stichting
mathematisch
centrum

MC

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE ZC 73/70 JUNI

J. AARTS
CURSUS TOPOLOGIE 1969-1970

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

INHOUD

Hoofdstuk 1. Begrippen uit de verzamelingenleer.

§1. Verzamelingen

In dit hoofdstuk zullen enkele begrippen en stellingen uit de verzamelingenleer worden behandeld.

Bij een axiomatische opbouw van de verzamelingenleer worden de begrippen verzameling en element zijn van (of behoren tot) een verzameling als grondbegrippen aangenomen.
"x is element van de verzameling A" wordt genoteerd als: $x \in A$.
"x is niet een element van de verzameling A" noteren we als: $x \notin A$.

Synoniemen voor verzameling zijn klasse, familie, stelsel en collectie. Zijn de elementen van een verzameling A zelf weer verzamelingen dan spreken we bij voorkeur over de familie A (of het stelsel A) van verzamelingen. Hiermee worden verwarrende herhalingen van het woord verzameling vermeden.

In de verzamelingenleer worden met behulp van axioma's de eigenschappen van de grondbegrippen vastgelegd. Bovendien zijn er axioma's die het bestaan van zekere verzamelingen vastleggen en de "constructie" van "nieuwe" verzamelingen uit "oude" verzamelingen mogelijk maken.
Het is niet de bedoeling hier op een axiomatische opbouw van de verzamelingenleer in te gaan. We noemen slechts enkele van de gebruikelijke axioma's.

1. Axioma van uitgebreidheid. Twee verzamelingen zijn dan en slechts dan gelijk indien zij dezelfde elementen hebben. In formule:

$$A = B \Leftrightarrow \{(\forall x)\{x \in A \Leftrightarrow x \in B\}\}.$$

Een verzameling is dus geheel bepaald door zijn elementen.

2. Axioma van de lege verzameling. Er bestaat een verzameling waartoe geen elementen behoren. Op grond van het axioma van uitgebreidheid is er dan precies één zo'n verzameling. Deze verzameling heet de lege verzameling en wordt met het symbool ϕ aangeduid.

3. Keuzeaxioma. Dit wordt in §5 behandeld.

We spreken nu enkele notaties af. Kleine letters(behalve f, g en h) duiden elementen van een verzameling aan. Hoofdletters worden gebruikt om verzamelingen te noteren. Schrijfletters geven families of collecties aan. Bv. $x \in A$, $B \notin \mathcal{C}$.

Verzamelingen worden vaak gevormd met behulp van een zogenaamde definierende eigenschap. $\{x \mid$ eigenschap E betreffende $x\}$ is de verzameling van alle x die de eigenschap E hebben. De volgende definities kunnen dit illustreren.

$A \cap B = \{x \mid x \in A$ en $x \in B\}$, de <u>doorsnede</u> van A en B.
$A \cup B = \{x \mid x \in A$ of $x \in B\}$, de <u>vereniging</u> van A en B.
$A \setminus B = \{x \mid x \in A$ en $x \notin B\}$, het <u>complement</u> van B in A.

Verder spreken we af.
A en B heten <u>disjunct</u> als $A \cap B = \phi$.
A is <u>bevat in</u> (<u>deel van</u>; <u>deelverzameling van</u>) B - notatie $A \subset B$ - als ieder element van A tot B behoort. In formule: $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)\{x \in A \Rightarrow x \in B\}$.
$A \supset B$ - A <u>omvat</u> B - is gelijkwaardig met $B \subset A$. Blijkbaar geldt:
$A = B \Leftrightarrow \{A \subset B$ en $B \subset A\}$ en $(\forall X)\ \{\phi \subset X\}$.

Familie's en collectie's van verzamelingen worden vaak genoteerd met behulp van een indexverzameling. Indexverzamelingen worden aangegeven met Griekse hoofdletters en de elementen van een indexverzameling - de indices - met de corresponderende kleine Griekse letter - eventueel met boven- of benedenindex. Zo geven we met $\mathcal{C} = \{A_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ aan dat er bij ieder element $\delta \in \Delta$ een verzameling A_δ is gegeven en dat $\mathcal{C}$ juist de verzameling is van al deze A_δ's.
Zij $\mathcal{A} = \{A_\delta \mid \delta \in \Delta\}$. Dan is per definitie:
$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup \{A_\delta \mid \delta \in \Delta\} = \{x \mid (\exists \delta \in \Delta)(x \in A_\delta)\}$ - <u>de vereniging van de A_δ's</u> of <u>de vereniging van de familie $\mathcal{A}$</u>.
$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap \{A_\delta \mid \delta \in \Delta\} = \{x \mid (\forall \delta \in \Delta)(x \in A_\delta)\}$ - <u>de doorsnede van de A_δ's</u> of <u>de doorsnede van de familie $\mathcal{A}$</u>.

Het bewijs van de volgende stellingen wordt aan de lezer overgelaten.

Stelling 1. Zijn A, B, C en D verzamelingen, dan is

1. $D \setminus (D \setminus A) = D \cap A$.
2. $A \cap B = B \cap A$ en $A \cup B = B \cup A$ (commutatieve wetten).
3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ en $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (associatieve wetten).
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ en $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributieve wetten).
5. $D \setminus (A \cup B) = (D \setminus A) \cap (D \setminus B)$ en $D \setminus (A \cap B) = (D \setminus A) \cup (D \setminus B)$ (wetten van De Morgan).

Stelling 2. Zij $\mathcal{A} = \{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ een geïndiceerde collectie deelverzamelingen van een verzameling X. Dan is:

1. $X \setminus \bigcup \{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\} = \bigcap \{X \setminus A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$.
2. $X \setminus \bigcap \{A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\} = \bigcup \{X \setminus A_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$.

§2. Afbeeldingen

Definitie 1. Als A_i, $i = 1, \ldots, n$, verzamelingen zijn, dan heet de verzameling C van alle geordende n-tallen $(a_1,\ldots,a_n)$ met $a_i \in A_i$, $i = 1, \ldots, n$, het Cartesisch produkt van de A_i.

Notatie $C = A_1 \times \ldots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$.

In formule:

$A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1,\ldots,a_n) \mid a_i \in A_i, i=1,\ldots,n\}$.

Verder is $A^n = A_1 \times \ldots \times A_n$ met $A_i = A$, $i = 1, \ldots, n$.

Definitie 2. Als A en B verzamelingen zijn, dan is een afbeelding of functie f van A in B - notatie $f: A \to B$ - een deelverzameling van het Cartesisch product $A \times B$ met de volgende eigenschap:

Voor alle $a \in A$ is er één en slechts één $b \in B$ met $(a,b) \in f$.

In plaats van $(a,b) \in f$ schrijven we $b = f(a)$; b heet de waarde van f in a of het beeld van a onder f. A heet de bron van de afbeelding en B heet het functiewaardengebied. In plaats van $f: A \to B$ schrijven we ook $A \xrightarrow{f} B$. $b = f(a)$ geven we soms aan met: $a \overset{f}{\mapsto} b$. (Let op het verschil tussen $A \xrightarrow{f} B$ en $a \overset{f}{\mapsto} b$. Het eerste symbool geeft een afbeelding f van A in B aan, terwijl het tweede symbool aangeeft dat het paar (a,b) tot f behoort.)

Definitie 3. Als $f: A \to B$ en $g: B \to C$ dan heet $g \cdot f: A \to C$, gedefinieerd door $a \overset{f}{\mapsto} f(a) \overset{g}{\mapsto} g(f(a))$ voor alle $a \in A$, de samenstelling of compositie van f en g.

Definitie 4. Zij $f: A \to B$ en $C \subset A$ en $D \subset B$. Dan heet:

$f(C) = \{x \mid (\exists\, a \in C)(x=f(a))\}$ het beeld van C onder f, en

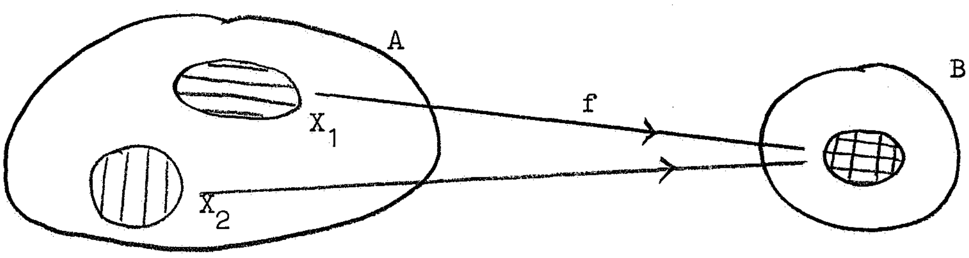
$f^{-1}(D) = \{x \mid x \in A$ en $f(x) \in D\}$ het volledig origineel van D onder f.

Ga de volgende stelling zelf na.

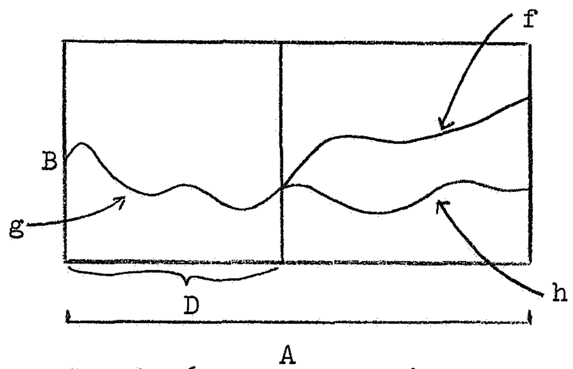
<u>Stelling 1</u>. Zij $f\colon A \to B$ en $\{X_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ resp. $\{Y_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ een collectie deelverzamelingen van A resp. B. Dan is:

1. $f^{-1}(\bigcup\{Y_\delta \mid \delta \in \Delta\}) = \bigcup\{f^{-1}(Y_\delta) \mid \delta \in \Delta\}$
2. $f^{-1}(\bigcap\{Y_\delta \mid \delta \in \Delta\}) = \bigcap\{f^{-1}(Y_\delta) \mid \delta \in \Delta\}$
3. $f(\bigcup\{X_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}) = \bigcup\{f(X_\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\}$
4. $f(\bigcap\{X_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}) \subset \bigcap\{f(X_\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\}$

In 4. kan het inclusieteken $\subset$ in het algemeen niet vervangen worden door het gelijkteken, zoals het volgende plaatje suggereert:



<u>Definitie 5</u>. Zij $f\colon A \to B$ en $D \subset A$. De afbeelding $g\colon D \to B$ gedefinieerd door $g = f \cap D \times B$ heet de <u>beperking</u> of <u>restrictie van f tot D</u> en de afbeelding f heet <u>een voorstelling</u> van g. Notatie $g = f \mid D$.



Ga na dat $f \mid D$ een afbeelding is (aan definitie 2 voldoet). Zoals nevenstaand plaatje aangeeft kunnen verschillende functies (f en h) dezelfde restrictie (g) geven.

<u>Definitie 6</u>. Een afbeelding $f\colon A \to B$ heet

1. <u>injectief</u> als er bij iedere $b \in B$ ten hoogste één $a \in A$ is met $b = f(a)$
   (Equivalente formulering: $(\forall a_1 \in A)(\forall a_2 \in A)\{f(a_1)=f(a_2) \Rightarrow a_1=a_2\}$).
2. <u>surjectief</u> als er bij iedere $b \in B$ ten minste een $a \in A$ bestaat met
   $b = f(a)$ (Equivalente formulering: $f(A) = B$).
3. <u>bijectief</u> als f injectief en surjectief is.

Eéneénduidig is synoniem voor injectief. Een surjectieve afbeelding heet ook een op-afbeelding.

Stelling 2 en definitie 7. Als f: A → B is, dan heeft f een inverse d.w.z. er is een afbeelding g: B → A - de inverse van f - zó dat

$(\forall b \in B)\ \{f \circ g(b) = b\}$ en $(\forall a \in A)\ \{g \circ f(a) = a\}$.

Bewijs: Definieer: $g(b) = a \Leftrightarrow b = f(a)$
Ga na dat g door deze definitie eenduidig bepaald is en dat g een afbeelding is.

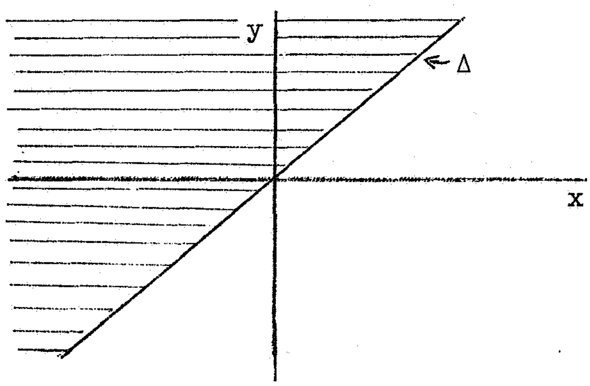
Indien een afbeelding f een inverse heeft, dan wordt deze vaak genoteerd met f^{-1}.

§3. Relaties. Het begrip kardinaalgetal.

In deze paragraaf worden de begrippen equivalentierelatie en kardinaalgetal ingevoerd.

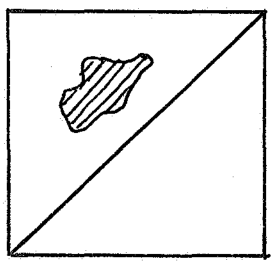
Definitie 1. Een (binaire) relatie R in een verzameling A is een deelverzameling van $A \times A$.

