefinieerd zó, dat automatisch

$$T(f)(y) = f \circ \varphi(y) \qquad (y \in Y).$$

Om aan te tonen dat φ continu is, nemen we een punt $y_0 \in Y$ en een basisomgeving $V_{x_0}(f_1, \ldots, f_n; \delta)$ van $x_0 := \varphi(y_0)$ voor de topologie van X (vgl. bewijs van 11.3). Dan is

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}[V_{x_0}(f_1, \ldots, f_n; \delta)] &= \{y \in Y \mid |f_i \circ \varphi(y) - f_i \circ \varphi(y_0)| < \delta \ (i=1,..,n)\} \\ &= \{y \in Y \mid |Tf_i(y) - Tf_i(y_0)| < \delta \ (i=1,\ldots,n)\} \\ &= V_{y_0}(Tf_1, \ldots, Tf_n; \delta)\end{aligned}$$

Dit is een open verzameling in Y; dus φ is continu.

(iii)→(ii) Evident.

Literatuur tot en met paragraaf 11

|1| Collegedictaat Functionaal analyse

|2| Collggedictaat Elementaire algebra

|3| F. Schuh, Differentiaal- en integraalrekening

|4| F.R. Gantmacher, Matrizenrechnung

|5| Peressini

|6| Gillman and Jerrison

|7| Kelley and Namioka

|8| Collegedictaat Topologie