Voorbeeld. Laat A de verzameling van de reële getallen zijn. De gelijkheidsrelatie is de diagonaal $\Delta = \{(x,x) \mid x \in A\}$. De relatie $x < y$ is het gearceerde gebied.

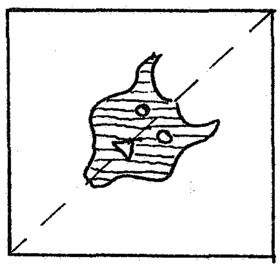


Definitie 2. Een relatie R in een verzameling A heet een equivalentierelatie als voor alle a, b en c uit A geldt:

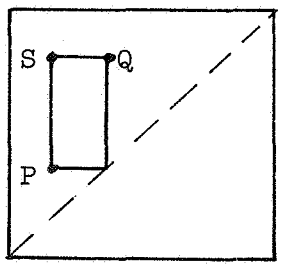
1. $(a,a) \in R$ (R is *reflexief*).
2. $(a,b) \in R \Longrightarrow (b,a) \in R$ (R is *symmetrisch*).
3. $((a,b) \in R$ en $(b,c) \in R) \Longrightarrow (a,c) \in R$ (R is *transitief*).



R is reflexief;
Diagonaal $\Delta \subset R$.



R is symmetrisch
(t.o.v. Δ).



R is transitief.
Als P en $Q \in R$ dan $S \in R$.

Als R een equivalentierelatie is in een verzameling A en $(a,b) \in R$, dan heten a en b *(R-)equivalent*.
$\{x \mid (a,x) \in R\}$ heet de *(R-)equivalentieklasse van a*. a heet *representant* van de zo bepaalde klasse.

<u>Stelling 1</u>. Als R een equivalentierelatie is in A en als P en Q equivalentieklassen zijn, dan geldt $P = Q$ of $P \cap Q = \emptyset$.

<u>Bewijs</u>. Stel $P \cap Q \neq \emptyset$. We bewijzen $P = Q$.
Stel $P = \{x \mid (x,p) \in R\}$, $Q = \{x \mid (x,q) \in R\}$ en $r \in P \cap Q$. Dan is $(r,p) \in R$ in $(r,q) \in R$. Op grond van de transitieviteit is $\underline{(p,q) \in R}$.
Als nu $z \in P$, dan is $(z,p) \in R$. Uit de transitiviteit van R en uit $(p,q) \in R$ volgt $(z,q) \in R$. Dus $z \in Q$ en $P \subset Q$. Omdat R symmetrisch is, geldt ook $\underline{(q,p) \in R}$. Geheel analoog kan worden aangetoond dat dan $Q \subset P$. Dus $Q = P$.

Bekende voorbeelden van equivalentierelaties zijn hieronder vermeld.
1. Congruentie-relatie in vlakke meetkunde en stereometrie.
2. Gelijkvormigheids-relatie in de meetkunde.
3. Laat A de verzameling van rechte lijnen in de ruimte zijn. Voor l en $m \in A$ definiëren we: $(l,m) \in R$ als l evenwijdig is met m of als l samenvalt met m. De R-equivalentieklassen worden richtingen genoemd.
4. Z is de verzameling van de gehele getallen en n een vast gekozen natuurlijk getal.
   Definieer de relatie R in Z als volgt:
   $(l,m) \in R$ als $l - m$ is een n-voud. De R-equivalentieklassen worden restklassen modulo n genoemd.

Een belangrijke toepassing van het begrip equivalentierelatie is de definitie van kardinaalgetal.
We zullen van nu af aan alle te beschouwen verzamelingen gekozen denken uit een "voldoend grote" familie $\mathcal{V}$. We doen dit om moeilijkheden veroorzaakt door het feit, dat de "verzameling van alle verzamelingen" een paradoxale uitdrukking is, te vermijden.

Definitie 3. De niet lege verzamelingen A en B heten gelijkmachtig als er een bijectieve afbeelding $f: A \to B$ bestaat.

"A en B zijn gelijkmachtig" noteren we met $A \sim B$.

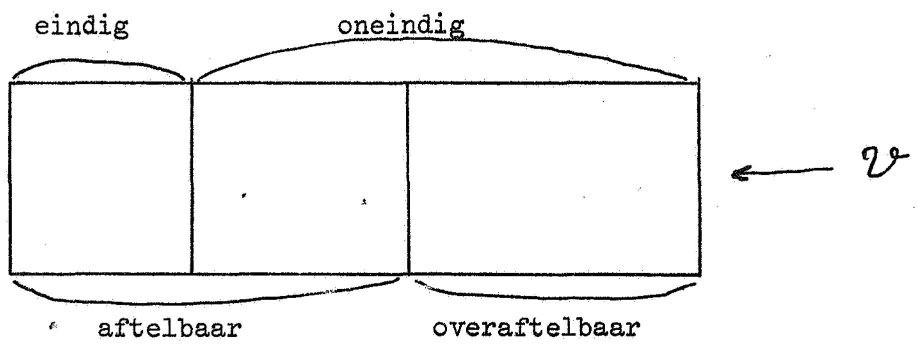
Stelling 2. "Gelijkmachtig zijn" is een equivalentierelatie in de familie $\mathcal{V}$.
Precies gezegd: Zij $(A,B) \in R$ dan en slechts dan als $A \sim B$. Dan is R een equivalentierelatie in $\mathcal{V}$.

Bewijs. Ga na.

Definitie 4. Zij R de equivalentierelatie "gelijkmachtig zijn" in $\mathcal{V}$.
De R-equivalentieklasse van A heet het kardinaalgetal van A of de machtigheid van A.
Notatie: $|A|$
$|\{0,1,\dots,n-1\}| = n$, voor ieder geheel getal ≥ 1.
De kardinaalgetallen 1,2,3,... heten eindige kardinaalgetallen. De niet eindige kardinaalgetallen heten oneindig. Het kardinaalgetal van de verzameling van de natuurlijke getallen - $\{|0,1,2,3,\dots\}|$ - heet $\aleph_0$ (spr. uit: aleph nul). Het kardinaalgetal van de verzameling van de reële getallen heet $\aleph$.

Een verzameling heet eindig als zijn kardinaalgetal eindig is. Een verzameling heet aftelbaar indien zijn kardinaalgetal eindig is of gelijk aan $\aleph_0$. Een niet aftelbare verzameling heet overaftelbaar. Een niet eindige verzameling heet oneindig.

Schema:

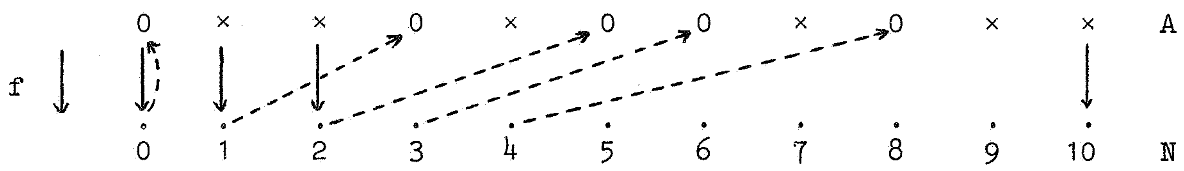


<u>Stelling 3</u>: (Zie §4, Voorbeeld 3) $\aleph_0 \neq \aleph$

We behandelen nu enige stellingen over aftelbare verzamelingen.

<u>Stelling 4</u>. Een niet lege deelverzameling van een aftelbare verzameling is aftelbaar.

<u>Bewijs</u>. Zij $\emptyset \neq B \subset A$ en A aftelbaar.
We mogen aannemen dat B en dus ook A oneindig is. (Het geval "B eindig" is triviaal).
Laat $N = \{0,1,2,\ldots\}$ de verzameling van natuurlijke getallen zijn.
$|A| = \aleph_0$. Er is dus een bijectieve afbeelding $f: A \to N$.
Om een bijectie $g: N \to B$ te krijgen maken we gebruik van de volgende eigenschap van N: iedere niet lege deelverzameling L van N heeft een kleinste element (Deze eigenschap kan met volledige inductie bewezen worden). Het kleinste element van L duiden we aan met <u>min L</u>.
Definitie van g:
$g(0) = f^{-1}(\min f(B))$.
Stel $g(0),\ldots,g(n-1)$ reeds gedefinieerd $(n \geq 1)$.
$g(n) = f^{-1}(\min f(B \setminus \{g(0),\ldots,g(n-1)\}))$.



De elementen van B zijn met 0 aangegeven. De actie van g wordt gesuggereerd door onderbroken pijlen.

<u>Stelling 5</u>. De vereniging van een aftelbare familie van paarsgewijs disjuncte aftelbare verzamelingen is aftelbaar.

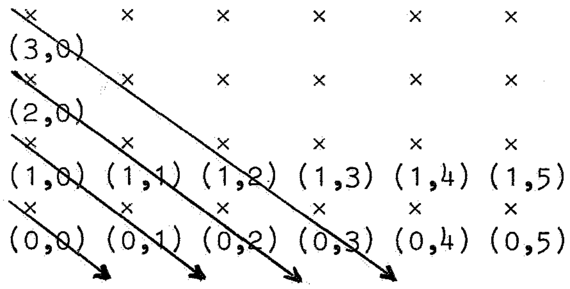
<u>Bewijs</u>. We bewijzen eerst: $|N \times N| = |N|$.

Zij ϕ: $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gedefinieerd door

$\phi(k,l) = (1+2+\ldots+(k+l)) + l$

Ga na dat ϕ een bijectie is.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ wordt afgeteld volgens de pijlen.



Laat nu $A = \mathbb{N}$ of $A = \{0,1,\ldots,n\}$ voor zekere n. Zij voor iedere i A een aftelbare verzameling X_i gegeven. X_i noteren we als volgt:
$X_i = \{a_{i1},\ldots,a_{in}\}$ als X_i eindig is en $|X_i| = n$;
$X_i = \{a_{i1},a_{i2},a_{i3},\ldots\}$ als X_i aftelbaar oneindig is ($a_{ik} \neq a_{il}$ als $k \neq l$).
ϕ: $\cup\{X_i \mid i \in A\} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, gedefinieerd door $\phi(a_{ik}) = (i,k)$, is een injectie. De stelling volgt nu uit Stelling 4 en $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$.

Aangaande bovenstaand bewijs merken we op dat uit de aanname dat de verzamelingen X_i paarsgewijs disjunct zijn, volgt dat ϕ een afbeelding is. Is $\{X_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ een aftelbare familie van aftelbare verzamelingen en definiëren we $X_i' = X_i \setminus (X_0 \cup \ldots \cup X_{i-1})$ voor $i \geq 1$ en $X_0' = X_0$, dan is $\{X_i' \mid i \in \mathbb{N}\}$ een aftelbare familie van paarsgewijs disjuncte aftelbare verzamelingen. Uit Stelling 5 volgt dus:

<u>Gevolg 1</u>. De vereniging van een aftelbare familie van aftelbare verzamelingen is aftelbaar.

Als A en B verzamelingen zijn, dan is $A \times B = \cup\{\{(a,b) \mid b \in B\} \mid a \in A\}$. Derhalve geldt:

<u>Gevolg 2</u>. Het Cartesisch product van twee aftelbare verzamelingen is aftelbaar.

Hieruit volgt met volledige inductie:

<u>Gevolg 3</u>. Het Cartesisch product van eindig veel aftelbare verzamelingen is aftelbaar.

<u>Gevolg 4</u>. Zij gegeven een aftelbaar oneindige verzameling A. Laat $\mathcal{F}$ de familie van alle eindige deelverzamelingen van A zijn. Dan is $\mathcal{F}$ aftelbaar oneindig.

Bewijs. Zij $F \in \mathcal{F}$ en $|F| = n$: $F = \{a_1,\dots,a_n\}$ met $a_i \in A$.
Laat ϕ gedefinieerd worden door
$\{a_1,\dots,a_n\} \rightsquigarrow (a_1,\dots,a_n)$.
ϕ voegt aan de verzameling $\{a_1,\dots,a_n\}$ een geordend n-tal $(a_1,\dots,a_n)$ toe (Dit ordenen van een verzameling van n elementen kan op n! manieren. Onder de afbeelding ϕ wordt er één bepaalde ordening gekozen.).
Ga na dat ϕ: $\mathcal{F} \to \cup\{A^n \mid n = 1,2,\dots\}$ een injectie is. Pas nu Gevolg 3, Gevolg 1 en Stelling 4 toe.

Opmerking. De familie van alle deelverzamelingen van een aftelbare oneindige verzameling is niet aftelbaar, maar heeft de machtigheid $\aleph$.

§4. Rekenen met kardinaalgetallen.

In deze paragraaf zullen we oneindige kardinaalgetallen aanduiden met kleine onderstreepte letters $\underline{a}$, $\underline{c}$, $\underline{m}$, $\underline{n}$, $\underline{q}$ ... . Hierbij is $\underline{a} = \aleph_0$ en $\underline{c} = \aleph$. Voor eindige kardinaalgetallen gebruiken we de notatie uit §4.

Definitie 1. Laat P en Q disjuncte niet lege verzamelingen zijn en zij $|P| = \underline{p}$ en $|Q| = \underline{q}$. Dan is $\underline{p} + \underline{q} = |P \cup Q|$.

Deze definitie is geoorloofd: $\underline{p} + \underline{q}$ is onafhankelijk van de keuze van de representanten P resp. Q van $\underline{p}$ resp. $\underline{q}$. Inderdaad, als $f\colon P \to P'$ en $g\colon Q \to Q'$ bijecties zijn en $P \cap Q = \emptyset$ en $P' \cap Q' = \emptyset$, dan is $h\colon P \cup Q \to P' \cup Q'$ gedefinieerd door $h|P = f$ en $h|Q = g$ een bijectie.
Dus als $|P| = |P'|$ en $|Q| = |Q'|$ en $P \cap Q = \emptyset$ en $P' \cap Q' = \emptyset$, dan is $|P \cup Q| = |P' \cup Q'|$.
Een soortgelijke opmerking geldt voor de definities 2, 3 en 5 in deze paragraaf.

Ga de volgende stelling zelf na.
Stelling 1. Voor alle $\underline{p}$, $\underline{q}$ en $\underline{r}$ geldt
(1) $\underline{p} + \underline{q} = \underline{q} + \underline{p}$.
(2) $(\underline{p} + \underline{q}) + \underline{r} = \underline{p} + (\underline{q} + \underline{r})$.

Definitie 2. Laat $|P| = \underline{p}$ en $|Q| = \underline{q}$. (P en Q zijn niet leeg!). Dan is $\underline{p} \times \underline{q} = |P \times Q|$.

Ga de volgende stelling zelf na.
Stelling 2. Voor alle $\underline{p}$, $\underline{q}$ en $\underline{r}$ geldt:
(1) $\underline{p} \times \underline{q} = \underline{q} \times \underline{p}$.
(2) $(\underline{p} \times \underline{q}) \times \underline{r} = \underline{p} \times (\underline{q} \times \underline{r})$.
(3) $\underline{p} \times (\underline{q} + \underline{r}) = \underline{p} \times \underline{q} + \underline{p} \times \underline{r}$.

Uit de resultaten van §4 volgt:
$\underline{a} = \underline{a} + 1 = \underline{a} + n = \underline{a} + \underline{a}$
en
$\underline{a} = \underline{a} \times 2 = \underline{a} \times n = \underline{a} \times \underline{a}$.

Hieruit volgt dat de operaties aftrekking en deling niet gedefinieerd kunnen worden voor kardinaalgetallen.

Definitie 3. Laat P en Q niet lege verzamelingen zijn.
$P^Q = \{f \mid f\colon Q \to P\}$.
Zij $|P| = \underline{p}$ en $|Q| = \underline{q}$. Dan is $\underline{p}^{\underline{q}} = |P^Q|$.

Stelling 3. Voor alle $\underline{p}$, $\underline{q}$ en $\underline{r}$ geldt:
(1) $\underline{p}^{\underline{q}} \times \underline{p}^{\underline{r}} = \underline{p}^{\underline{q}+\underline{r}}$.
(2) $(\underline{p}^{\underline{q}})^{\underline{r}} = \underline{p}^{\underline{q}\times\underline{r}}$.

Bewijs. We bewijzen (2). Ga (1) daarna zelf na.
Zij $|P| = \underline{p}$, $|Q| = \underline{q}$ en $|R| = \underline{r}$.
$(\underline{p}^{\underline{q}})^{\underline{r}} = |(P^Q)^R|$ en $\underline{p}^{\underline{q}\times\underline{r}} = |P^{Q\times R}|$.

We construeren een bijectie $\Phi\colon (P^Q)^R \to P^{Q\times R}$ als volgt:

$$f\colon R \longrightarrow P^Q \overset{\Phi}{\leadsto} \Phi(f)\colon Q \times R \to P.$$

Hierin is $\Phi(f)$ als volgt gedefinieerd:
(*) $\Phi(f)((q,r)) = f(r)(q)$ voor alle $q \in Q$ en $r \in R$.
Merk op dat $f(r)$ een afbeelding is van Q in P. Dus $\Phi(f)((q,r)) = f(r)(g) \in P$.
Φ is injectief:
Stel $\Phi(f) = \Phi(g)$. Dan is voor alle $q \in Q$ en $r \in R$ $\Phi(f)((q,r)) = \Phi(g)((q,r))$.
Dan is volgens de definitie (*):
$f(r)(q) = g(r)(q)$ voor alle q Q en alle r R.
Voor alle $r \in R$ is dus $f(r)$ dezelfde afbeelding van Q in P als $g(r)$. Dus $f = g$. Dus Φ is injectief.
Φ is surjectief:
Stel $h\colon Q \times R \to P$ gegeven.
Voor iedere $r \in R$ definiëren we $f(r)\colon Q \to P$ door $f(r)(q) = h(q,r)$.
Dan is f een afbeelding van R in P^Q en volgens (*) is $\Phi(f)((q,r)) =$
$= f(r)(q) = h(q,r)$. Dus $\Phi(f) = h$ en Φ is surjectief.

Definitie 4. Laat X een verzameling zijn. De familie van alle deelverzamelingen van X heet de machtsverzameling van X - notatie $\mathcal{P}(X)$ (Potenzmenge !).

Stelling 4. Voor iedere niet lege verzameling X geldt:

$$|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}.$$

Bewijs: $|\{0,1\}| = 2$.
Een bijectie f: $\mathcal{P}(X) \to \{0,1\}^X$ kan gedefinieerd worden door aan $Z \in \mathcal{P}(X)$ (dus $Z \subset X$) f(Z), de karakteristieke functie van Z, toe te voegen.
$f(Z) : X \to \{0,1\}$ is gedefinieerd door:

$$f(Z)(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \in Z \\ 0 & \text{als } x \notin Z \end{cases}$$

Ga na dat f een bijectie is.
Dus $|\mathcal{P}(X)| = |\{0,1\}^X| = 2^{|X|}$.

In verband met Stelling 4 wordt $\mathcal{P}(X)$ soms ook wel aangeduid met 2^X. Ga na dat uit Stelling 4 volgt dat voor een eindig kardinaalgetal n "2^n" de gewone betekenis heeft.

Voor eindige kardinaalgetallen geldt: $2^n > n$. We willen iets dergelijks afleiden voor oneindige kardinaalgetallen. Daartoe moeten we eerst een ordening invoeren voor kardinaalgetallen.

Definitie 5. Laat $|P| = \underline{p}$ en $|Q| = \underline{q}$.
Dan is $\underline{p} \leq \underline{q}$ als er een injectie f: $P \to Q$ bestaat.
$\underline{p} < \underline{q}$ als $\underline{p} \leq \underline{q}$ en $\underline{p} \neq \underline{q}$.
$\underline{p} \geq \underline{q}$ als $\underline{q} \leq \underline{p}$
$\underline{p} > \underline{q}$ als $\underline{q} < \underline{p}$.

We bewijzen nu dat $2^{\underline{p}} > \underline{p}$ voor ieder kardinaalgetal $\underline{p}$.

Stelling 5. (Cantor). $|X| < |\mathcal{P}(X)|$ voor alle X.

<u>Bewijs</u>. $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$. Inderdaad, f: $X \to \mathcal{P}(X)$ gedefinieerd door $f(x) = \{x\}$ is een injectie.

We laten nu zien: $|X| \neq |\mathcal{P}(X)|$.

We tonen dit aan met een bewijs uit het ongerijmde.

Stel $|X| = |\mathcal{P}(X)|$. Er is dan een bijectie f: $X \to \mathcal{P}(X)$. Laat $Z \subset X$ bepaald zijn door $Z = \{x \mid x \notin f(x)\}$.

(Merk op dat f(x) een deelverzameling van X is.)

$Z \subseteq X$, dus $Z \in \mathcal{P}(X)$. Omdat f surjectief is, bestaat er een $z \in X$ met $f(z) = Z$.

Dan geldt:

$z \in Z \Longrightarrow z \notin f(z) \Longrightarrow z \notin Z \Longrightarrow z \notin f(z) \Longrightarrow z \in Z$.

Dus geldt:

$$z \in Z \Longleftrightarrow z \notin Z. \text{ Tegenspraak.}$$

<u>Definitie 6 en Stelling 6</u>.

De relatie $\leq$ is een lineaire ordening d.w.z. voor alle $\underline{p}$, $\underline{q}$ en $\underline{r}$ geldt:

(1) Als $\underline{p} \leq \underline{q}$ en $\underline{q} \leq \underline{r}$, dan is $\underline{p} \leq \underline{r}$.

(2) Als $\underline{p} \leq \underline{q}$ en $\underline{q} \leq \underline{p}$, dan is $\underline{p} = \underline{q}$.

(3) $\underline{p} \leq \underline{q}$ of $\underline{q} \leq \underline{p}$.

(1) is triviaal. (2) volgt uit onderstaande stelling.

(3) zullen we hier niet bewijzen. Voor het bewijs is het keuzeaxioma nodig. We vermelden hier wel een merkwaardige consequentie van (3). Voor oneindige kardinaalgetallen $\underline{p}$ en $\underline{q}$ met $\underline{p} \leq \underline{q}$ kan bewezen worden dat $\underline{p} + \underline{q} = \underline{q}$ en $\underline{p} \cdot \underline{q} = \underline{q}$.

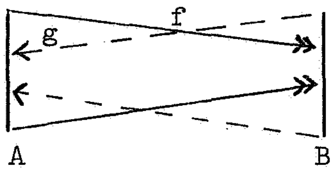
Met behulp van (3) volgt hieruit, dat voor oneindige kardinaalgetallen $\underline{p}$ en $\underline{q}$ geldt:

$$\underline{p} + \underline{q} = \underline{p} \cdot \underline{q}.$$

<u>Stelling 7</u>. (<u>Schroeder</u> - <u>Beinstein</u>). Als er injecties f: $A \to B$ en g: $B \to A$ bestaan, dan is er een bijectie h: $A \to B$.

<u>Bewijs</u>. f: $A \to B$ is een injectie. f: $A \to f(A)$ is dus een bijectie. Laat g_1: $f(A) \to A$ de inverse zijn van f: $A \to f(A)$. Het is voldoende om een

bijectie h_0: $B \to f(A)$ te construeren. Immers $g_i h_0$: $B \to A$ is dan de gezochte bijectie. Laat ϕ de samenstelling zijn van g en f: $\phi = fg$

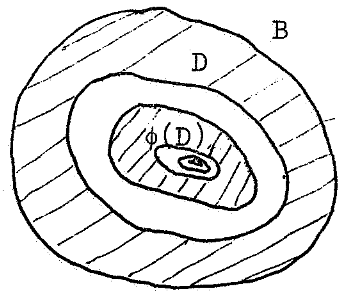


ϕ: $B \to f(A)$

Zij $D = B \setminus f(A)$ en

$E = D \cup \phi(D) \cup \phi^2(D) \cup \ldots$

$\quad = \cup\{\phi^k(D) \mid k = 1,2,\ldots\}$



Definieer

$$h_0(x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{als } x \in E \\ x & \text{als } x \in B \setminus E \end{cases}$$

Ga na dat h_0: $B \to f(A)$ een bijectie is. (Aanwijzing: ϕ is injectief en $\phi(E) = E$).

Ter illustratie van de stelling van Schroeder-Bernstein vermelden we hier drie voorbeelden.

Voorbeeld 1. Laat K een deelverzameling van de reële rechte R zijn en veronderstel dat K een open interval (a,b) bevat $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$). Dan is $|K| = |\mathbb{R}|$.
Om dit te bewijzen merken we op dat $(-1,1) \sim (a,b)$, want $x \leadsto \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}$ definieert een bijectie $(-1,1) \to (a,b)$. Verder is $(-1,1) \sim \mathbb{R}$ want $x \sim \frac{x}{1-|x|}$ bepaalt een bijectie.
Dus $(a,b) \sim \mathbb{R}$. Er is derhalve een injectie f: $\mathbb{R} \to K$. Verder is de "inbedding" van K in $\mathbb{R}$ ook in injectie. Uit Stelling 7 volgt dan $|K| = |\mathbb{R}|$.

Voorbeeld 2. $|N| = |N^k|$.
Dit is met Stelling 7 eenvoudig in te zien.
$n \leadsto (n,0,\ldots,0)$ bepaalt een injectie van N in N^k.
Laat $2,3,\ldots,p_k$ de eerste k priemgetallen zijn.
Uit de Stelling over de eenduidige ontbindbaarheid in priemfactoren volgt dat $(n_1,\ldots,n_k) \leadsto 2^{n_1}.3^{n_2}.\ldots.p_k^{n_k}$ een injectie bepaalt.

Voorbeeld 3. $|2^N| = |\mathbb{R}|$ of $2^{\aleph_0} = \aleph$.

I.h.b. volgt hieruit met Stelling 5 dat $\aleph_0 \neq \aleph$.

Om aan te tonen dat $2^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$ merken we op dat ieder reëel getal uit $[0,1] = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$ een dyadische ontwikkeling $\sum_1^\infty 2^{-n} a_n$, waarin $a_n = 0$ of 1, heeft.

Deze ontwikkeling is niet uniek. Zo is een ontwikkeling, die eindigt met 1-en (dus $a_n = 1$ vanaf zekere index), gelijkwaardig met een ontwikkeling met 0-en ($a_n = 0$ vanaf zekere index).

Laat $A \subset 2^{\mathbb{N}}$ bestaan uit alle karakteristieke functies die de waarde 1 oneindig vaak aannemen ($2^{\mathbb{N}} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$!).

Definieer f: $2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ door

$$f(c) = \sum_1^\infty \frac{c(n)}{2^n} \qquad \text{als } c \in A$$

$$f(c) = 2 + \sum_1^\infty \frac{c(n)}{2^n} \text{ als } c \notin A.$$

Omdat $f(2^{\mathbb{N}})$ een interval bevat volgt uit voorbeeld 1 dat $|f(2^{\mathbb{N}})| = |\mathbb{R}|$.
Omdat f: $2^{\mathbb{N}} \to f(2^{\mathbb{N}})$ een bijectie is, geldt $|2^{\mathbb{N}}| = \mathbb{R}$.

§5. Het Keuzeaxioma.

In deze paragraaf geven we enige equivalente formuleringen van het keuzeaxioma. In verband met het keuzeaxioma zijn vele onderzoekingen verricht betreffende de volgende twee vragen:

1. Kan uit het keuzeaxioma een tegenstrijdigheid worden afgeleid?
In 1938 heeft Gödel hierop een ontkennend antwoord gegeven: iedere contradictie die met behulp van het keuzeaxioma wordt afgeleid, kan ook zonder het keuzeaxioma worden afgeleid.

2. Kan het keuzeaxioma afgeleid worden uit de andere axioma's van de verzamelingenleer?
In 1963 is deze vraag door Cohen ontkennend beantwoord: het keuzeaxioma is onafhankelijk.

Het keuzeaxioma. Zij $\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ een niet lege familie van niet lege paarsgewijs disjuncte verzamelingen.
Dan is er een verzameling die uit iedere verzameling X_α precies één element bevat en die geen andere elementen bevat.

In de volgende formulering van het keuzeaxioma laten we de voorwaarde dat de X_α's paarsgewijs disjunct zijn weg.

Axioma A. Zij $\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ een niet lege familie van niet lege verzamelingen. Dan is er een functie
$f\colon A \to \bigcup\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ zodat $f(x) \in X_\alpha$ voor alle $\alpha \in A$.

Stelling 1: Het keuzeaxioma en axioma A zijn equivalent.

Bewijs. Axioma A impliceert het keuzeaxioma.
Laat $\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ een niet lege familie van niet lege paarsgewijs disjuncte verzamelingen zijn. Op grond van axioma A is er een functie $f\colon A \to \bigcup\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ zodat $f(x) \in X_\alpha$ voor alle $\alpha \in A$. Dan is $\{f(\alpha) \mid \alpha \in A\}$ een verzameling die uit iedere verzameling X_α één element bevat (en geen andere).
Het keuzeaxioma impliceert axioma A.
Laat $\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ een niet lege familie van niet lege verzamelingen zijn.

Voor iedere $\alpha \in A$ definieren we:
$Y_\alpha = \{(\alpha,x) \mid x \in X_\alpha\}$ en $\pi_\alpha : Y_\alpha \to X_\alpha$ door $\pi_\alpha((\alpha,x)) = x$.
De verzamelingen Y_α zijn paarsgewijs disjunct. Op grond van het keuzeaxioma is er een verzameling S die uit iedere verzameling X_α één element bevat en die geen andere elementen bevat. De functie $f: A \to \bigcup\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$, gedefinieerd door $f(\alpha) = \pi_\alpha(S \cap Y_\alpha)$, voldoet aan de eisen in axioma A.

Voor de volgende formulering van het keuzeaxioma gebruiken we het begrip van Cartesisch product van een familie van verzamelingen.

Definitie 1. Zij $\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ een niet lege familie van niet lege verzamelingen. Het Cartesisch product $\Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ van de familie $\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ is de verzameling van alle functies $f: A \to \bigcup\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ met $f(\alpha) \in X_\alpha$ voor alle $\alpha \in A$.
In formule:
$\Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in A\} = \{f \mid f: A \to \bigcup\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}, f(\alpha) \in X_\alpha$ voor $\alpha \in A\}$

Merk op dat deze definitie voor eindige A in overeenstemming gebracht kan worden met definitie 1 uit §2:
een functie gedefinieerd op een verzameling A van n elementen kunnen we laten corresponderen met een geordend n-tal.

Axioma B. Zij $\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ een niet lege familie van niet lege verzamelingen. Dan is het Cartesisch product $\Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ niet leeg.

Stelling 2: Axioma A en axioma B zijn equivalent.

Bewijs: Triviaal.

Definitie 2. Laat $f: X \to Y$ surjectief zijn. Een afbeelding $g: Y \to X$ heet een dwarssnede als $f \circ g(y) = y$ voor alle $y \in Y$.

Axioma C. Iedere surjectie $f: X \to Y$ heeft een dwarssnede.

Stelling 3: Het keuzeaxioma is equivalent met axioma C.

Bewijs: Axioma C impliceert het keuzeaxioma. Laat $\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ een niet lege familie van niet lege paarsgewijs disjuncte verzamelingen zijn. Definieer een surjectie $\pi : \bigcup\{X_\alpha \mid \alpha \in A\} \to A$ door $\pi(x) = \alpha \in A$ als $x \in X_\alpha$. Laat f een dwarssnede van π zijn. Dan is $\{f(\alpha) \mid \alpha \in A\}$ een verzameling die uit iedere verzameling X_α één element bevat (en geen andere).

Het keuzeaxioma impliceert axioma C. Laat $f: X \to Y$ een surjectie zijn. Beschouw $\{f^{-1}(y) \mid y \in Y\}$. Op grond van het keuzeaxioma is er een verzameling S die uit iedere verzameling $f^{-1}(y)$ precies een element bevat.

Definieer $g: Y \to X$ door $g(y) = f^{-1}(y) \cap S$. Dan is g een dwarssnede van f.

Met behulp van axioma C geven we een variant van de stelling van Schroeder en Bernstein (§4, Stelling 7).

Stelling 4. Als er surjecties $f: A \to B$ en $g: B \to A$ bestaan, dan is er een bijectie $h: A \to B$.

Bewijs. Neem dwarssneden $g': B \to A$ resp. $f': A \to B$ van f resp. g. Omdat iedere dwarssnede injectief is volgt de stelling uit de stelling van Schroeder en Bernstein.

Hoofdstuk II. Topologische ruimten.

In dit hoofdstuk voeren we het begrip van topologische ruimte in en behandelen we enkele (eenvoudige) topologische begrippen.

§1. Definities.

Definitie 1. Een topologische ruimte T is een paar $(V,\mathcal{O})$, waarbij V een verzameling is, $\mathcal{O}$ een stelsel deelverzamelingen van V - open verzamelingen van T genoemd - ; hierbij is aan de volgende axioma's voldaan:

OI: $\emptyset$ en V zijn open.

OII: De vereniging van een stelsel open verzamelingen is open.

OIII: De doorsnede van een eindig aantal open verzamelingen is open.

V heet de ruimte, $\mathcal{O}$ de topologie van V. De elementen van V heten punten.

We geven nu enkele voorbeelden van topologische ruimten.

Voorbeeld 1. Zij V een verzameling en $\mathcal{O} = \{\emptyset, V\}$.
Dan is $\{V,\mathcal{O}\}$ een topologische ruimte. $\mathcal{O}$ heet de indiscrete topologie op V.

Voorbeeld 2. Zij V een verzameling en $\mathcal{O}$ de familie van alle deelverzamelingen van V, $\{V,\mathcal{O}\}$ is een topologische ruimte. $\mathcal{O}$ heet de discrete topologie op V.

Merk op dat er op een verzameling V verschillende topologieën gedefinieerd kunnen worden.

Voorbeeld 3. Zij $\mathbb{R}$ de verzameling van de reële getallen.
We definieren nu als volgt een topologie voor $\mathbb{R}$.
Een deelverzameling U van $\mathbb{R}$ heet open dan en slechts dan als

$$(1) \qquad (\forall x \in U)(\exists \delta > 0)(\forall y \in \mathbb{R}) \; [\{(x-\delta) < y < (x+\delta)\} \Rightarrow y \in U]$$

m.a.w. bij ieder punt $x \in U$ is er een x bevattend interval $(x-\delta,\ x+\delta)$ te vinden met $x \in (x-\delta,\ x+\delta) \subset U$.

Zij $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ de familie van alle open verzamelingen van $\mathbb{R}$. We verifieren dat $(\mathbb{R}, \{U_\alpha \mid \alpha \in A\})$ aan axioma OIII voldoet. (Aan OI en OII is triviaal voldaan).

Laat $x \in U_{\alpha_1} \cap \ldots \cap U_{\alpha_n}$. Laat $\delta_1, \ldots, \delta_n$ voldoen aan (1) d.w.z. δ_i behoort bij U_{α_i} en x op grond van (1).

Zij $\delta = \min\{\delta_i \mid i=1,\ldots,n\}$. Dan is $x \in (x-\delta, x+\delta) \subset U_{\alpha_i}$ voor $i=1,\ldots,n$. Q.E.D.

De verkregen ruimte heet de <u>reële rechte</u>.

Merk op dat een open interval (a,b) open is.

Tenzij uitdrukkelijk anders wordt vermeld, bedoelen we met $\mathbb{R}$ de verzameling van de reële getallen met de hierboven geïntroduceerde topologie.

<u>Voorbeeld 4</u>. Een <u>metrische ruimte</u> is een paar (M,ρ), waarbij M een verzameling is en ρ een reële functie, gedefinieerd op $M \times M$ – $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$ – zodat voldaan is aan de volgende axioma's.

<u>MI</u>. $\rho(x,y) = 0$ dan en slechts dan als $x = y$.

<u>MII</u>. $\rho(x,y) + \rho(x,z) \geq \rho(y,z)$ (driehoeksongelijkheid).

ρ heet de <u>afstandsfunctie</u>. De elementen van M heten <u>punten</u> van de metrische ruimte (M,ρ)

<u>Propositie 1</u>. Zij (M,ρ) een metrische ruimte. Dan geldt

<u>MIII</u>. $\rho(x,y) \geq 0$.

<u>MIV</u> $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

<u>Bewijs</u>. MIII: Neem $y = z$ in MII.

MIV: Neem $z = x$ in MII en pas MI toe.

Een bekend voorbeeld van een metrische ruimte is de <u>E^n</u>(<u>n-dimensionale Euclidische ruimte</u>).

De punten van de E^n zijn de geordende n-tallen $\underline{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ van reële getallen. De afstandsfunctie in E^n is gedefinieerd door:

$$\rho(\underline{x},\underline{y}) = \{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Uit de ongelijkheid van Cauchy-Schwartz (bekend uit de analyse) volgt dat aan MII voldaan is.

<u>Definitie 2</u>. Laat (M,ρ) een metrische ruimte zijn en $p \in M$. Voor $\varepsilon > 0$, laat $\underline{U_\varepsilon(p)} = \{x \in M \mid \rho(x,p) < \varepsilon\}$. $U_\varepsilon(p)$ heet de <u>open ε-bal om p</u>. Een deelverzameling U van M heet <u>open</u> dan en slechts dan als

(2) $$(\forall x \in U)(\exists \varepsilon > 0)(\forall y \in M)(y \in U_\varepsilon(p) \Longrightarrow y \in U).$$

m.a.w. bij ieder punt $x \in U$ is er een x-bevattende ε-bal met $x \in U_\varepsilon(x) \subset U$.

Ga na dat de zo verkregen open verzamelingen voldoen aan O_I, O_{II} en O_{III} (vgl. voorbeeld 3). Ga ook na dat een open ε-bal open is. Wanneer we in de topologie spreken over een metrische ruimte (M,ρ) dan bedoelen we M met de hierboven geïntroduceerde topologie.

<u>Definitie 3.</u> Zij T een topologische ruimte en A een deelverzameling van T (d.w.z. $A \subset V$ als $T = (V,\mathcal{O})$). V heet een <u>omgeving</u> van A, als er een open verzameling U is met $A \subset U \subset V$. Is A eenpuntig, d.w.z. $A = \{p\}$, dan heet een omgeving van $\{p\}$ ook een <u>omgeving van p</u>.

<u>Voorbeeld 5</u>. In een metrische ruimte (M,ρ) is $U_\varepsilon(p)$ een omgeving van p.

<u>Propositie 2</u>. Een verzameling U is open dan en slechts dan als U omgeving is van ieder van zijn punten.

<u>Bewijs</u>: Het is direct duidelijk dat een open verzameling omgeving is van ieder van zijn punten.
Als U omgeving is van ieder van zijn punten, dan kunnen we bij ieder punt $p \in U$ een open verzameling $U(p)$ vinden met $p \in U(p) \subset U$. Blijkbaar is $U = \bigcup\{U(p) \mid p \in U\}$ en U is open volgens O_{II}.

Een belangrijke eigenschap van omgevingen wordt vermeld in de volgende propositie.

Propositie 3. De doorsnede van een eindig stelsel van omgevingen van een verzameling is een omgeving van die verzameling.

Bewijs. Stel V_i is een omgeving van A, $i=1,\dots,n$.
Per definitie bestaan er dan open U_i met $A \subset U_i \subset V_i$, $i=1,\dots,n$.
Nu is $A \subset \cap\{U_i \mid i=1,\dots,n\} \subset \cap\{V_i \mid i=1,\dots,n\}$, terwijl $\cap\{U_i\}$ open is op grond van O_{III}. Pas nu weer definitie 3 toe.

Om het definieren van topologische ruimten te vereenvoudigen introduceren we de begrippen van basis (definitie 4) en subbasis (definitie 5).

Definitie 4. Laat $T = (V,\mathcal{O})$. Een basis van de topologie $\mathcal{O}$ van T is een stelsel $\{B_\alpha \mid \alpha \in A\}$ van open verzamelingen van T zó dat iedere open verzameling van T de vereniging is van elementen van $\{B_\alpha \mid \alpha \in A\}$.

Voorbeeld 6. Laat M een metrische ruimte zijn. De collectie $\{U_\varepsilon(p) \mid p \in M, \varepsilon > 0\}$ is een basis van de topologie van de ruimte M.

In de volgende stelling geven we een nodig en voldoende voorwaarde opdat een stelsel $\{B_\alpha \mid \alpha \in A\}$ van deelverzamelingen van V basis is van een topologie op V.

Stelling 1. Laat $\mathcal{B} = \{B_\alpha \mid \alpha \in A\}$ een stelsel deelverzamelingen van V zijn. $\mathcal{B}$ is basis van een topologie op V (en deze topologie is dan bepaald door $\mathcal{B}$) dan en slechts dan als

1°. $V = \cup\{B_\alpha \mid \alpha \in A\}$

2°. $B_\alpha \cap B_\beta$ is de vereniging van elementen van $\mathcal{B}$ voor ieder tweetal indices $\alpha, \beta \in A$.

Bewijs. "slechts dan". Als $\mathcal{B}$ basis is van een topologie op V, dan is een verzameling open dan en slechts dan als hij de vereniging is van elementen van $\mathcal{B}$. Hieruit volgt dat de topologie bepaald is door $\mathcal{B}$. Omdat $B_\alpha \cap B_\beta$ open is, is aan 2° voldaan.
"dan". Laat $\mathcal{O}$ de collectie van alle verenigingen van elementen van $\mathcal{B}$ zijn. We gaan na dat aan de axioma's O_I, OII en O_{III} voldaan is.

$V \in \mathcal{O}$ op grond van voorwaarde <u>1^o</u>. $\emptyset = \bigcup\{B_\alpha \mid \alpha \in \emptyset \subset A\}$ en dus ook $\emptyset \in \mathcal{O}$.

Het is direct duidelijk dat aan OII is voldaan.

Tenslotte verifieren we dat aan OIII voldaan is. Het is voldoende te bewijzen dat de doorsnede van twee verzamelingen U_1 en U_2 uit $\mathcal{O}$ weer tot $\mathcal{O}$ behoort (daarna kan het bewijs voltooid worden met volledige inductie). Laat $U_1 = \bigcup\{B_\gamma \mid \gamma \subset \Gamma \subset A\}$ en $U_2 = \{B_\delta \mid \delta \in \Delta \subset A\}$.

Dan is

$$U_1 \cap U_2 = [\bigcup\{B_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}] \cap [\bigcup\{B_\delta \mid \delta \in \Delta\}]$$

$$= \bigcup\{B_\gamma \cap B_\delta \mid \gamma \in \Gamma,\ \delta \in \Delta\} \quad \text{(vgl. Hfst. 1, §1, St.1).}$$

Volgens <u>2^o</u> behoort iedere $B_\gamma \cap B_\delta$ tot $\mathcal{O}(\gamma \in \Gamma,\ \delta \in \Delta)$ en dus ook hun vereniging. Dus $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$.

Stel dat van een verzameling V twee stelsels deelverzamelingen $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$ gegeven zijn die beide basis zijn van een topologie op V, (dus beide voldoen aan de voorwaarden in Stelling 1).

De volgende stelling geeft een nodige en voldoende voorwaarde opdat $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$ dezelfde topologie bepalen.

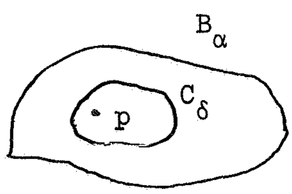
<u>Stelling 2</u>. Laat $\mathcal{B} = \{B_\alpha \mid \alpha \in A\}$ en $\mathcal{C} = \{C_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ beide basis zijn voor een topologie op V.

B en C bepalen dezelfde topologie dan en slechts dan als

$(\forall\alpha)(\forall p \in B_\alpha)(\exists\delta)(p \in C_\delta \subset B_\alpha)$ en (omgekeerd)

$(\forall\delta)(\forall p \in C_\delta)(\exists\alpha)(p \in B_\alpha \subset C_\delta)$.

Deze stelling wordt het <u>gelijkwaardigheidscriterium van Hausdorff</u> genoemd.



<u>Bewijs</u>. "dan". Stel $\mathcal{B}$ bepaalt een topologie $\mathcal{O}_1$ en $\mathcal{C}$ bepaalt een topologie $\mathcal{O}_2$.

We moeten aantonen dat voor alle U geldt $U \in \mathcal{O}_1 \Longleftrightarrow U \in \mathcal{O}_2$. Daartoe merken we eerst op dat uit de voorwaarden van de stelling volgt dat iedere B_α de vereniging is van C_δ's dus open in $\mathcal{O}_2$; m.a.w. $B_\alpha \in \mathcal{O}_2$. Omgekeerd is $C_\delta \in \mathcal{O}_1$ voor iedere $\delta \in \Delta$.

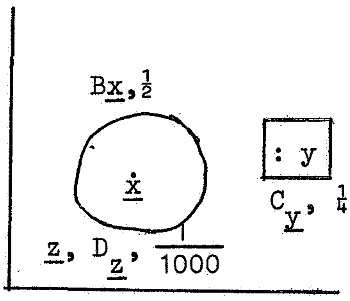
Is nu $U \in \mathcal{O}_1$, dan is U de vereniging van B_α's. Dus $U \in \mathcal{O}_2$ (axioma OII).
Analoog bewijst men: $U \in \mathcal{O}_2 \Rightarrow U \in \mathcal{O}_1$.
"slechts dan". Is $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$, dan is zowel $\mathcal{B}$ als $\mathcal{C}$ een basis van $T = (V,\mathcal{O}_1) = (V,\mathcal{O}_2)$. Ieder element van $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{C}$) is open, dus de vereniging van elementen uit $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{B}$). Hieruit volgt het gestelde.

Voorbeeld 7. Zij P de verzameling van alle geordende paren $\underline{x}$ van reële getallen; $\underline{x} = (x_1, x_2)$.

1°. basis voor een topologie $\mathcal{O}_1$: $\mathcal{B}_1 = \{B_{\underline{x},n} \mid \underline{x} \in P,\ n=1,2,\ldots\}$
met $B_{\underline{x},n} = \{\underline{y} \mid \{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2\}^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{n}\}$.

2°. basis voor een topologie $\mathcal{O}_2$: $\mathcal{B}_2 = \{C_{\underline{x},n} \mid x \in P,\ n=1,2,\ldots\}$
met $C_{\underline{x},n} = \{\underline{y} \mid \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\} < \frac{1}{n}\}$

3°. basis voor een topologie $\mathcal{O}_3$:
$\mathcal{B}_3 = \{D_{\underline{x},n} \mid \underline{x} \in P,\ n=1,2,\ldots\}$ met
$D_{\underline{x},n} = \{\underline{y} \mid x^2 + 2y^2 < \frac{1}{n^2}\}$.



Ga na dat
$(P,\mathcal{O}_1) = (P,\mathcal{O}_2) = (P,\mathcal{O}_3) = E^2$.

Wanneer we in Stelling 2 de basis $\mathcal{C}$ gelijk nemen aan een topologie $\mathcal{O}$ op V, dan krijgen we de volgende karakterisering van een basis (ga na).

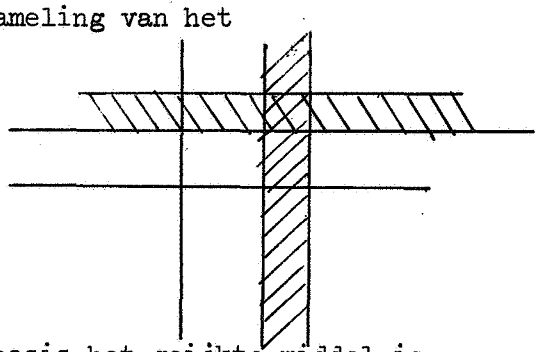
Stelling 3. Laat $(V,\mathcal{O})$ een topologische ruimte zijn en laat $\mathcal{B}$ een deelverzameling zijn van $\mathcal{O}$.
$\mathcal{B}$ is een basis voor de topologie $\mathcal{O}$ dan en slechts dan als
$(\forall p \in V)(\forall U \in \mathcal{O})\ (\exists B \in \mathcal{B})(p \in U \Rightarrow p \in B \subset U)$.

Definitie 5. Een ruimte $(V,\mathcal{O})$ voldoet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma indien er een aftelbare basis $\mathcal{B}$ voor de topologie $\mathcal{O}$ is.

Voorbeeld 8. De E^n voldoet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma. Zij n.l. $P = (x_1,\ldots,x_n) \mid x_i$ rationaal, $i=1,\ldots,n\}$.
Dan is $\mathcal{B} = \{U_{\frac{1}{n}}(\underline{x}) \mid \underline{x} \in P,\ n=1,2,\ldots\}$ een aftelbare basis.

Definitie 6. Laat $T = (V,\mathcal{O})$. Een subbasis van de topologie $\mathcal{O}$ van T is een stelsel $\mathcal{S}$ van open verzamelingen van T, zó dat de familie van eindige doorsneden van elementen van $\mathcal{S}$ een basis vormt voor de topologie $\mathcal{O}$ van T.

Voorbeeld 9. Een strook in E^2 is een verzameling van het type
$\{(x,y) \mid a < x < b\}$ of
$\{(x,y) \mid a < y < b\}$. De collectie van alle stroken vormt een subbasis voor de topologie van E^2.



De volgende stelling laat zien dat een subbasis het geijkte middel is om een topologie te introduceren.

Stelling 4. Zij V een verzameling en $\mathcal{S}$ een stelsel deelverzamelingen van V. Dan is $\mathcal{S}$ subbasis van een topologie $\mathcal{O}$ op V en $\mathcal{O}$ is door $\mathcal{S}$ bepaald.

Bewijs. Laat $\mathcal{S} = \{S_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Dan is $V = \bigcap\{S_\alpha \mid \alpha \in \emptyset\}$. (Opmerking: Dit is niet consistent met Hoofdstuk 1, §3, definitie 4. We kunnen echter definieren $|\emptyset| = 0$ en 0 is een eindig kardinaalgetal). Verder is het niet moeilijk om in te zien dat aan de voorwaarden $\underline{1^o}$ en $\underline{2^o}$ van Stelling 1 voldaan is.

Propositie 4. Een topologische ruimte $(V,\mathcal{O})$ voldoet aan het tweede aftelbaarheidsaxioma dan en slechts dan als er een aftelbare subbasis $\mathcal{S}$ voor de topologie $\mathcal{O}$ is.

§2. Gesloten verzameling, afsluiting en inwendige.

In deze paragraaf bespreken we enige begrippen die afgeleid zijn uit het begrip van open verzameling.

Definitie 1. Een deelverzameling G van een topologische ruimte X heet gesloten indien $T \setminus G$ open is.

Uit deze definitie en de axioma's OI, OII en OIII volgt onmiddellijk de volgende stelling.

Stelling 1. Zij $X = (V, \mathcal{O})$ een topologische ruimte.
FI. $\emptyset$ en V zijn gesloten.
FII. De doorsnede van een stelsel gesloten verzamelingen is gesloten.
FIII. De vereniging van een eindig aantal gesloten verzamelingen is gesloten.

Uit eigenschap FI en axioma OI blijkt dat zowel $\emptyset$ als V zowel open als gesloten zijn (we zullen dit opgesloten noemen). In de E^n zijn dit de enige opgesloten verzamelingen. Is de ruimte niet samenhangend dan zijn er nog andere opgesloten verzamelingen. Zie Hoofdstuk III, §1.

Definitie 2. Zij $X = (V, \mathcal{O})$ een topologische ruimte.
De afsluitingsoperator voegt aan iedere deelverzameling A van V een deelverzameling $\bar{A}$ van V toe, het gesloten omhulsel van A genaamd, als volgt:
$\bar{A} = \bigcap \{G \mid A \subset G \text{ en } G \text{ gesloten}\}$.

Merk op dat de afsluitingsoperator een afbeelding van $\mathcal{P}(X)$ in $\mathcal{P}(X)$ is. Uit FII volgt dat $\bar{A}$ gesloten is. Blijkbaar is $\bar{A}$ de kleinste gesloten verzameling die A bevat.

Enkele eigenschappen van de afsluitingsoperator zijn opgesomd in de volgende stelling.

<u>Stelling 2.</u> Zij X een topologische ruimte en $A, B \subset X$. Dan geldt:

<u>1</u>. $\overline{A}$ is gesloten.

<u>2</u>. A is gesloten dan en slechts dan als $A = \overline{A}$.

<u>3</u>. $A \subset \overline{A}$.

<u>4</u>. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

<u>5</u>. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

<u>6</u>. Als $A \subset B$, dan $\overline{A} \subset \overline{B}$.

<u>7</u>. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

<u>8</u>. $\overline{A} \setminus \overline{B} \subset \overline{A \setminus B}$.

<u>Bewijs</u>. <u>1</u> volgt uit de opmerking voorafgaande aan de stelling <u>2</u>
"dan" uit 1. "slechts dan" uit definitie van gesloten omhulsel.
<u>3</u> is triviaal.
<u>4</u> volgt uit <u>1</u> en <u>2</u>: $\overline{A}$ is gesloten, dus $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
<u>5</u> $A \subset \overline{A}$, $B \subset \overline{B}$, dus $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Maar $\overline{A} \cup \overline{B}$ is gesloten (FIII). Dus $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.
Verder is $A \subset A \cup B$, dus $A \subset \overline{A \cup B}$ (met 3). Dan is $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$. Evenzo $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Dus $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.
Q.E.D.
<u>6</u> Laat $A \subset B$. Dan is $B = A \cup (B \setminus A)$. Dus $\overline{B} = \overline{A} \cup \overline{(B \setminus A)}$.
Dus $\overline{A} \subset \overline{B}$.
<u>7</u> uit <u>6</u>.
<u>8</u> $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B} = \overline{(A \setminus B) \cup B} = \overline{(A \setminus B)} \cup \overline{B}$.
Dus $(\overline{A} \cup \overline{B}) \setminus \overline{B} = [\overline{(A \setminus B)} \cup \overline{B}] \setminus \overline{B}$.
Dus $\overline{A} \setminus \overline{B} = \overline{(A \setminus B)} \setminus \overline{B}$.

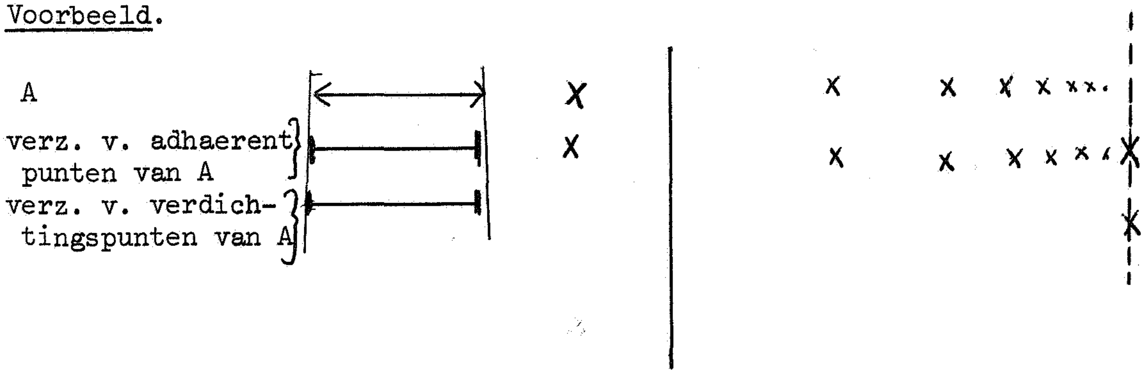
In 7 en 8 hoeft geen gelijkheid te gelden: Neem voor A (resp. B) de verzameling van de rationale (resp. irrationale) getallen.

In de volgende stelling geven we het verband aan tussen de begrippen van afsluiting en van omgeving. Daartoe voeren we eerst het begrip "adhaerent punt" en het begrip "verdichtingspunt" in.

<u>Definitie 3</u>. Zij A een deelverzameling van een topologische ruimte X en p $\in$ X. p heet <u>adhaerent punt</u> van A als iedere omgeving van p een punt uit A bevat.
p heet <u>verdichtingspunt</u> van A, als iedere omgeving van p minstens <u>een van p verschillend punt uit A</u> bevat.

Merk op dat ieder punt van A adhaerent punt van A is.

<u>Voorbeeld</u>.



<u>Stelling 3</u>. Laat X een topologische ruimte zijn en A $\subset$ X.
Dan is
$\bar{A} = \{p \mid p \text{ is adhaerent punt van } A\}$
$\bar{A} = A \cup \{p \mid p \text{ is verdichtingspunt van } A\}$.

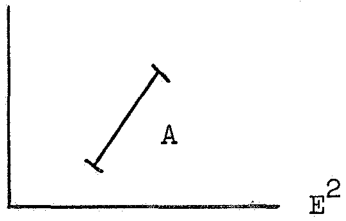
<u>Bewijs</u>. Omdat zowel ieder punt van A als ieder verdichtingspunt van A tevens adhaerent punt van A zijn, is het vòldoende de tweede gelijkheid te bewijzen.
Laat B = $A \cup \{p \mid p \text{ is verdichtingspunt van } A\}$.
We tonen eerst aan dat B $\subset \bar{A}$. $\bar{A}$ is gesloten, dus $T \setminus \bar{A}$ is open. Uit Stelling 1 uit §1 volgt dat $T \setminus \bar{A}$ omgeving is van ieder van zijn punten. Geen enkel punt van $T \setminus \bar{A}$ is dan verdichtingspunt van A. Dus B $\subset \bar{A}$.
Vervolgens tonen we aan dat B gesloten is (waaruit volgt $\bar{A} \subset$ B).
Daartoe bewijzen we dat $T \setminus B$ open is. Laat q $\in T \setminus B$. q is geen verdichtingspunt van A. Er is dan een <u>open</u> omgeving U(q) van q zodat U(q) <u>geen</u> van q verschillend punt uit A bevat. Echter ook q $\notin$ A. Dus U(q) $\subset T \setminus B$. Dus $T \setminus B$ is omgeving van ieder van zijn punten en derhalve open (weer §1, Stelling 1).

<u>Voorbeeld</u>. Laat $\mathbb{R}$ de reële rechte zijn.
Zij $A = \{\text{rationale getallen uit } [0,1]\} \cup \{2\} \cup [3,4) \cup (4,5]$. Uit A ontstaan door herhaald toepassen van de afsluitingsoperator en het nemen van complementen in het totaal 14 verschillende verzamelingen. Ga dit na. (Men kan bewijzen dat 14 het maximale aantal verzamelingen is dat op deze wijze uit een gegeven verzameling verkregen kan worden).

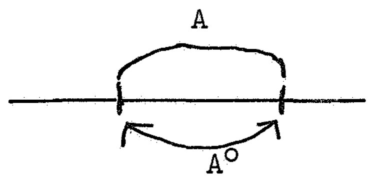
We gaan nu het begrip gesloten omhulsel "dualiseren".

<u>Definitie 4</u>. Zij A een verzameling in een topologische ruimte X. Dan is het <u>inwendige van A</u>, notatie A°, de grootste open verzameling welke bevat is in A.
Blijkbaar is $A^{\circ} = \bigcup \{U \mid U \subset A, U \text{ open}\}$.

<u>Voorbeeld 1</u>. $X = E^2$.
$A = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.
Dan is $A^{\circ} = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$.



<u>Voorbeeld 2</u>. $X = E^2$.
A = segment (zie plaatje)
Dan $A^{\circ} = \emptyset$.



<u>Voorbeeld 3</u>. $X = E^1$.
$A = [0,1]$ (is een segment)
Dan $A^{\circ} = (0,1)$.

<u>Let dus goed op</u>: Begrippen als open, gesloten en inwendige zijn relatief d.w.z. afhankelijk van de ruimte waarin de betreffende verzameling ligt. Indien verwarring mogelijk is, moeten we altijd zeggen b.v. open <u>in E^1</u>, <u>in E^2</u>.

In de volgende stelling zijn enkele eigenschappen van de operator ("het nemen van het inwendige") opgesomd. De bewijzen zijn analoog aan die in Stelling 2 en blijven achterwege.

<u>Stelling 4</u>. Zij X een topologische ruimte en $A, B \subset X$.
Dan geldt:

<u>1</u>. A is open.
<u>2</u>. A is open dan en slechts dan als $A = A^{o}$.
<u>3</u>. $A^{o} \subset A$.
<u>4</u>. $A^{oo} = A^{o}$.
<u>5</u>. $(A \cap B)^{o} = A^{o} \cap B^{o}$.
<u>6</u>. Als $A \subset B$, dan $A^{o} \subset B^{o}$.
<u>7</u>. $(A \cup B)^{o} \supset A^{o} \cup B^{o}$

In de volgende stelling geven we de relatie tussen de operatoren ^{o} en $^{-}$.
We voeren eerst de volgende notatie in:
<u>Notatie</u>: $X \setminus A = A^{c}$.

<u>Stelling 5</u>. Zij X een topologische ruimte en $A \subset X$.
Dan geldt:

<u>1</u>. $A^{o} = A^{c-c}$
<u>2</u>. $A^{-} = A^{coc}$

<u>Bewijs.</u> Om <u>1</u> te bewijzen tonen we achtereenvolgens aan dat $A^{o} \subset A^{c-c}$ en $A^{o} \supset A^{c-c}$.
Omdat $A^{o} \subset A$, geldt $A^{oc} \supset A^{c}$. Omdat A^{oc} gesloten is, geldt $A^{oc} \supset A^{c-}$.
Door nogmaals complementen te nemen vinden we $A^{o} = A^{occ} \subset A^{c-c}$.
Omdat $A^{c} \subset A^{c-}$, geldt $A \supset A^{c-c}$. Nu is A^{c-c} open en dus $A^{o} \supset A^{c-c}$.
Hiermee is <u>1</u> bewezen.
Met behulp van <u>1</u> vinden we $A^{coc} = A^{cc-cc} = A^{-}$.

<u>Definitie 5</u>. Zij X een topologische ruimte en $A \subset X$.
Het <u>uitwendige van A</u> is A^{co}.

Uit Stelling 5 volgt dat het uitwendige van A ook gelijk is aan A^{-c}.

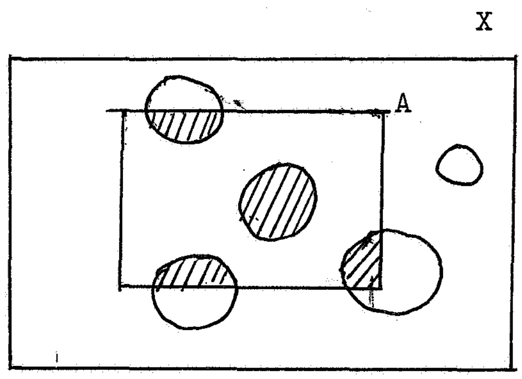
<u>Voorbeeld 4</u>. Laat $A \subset E^{2}$ gegeven zijn door $A = \{(x,y) \mid x^{2} + y^{2} \leq 1\}$.
Het inwendige van A is $\{(x,y) \mid x^{2} + y^{2} < 1\}$. Het uitwendige van A is $\{(x,y) \mid x^{2} + y^{2} > 1\}$

Op deze wijze hoort bij iedere verzameling A uit een topologische ruimte X een <u>partitie</u> van X bestaande uit drie verzamelingen d.w.z. een verdeling van X in drie paarsgewijs disjuncte verzamelingen, n.l. het inwendige van A, het uitwendige van A en de rest. De rest heet rand van A, notatie $\mathcal{R}(A)$.
In formule: $\mathcal{R}(A) = (A^{o} \cup A^{co})^{c} = A^{oc} \cap A^{coc} = A^{c-} \cap A^{-}$.

Uit de laatste formule blijkt dat $\mathcal{R}(A)$ een gesloten verzameling is. Merk op dat de rand van een verzameling erg dik kan zijn. Voorbeeld: Is A de verzameling van de rationale getallen in $\mathbb{R}$, dan is $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}$.

§3. Relatieve topologie.

Zij X een topologische ruimte en $A \subset X$. Nu induceert de topologie van X op natuurlijke wijze een topologie op A. De open verzamelingen in A zijn per definitie de doorsneden van de open verzamelingen in X met A.



Definitie 1. Zij $X = (V, \mathcal{O})$ een topologische ruimte en A een deelverzameling van V. Dan heet $\{U \cap A \mid U \in \mathcal{O}\}$ de relatieve topologie (van X) op A. $(A, \{U \cap A \mid U \in \mathcal{O}\})$ heet een deelruimte van X.

Ga na dat $\{U \cap A \mid U \in \mathcal{O}\}$ inderdaad een topologie is.

Voorbeeld. In het gesloten interval $[0,1]$, opgevat als deelruimte van $\mathbb{R}$, is de verzameling $[0,\frac{1}{2}) = \{x \mid 0 \leq x < \frac{1}{2}\}$ open. Immers $[0,\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cap [0,1]$ en $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ is open in $\mathbb{R}$.

Definitie 2. De n-dimensionale sfeer S^n is de verzameling $\{\underline{x} \mid \underline{x} \in E^{n+1}, x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\}$ met de relatieve topologie van E^{n+1}.

De volgende proposities zijn met weinig moeite af te leiden uit definitie 1.

Propositie 1. Zij X een deelruimte van Y en Y een deelruimte van Z. Dan is X een deelruimte van Z.

Propositie 2. Een verzameling A in een topologische ruimte X is open (resp. gesloten) dan en slechts dan als iedere in de deelruimte A open (resp. gesloten) verzameling open (resp. gesloten) is in X.

Stelling 1. Zij X een deelruimte van Y en $A \subset X$.
Zij A^{-X} (resp. A^{-Y}) het gesloten omhulsel van A in X (resp. Y).
Dan is: $A^{-X} = A^{-Y} \cap X$.

<u>Bewijs</u>. $A^{-Y} = \bigcap\{G \mid A \subset G,\ G \text{ gesloten in } Y\}$ (§2, Definitie 2).

Dus $A^{-Y} \cap X = [\bigcap\{G \mid A \subset G,\ G \text{ gesloten in } Y\}] \cap X =$

$$= \bigcap\{G \cap X \mid A \subset G,\ G \text{ gesloten in } Y\} =$$

$$= \bigcap\{G \cap X \mid A \subset G \cap X,\ G \cap X \text{ gesloten in } X\} =$$

$$= A^{-X}.$$

De afsluiting van een verzameling A in de deelruimte X van Y wordt dus verkregen door de afsluiting van A in Y te doorsnijden met X. Een ander bewijs van Stelling 1 kan gebaseerd worden op §2, Stelling 3. Ga dit na.

Merk op dat een soortgelijke stelling niet geldt voor de operator ^{o} of $\mathcal{R}$:

<u>NIET</u> altijd: $A^{oX} = A^{oY} \cap X \qquad (A \subset X \subset Y)$

$$\mathcal{R}_X(A) = \mathcal{R}(A) \cap X \qquad (A \subset X \subset Y)$$

(Neem bijvoorbeeld A = X is de verzameling van de rationale getallen en $Y = \mathbb{R}$).

§4. Continue afbeeldingen.

Laat $X_i = (V_i, \mathcal{O}_i)$ voor $i = 1,2$ topologische ruimten zijn. Onder een afbeelding $f : X_1 \to X_2$ verstaan we een afbeelding $f : V_1 \to V_2$.
Merk op dat een afbeelding $f : V_1 \to V_2$ een afbeelding van $P(V_1) \to P(V_2)$ induceert (vgl. Definitie 4 in Hoofdstuk 1).

Definitie 1. Een bijectieve afbeelding f van een topologische ruimte X_1 in een topologische ruimte X_2 heet een topologische afbeelding als onder f de open verzamelingen van X_1 worden afgebeeld op de open verzamelingen van X_1 op de open verzamelingen van X_2).
Twee topologische ruimten waartussen een topologische afbeelding bestaat heten topologisch equivalent of homeomorf. Een topologische invariant is een eigenschap die bewaard blijft bij een topologische afbeelding.

Merk op dat als f een topologische afbeelding is, dan ook f^{-1} een topologische afbeelding is.

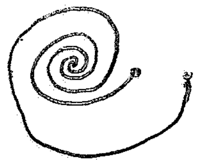
In het volgende hoofdstuk zullen we een grote hoeveelheid van topologische invarianten bestuderen.
Het tweede aftelbaarheidsaxioma (§1, Definitie 5) is een voorbeeld van een topologische invariant.
I.h.a. is iedere eigenschap welke geformuleerd kan worden in termen van punten en open verzamelingen een topologische invariant.

Voorbeelden van topologische afbeeldingen.
1. $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) = \mathrm{tg}x$ is een topologische afbeelding van het segment $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, opgevat als deelruimte van $\mathbb{R}$, op $\mathbb{R}$.
R is dus homeomorf met een open interval. I.h.b. volgt hieruit dat afstand geen topologisch begrip is.

2. Zij T_1 het segment $[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]$.
T_2 is het beeld van T_1 onder de volgende afbeelding $f : T_1 \to E^2$.
De punten van E^2 worden gegeven in poolcoordinaten (r,ϕ).

$$\begin{cases} f(x) = (e^{1/x}, 1/x) \text{ voor } -\frac{1}{2\pi} \leq x < 0. \\ f(x) = (2e^{-1/x}, -\frac{1}{x}) \text{ voor } 0 < x \leq \frac{1}{2\pi} \\ f(0) = (0,0) \end{cases}$$

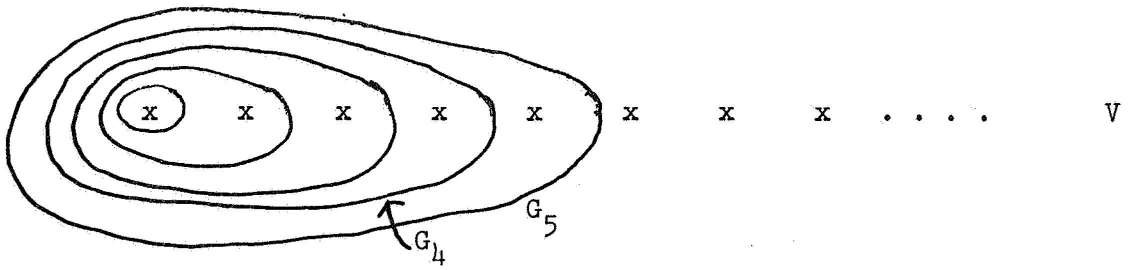
T_2 heeft de relatief topologie van E^2.
f is topologisch.



T_2

3. Zij V de verzameling van de natuurlijke getallen. We definiëren hierop de volgende topologie $\mathcal{O}$:

$\mathcal{O} = \{\emptyset, V, G_n \mid n = 1,2,\ldots\}$ met $G_n = \{x \,/\, x \in V,\ x \leq n\}$.



Bewering: Als f een topologische afbeelding is van V op V, dan is f de identieke afbeelding d.w.z. $f(n) = n$ voor alle $n \in V$.
De topologische ruimte (V,Q) is dus in zekere mate "star".
(Ga na dat $\mathbb{R}$ niet "star" is).
Bewijs van de bewering: Stel $n \in V$. Dan behoort n <u>niet</u> tot $\emptyset$, $G_1, \ldots, G_{n-1}$.
Dus n behoort <u>niet</u> tot precies n open verzamelingen. Uiteraard is dit aantal een topologische invariant.
Dus $f(n) = n$.

<u>Definitie 2</u>. Een afbeelding f van een topologische ruimte X_1 in een topologische ruimte X_2 heet <u>continu</u> als het volledig origineel onder f van iedere open verzameling van X_2 open is in X_1.

Ga na dat definitie 2 equivalent is met de volgende definitie.

<u>Definitie 3</u>. Een afbeelding f van een topologische ruimte X_1 in een topologische ruimte X_2 heet <u>continu</u> als het volledig origineel onder f van iedere gesloten verzameling van X_2 gesloten is in X_1.

We definiëren nu het begrip van continuïteit in een punt en geven de relatie tussen dit begrip en het begrip van continuïteit.

<u>Definitie 4.</u> Een afbeelding $f : X_1 \to X_2$ heet <u>continu in een punt $x_0 \in X_1$</u> indien er bij iedere omgeving $U(f(x_0))$ van $f(x_0)$ een omgeving $W(x_0)$ van x_0 bestaat zodat $f(W(x_0)) \subset U(f(x_0))$.

<u>Stelling 1.</u> Een afbeelding $f : X_1 \to X_2$ is continu dan en slechts dan als f continu is in ieder punt van X_1.

<u>Bewijs.</u> "slechts dan". Triviaal.
"dan". Zij U een open verzameling in X_2. We moeten aantonen dat $f^{-1}(U)$ open is in X_1. Zij $x \in f^{-1}(U)$.
Dan $f(x) \in U$ en U is een omgeving van $f(x)$. Kies nu bij x op grond van definitie 4 een omgeving $W(x)$ van x met $f(W(x)) \subset U$. Nu is $x \in W(x) \subset f^{-1}(U)$.
Dus $f^{-1}(U)$ is een omgeving van x.
Op grond van §1, Propositie 2, volgt hieruit dat $f^{-1}(U)$ open is.

<u>Definitie 5.</u> Een afbeelding $f : X_1 \to X_2$ heet <u>open</u> (resp. <u>gesloten</u>) als het beeld onder f van een <u>open</u> (resp. <u>gesloten</u>) verzameling in X_1 open (resp. gesloten) is in X_2.

Ga de drie volgende stellingen zelf na.

<u>Stelling 2.</u> Zij $f : X_1 \to X_2$ een bijectieve afbeelding.
De volgende voorwaarden 1 tot en met 5 zijn equivalent.
<u>1</u>. f is topologisch.
<u>2</u>. f is continu en f^{-1} is continu.
<u>3</u>. f is open en f^{-1} is open.
<u>4</u>. f is gesloten en f^{-1} is gesloten.
<u>5</u>. f is continu en f is open of gesloten.

<u>Stelling 3.</u> Zijn $f : X_1 \to X_2$ en $g : X_2 \to X_3$ continu, dan is de compositie $g.f : X_1 \to X_3$ (de samenstelling van f en g) ook continu.

<u>Stelling 4.</u> Zij $f : X_1 \to X_2$ een continue afbeelding en A een deelverzameling van X_1. Dan is $f|A : A \to X_2$ een continue afbeelding.

Voorbeelden van continue afbeeldingen.

1. Zij X_1 willekeurig en laat X_2 bestaan uit één punt $*$ (met unieke topologie!). Definieër $f : X_1 \to X_2$ door $f(x) = *$ als $x \in X_1$. Dan is f continu.

2. Zij $p < q$. Definiëer $f : E^q \to E^p$ door $(x_1,\ldots,x_p,x_{p+1},\ldots,x_q) \overset{f}{\rightsquigarrow} (x_1,\ldots,x_p)$. Dan is f continu.

3. Zij $X_1 = \mathbb{R}$ en $X_2 = S^1$.
Definiëer $f : \mathbb{R} \to S^1$ door $f(x) = (1,2\pi x)$ (poolcoördinaten).
Ga de continuïteit van f na.
$f|[0,1)$ is continu op grond van stelling 4.
De afbeelding $g = f|[0,1)$ is noch open, noch gesloten.
(Bv. $[1/2,1)$ is gesloten in $[0,1)$ en $g([1/2,1))$ is niet gesloten).
g is dus niet een topologische afbeelding.

4. Met behulp van poolcoördinaten definiëren we een afbeelding $f : E^2 \to E^2$ als volgt: $f((r,\phi)) = (r,k\phi)$, waarbij k een vast natuurlijk getal is.
f is zowel continu als open. Slechts voor $k = 1$ is f bijectief en dan uiteraard topologisch.

5. Op een erg ruwe wijze kunnen wij continue en topologische afbeeldingen als volgt karakteriseren.
Bij een continue afbeelding mogen we plakken en lijmen, echter niets scheuren. Bij een topologische afbeelding zijn noch het plakken en lijmen, noch het scheuren van de ruimte toegestaan.

Hoofdstuk III. Topologische invarianten.

In dit hoofdstuk behandelen wij de belangrijkste topologische invarianten: samenhang, compactheid en de scheidingsaxioma's.

1. Samenhang.

Definities. Een topologische ruimte X heet *samenhangend*, indien $\emptyset$ en X de enige opgesloten verzamelingen van X zijn.
Een deelverzameling A van een topologische ruimte X heet samenhangend, indien A als deelruimte opgevat samenhangend is.
Een topologische ruimte X heet *splitsbaar* indien X niet samenhangend is.

Ga de volgende propositie zelf na.

Propositie 1. Een topologische ruimte X heet *splitsbaar* dan en slechts dan indien er niet lege, opgesloten verzamelingen A en B bestaan met $X = A \cup B$ en $\emptyset = A \cap B$.

Voorbeeld 1. De reële rechte $\mathbb{R}$ is samenhangend.
Bewijs. Stel $\mathbb{R}$ is splitsbaar: $\mathbb{R} = A \cup B$ met $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ en A en B opgesloten. Neem $x \in A$ en $y \in B$. Stel $x < y$. (Het geval $x > y$ kan analoog behandeld worden). Zij $C = A \cap \{z \mid z < y\}$. C is open als doorsnede van twee open verzamelingen. Merk op dat, omdat $y \notin A$, ook geldt $C = A \cap \{z \mid z \leq y\}$. Hieruit volgt dat C ook gesloten is.
C is dus een opgesloten verzameling. Omdat C naar boven begrensd is (y is een bovengrens) en niet leeg is ($x \in C$), is er een kleinste bovengrens q van C. Omdat C gesloten is, geldt $q \in C$. Omdat C open is, is er een $\delta > 0$ zodat $(q-\delta, q+\delta) \subset C$. Dit is in tegenspraak met het feit dat q de (kleinste) bovengrens van C is. Dus $\mathbb{R}$ is samenhangend.

Voorbeeld 2. De E^n is samenhangend.
Bewijs. Zij $A \subset E^n$, $A = \emptyset$ en $A \neq E^n$, en A opgesloten. Neem $x \in A$ en $y \in E^n \setminus A$. Zij L de verbindingslijn van x en y. $L \cap A$ is een opgesloten verzameling in de deelruimte L. $L \cap A \neq \emptyset$ en $L \cap A \neq L$. Dus L is splitsbaar. Maar L is homeomorf met $\mathbb{R}$. Tegenspraak.

Samenhang is natuurlijk een topologische invariant. Het is zelfs een <u>continue invariant</u> in de volgende zin.

<u>Stelling 1</u>. Samenhang is een continue invariant d.w.z. als $f : X_1 \to X_2$ continu is en X_1 is samenhangend, dan is $f(X_1)$ ook samenhangend.

<u>Bewijs.</u> Stel $f(X_1)$ is splitsbaar. Er is dan een niet-lege opgesloten deelverzameling B van $f(X_1)$ zodat $B \neq f(X_1)$. Omdat f continu is, is $f^{-1}(B)$ opgesloten. Maar $f^{-1}(B) \neq \emptyset$ en $f^{-1}(B) \neq X_1$. Dit is in tegenspraak met de samenhang van X_1.

<u>Voorbeeld 3</u>. Voor $n \geq 1$ is S^n samenhangend.
Bewijs: We gebruiken vectornotatie. Definiëer $f : E^{n+1} \setminus \{\underline{0}\} \to S^n$ door $\underline{x} \rightsquigarrow \dfrac{\underline{x}}{||\underline{x}||}$. Ga na dat f een continue surjectie is. Omdat $E^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}$ samenhangend is (ga na), volgt het gestelde uit stelling 1.

<u>Stelling 2</u>. Als een topologische ruimte X de vereniging is van een stelsel verzamelingen $\{B_\alpha | \alpha \in A\}$, zódat iedere $B_\alpha (\alpha \in A)$, als deelruimte opgevat, samenhangend is en $B_\beta \cap B_\alpha \neq \emptyset$ voor alle $\alpha, \beta \in A$, dan is X samenhangend.

<u>Bewijs</u>. Stel $B \neq \emptyset$ is een opgesloten deelverzameling van X. Is $\alpha \in A$, dan is wegens de samenhang van B_α óf $B_\alpha \subset B$ óf $B_\alpha \subset X \setminus B$. Omdat $B \neq \emptyset$, geldt $B_\gamma \subset B$ voor zekere $\gamma \in A$. Omdat voor iedere $\alpha \in A$ geldt $B_\beta \cap B_\gamma \neq \emptyset$ voor iedere $\alpha \in A$. Dus $B_\alpha \subset B$ voor iedere $\alpha \in A$. Dus $B = X$. Hieruit volgt dat X samenhangend is.

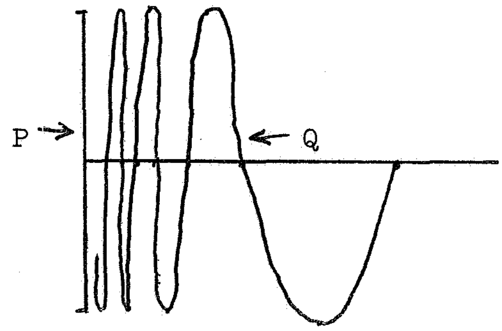
<u>Stelling 3</u>. Laat A een samenhangende deelverzameling van een topologische ruimte X zijn.
Dan is $\overline{A}$ samenhangend.

<u>Bewijs.</u> Stel $\overline{A}$ is splitsbaar. Zij B een opgesloten deelverzameling van $\overline{A}$, $B \neq \overline{A}$, $B \neq \emptyset$.
Dan is, omdat A samenhangend is, óf $A \subset B$ of $A \subset X \setminus B$.
Stel $A \subset B$. (Het geval $A \subset X \setminus B$ is analoog te behandelen). B is gesloten in $\overline{A}$ en $\overline{A}$ is gesloten in X. Met Hoofdstuk I, § 3, Propositie 2, volgt hieruit dat B gesloten is in X. Maar dan ook $\overline{A} \subset B$. Dus $\overline{A} = B$. Tegenspraak.

Stelling 4. Zij A een samenhangende deelverzameling van een topologische ruimte X en zij $A \subset B \subset \bar{A}$.
Dan is B samenhangend.

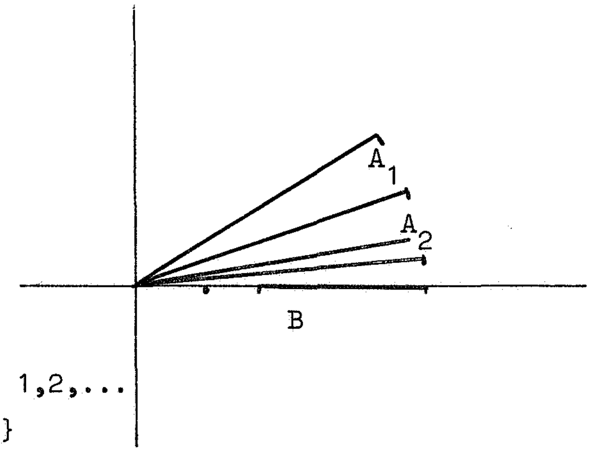
Bewijs. Beschouw de deelruimte B van X. Uit Stelling 3 volgt dat de afsluiting van A in B samenhangend is. Volgens Hoofdstuk I, §3, Stelling 1 is de afsluiting van A in B gelijk aan $\bar{A} \cap B = B$. Q.E.D.

Voorbeeld 4.
X is als deelruimte van E^2 als volgt gedefiniëerd.
$X = P \cup Q$ met
$P = \{(0,y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$ en
$Q = \{(x,y) \mid y = \sin \frac{1}{x},\ 0 < x \leq \frac{1}{\pi}\}$.



X is samenhangend.
Bewijs. Q is homeomorf met $(0, \frac{1}{\pi}]$. Ga dit na.
Pas nu Stelling 3 toe.

Voorbeeld 5. X is als deelruimte van E^2 als volgt gedefiniëerd (we gebruiken poolcoördinaten).
$X = \bigcup \{A_i \mid i = 1,2,\ldots\} \cup B.$



met $A_i = \{(r, \frac{1}{i}) \;/\; 0 \leq r \leq 1\}$, $i = 1,2,\ldots$
en $B = \{(r,0) \;/\; \frac{1}{2} \leq r \leq 1\} \cup \{(\frac{1}{4},0)\}$
X is samenhangend.
Bewijs. Uit Stelling 2 volgt dat $\{ A_i \mid i = 1,2,\ldots\}$ samenhangend is.
Pas nu Stelling 4 toe.

Voorbeeld 6. Zij X als in Voorbeeld 5.
Zij $X' = X \setminus \{(0,0)\}$.
X' is niet samenhangend.

Is een topologische ruimte splitsbaar, dan kunnen we gaan kijken naar maximale samenhangende stukken van zo'n ruimte.

Definitie 2. De grootste samenhangende verzameling die een punt x uit X bevat, heet de component van x in X.

Volgens Stelling 2 is de component van x juist de vereniging van alle x bevattende samenhangende verzamelingen.
Volgens Stelling 3 is de component van x gesloten in X.
Is X samenhangend, dan bevat X slechts een component.
Is X niet samenhangend, dan vormen de componenten van X een partitie van X d.w.z. een verdeling van X in paarsgewijs disjuncte niet lege deelverzamelingen.

Voorbeeld 7. Zij X' als in voorbeeld 6. De componenten van X' zijn $A_i \setminus \{(0,0)\}$, $i = 1,2,\ldots$ en $B \setminus \{(\frac{1}{4},0)\}$ en $\{(\frac{1}{4},0)\}$.

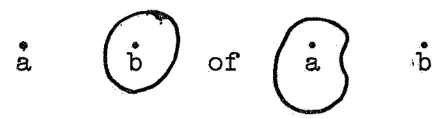
Voorbeeld 8. Zij $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. De componenten van X zijn $\{x|x < 0\}$ en $\{x|x > 0\}$.

Voorbeeld 9. Zij X de verzameling van de rationale getallen met de relatief topologie. X is totaal onsamenhangend d.w.z. alle componenten zijn één-puntig.

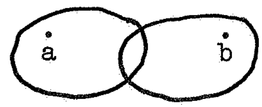
§2. Scheidingsaxioma's

We beginnen deze paragraaf met een opsomming van de scheidingsaxioma's T_i, i = 0, ..., 4 (T van Trennung).

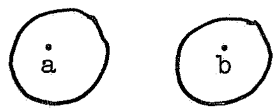
T_0-axioma. Voor ieder tweetal verschillende punten a, b $\in$ X heeft minstens een van beide punten een omgeving die het andere punt niet bevat.



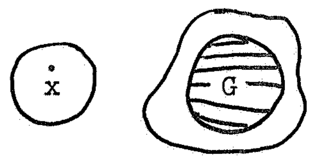
T_1-axioma. Voor ieder tweetal verschillende punten, a, b $\in$ X zijn er omgevingen U(a) resp. U(b) van a resp. b met a $\notin$ U(b) en b $\notin$ U(a).



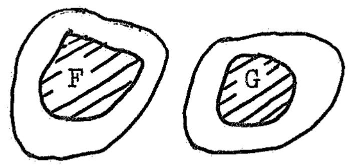
T_2-axioma. Voor ieder tweetal verschillende punten a, b $\in$ X zijn er disjuncte omgevingen U(a) resp. U(b) van a resp. b.



T_3-axioma. (Regulariteitsaxioma). Voor ieder punt x en iedere gesloten verzameling G, die x niet bevat, zijn er disjuncte omgevingen U(x) resp. U(G) van x resp. G.



T_4-axioma. (Normaliteitsaxioma). Voor ieder tweetal disjuncte gesloten verzamelingen F en G zijn er disjuncte omgevingen U(F) en U(G).



Definitie 1.
Een T_0-ruimte is een topologische ruimte, die aan het T_0-axioma voldoet.
Een T_1-ruimte is een topologische ruimte, die aan het T_1-axioma voldoet.

Een <u>Hausdorff ruimte</u> (<u>T_2-ruimte</u>) is een topologische ruimte, die aan het T_2-axioma voldoet.
Een <u>reguliere ruimte</u> (<u>T_3-ruimte</u>) is een topologische ruimte, die aan het T_1- en T_3-axioma voldoet.
Een <u>normale ruimte</u> (<u>T_4-ruimte</u>) is een topologische ruimte, die aan het T_1- en T_4-axioma voldoet.

<u>Stelling 1</u>.
Een topologische ruimte X is een T_1-ruimte dan en slechts dan als ieder punt gesloten is in X (precieser: iedere éénpuntige deelverzameling van X is gelsoten).

<u>Bewijs</u>.
"slechts dan". Zij $x \in X$.
Bij iedere $y \in X \setminus \{x\}$ is er een omgeving $U(y)$ met $x \notin U(y)$. Dus $U(y) \subset X \setminus \{x\}$ en $X \setminus \{x\}$ is een omgeving van y. Uit hoofdstuk I, §1, propositie 2 volgt dat $X \setminus \{x\}$ open is. Derhalve is $\{x\}$ gesloten.
"dan". Zij $x \neq y$. Dan is $X \setminus \{x\}$ (resp. $X \setminus \{y\}$) een omgeving dan y(resp. x) welke x (resp. y) niet bevat.

De twee volgende stellingen volgen gemakkelijk uit de definities.

<u>Stelling 2</u>.
Een normale ruimte is regulier, een reguliere ruimte is een Hausdorff, een Hausdorffruimte is een T_1-ruimte en een T_1-ruimte is een T_0-ruimte.

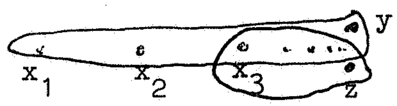
<u>Stelling 3</u>.
Een deelruimte van een T_i-ruimte is een T_i ruimte voor $i = 0, 1, 2$ of 3.

Een deelruimte van een normale ruimte is niet noodzakelijk normaal. Een gesloten deelverzameling van een normale ruimte is echter wel normaal (ga dit na).
We zeggen: de eigenschap van regulariteit is <u>erfelijk</u>, de eigenschap van normaliteit niet. De eigenschap van normaliteit is <u>erfelijk voor gesloten deelverzamelingen</u>.

Geen van de uitspraken in Stelling 2 is omkeerbaar. We illustreren dit gedeeltelijk met enige voorbeelden.

Voorbeeld 1. Zij $V = \{0,1\}$.
V met de indiscrete topologie is geen T_0-ruimte.
Zij $\mathcal{O} = \{\{0\}, \emptyset, V\}$. Dan is $(V,\mathcal{O})$ een T_0-ruimte, maar geen T_1-ruimte.

Voorbeeld 2. "Rij convergerend naar twee punten".



Zij $V = \cup\{x_i \mid i=1,2,\ldots\} \cup\{y\} \cup\{z\}$.
Neem de volgende verzamelingen als basis voor een topologie op V:
$\{x_i\}$ voor $i = 1, 2, \ldots,$
$\{y\} \cup[\cup\{\{x_i\} \mid i = n,n+1,\ldots\}]$ voor $n = 1, 2, \ldots$ en
$\{z\} \cup[\cup\{\{x_i\} \mid i = n,n+1,\ldots\}]$ voor $n = 1, 2, \ldots$.
V met deze topologie is een T_1-ruimte, die niet Hausdorffs is (y en z hebben geen disjuncte omgevingen).

Voorbeeld 3.
We geven nu een voorbeeld van een Hausdorff ruimte die niet regulier is. We gaan uit van de reële rechte $\mathbb{R}$ met de gewone topologie. Zij Q de verzameling van rationale getallen. We definiëren nu een topologische ruimte $X = (V,\mathcal{O})$. Voor V nemen we de verzameling van de reële getallen. $\{U \mid U \text{ open in } \mathbb{R}\} \cup \{Q\}$ kiezen we als subbasis voor $\mathcal{O}$. X ontstaat dus uit $\mathbb{R}$ door aan de topologie van $\mathbb{R}$ nog extra open verzamelingen toe te voegen. Hieruit volgt direct dat X een Hausdorff ruimte is. X is echter niet regulier. Om dit aan te tonen beschouwen we een rationaal punt p en de verzameling $I = V \setminus Q$ van de irrationale getallen. I is een gesloten deelverzameling van X. Laat nu U resp. W omgevingen zijn van punt p resp. I. We laten zien dat $U \cap W \neq \emptyset$, waarmee is aangetoond dat $X = (V,\mathcal{O})$ niet regulier is. Uit de definitie van de topologie $\mathcal{O}$ volgt dat er een open interval (a,b) is zodat $p \in (a,b) \cap Q \subset U$. Laat q een irrationaal punt van (a,b) zijn. Omdat W een omgeving van I is en dus ook van q, bestaat er een open interval (c,d) met $q \in (c,d) \subset W$. Blijkbaar is $(a,b) \cap (c,d)$ een interval dat q bevat, en $(a,b) \cap (c,d) \cap Q \neq \emptyset$.

Omdat $(a,b) \cap (c,d) \cap Q \subset U \cap W$ volgt hieruit dat $U \cap W \neq \emptyset$. Q. E. D.

Voorbeeld 4.

Een metrische ruimte (M,ρ) is normaal.

Bewijs.

Laat G en H disjuncte gesloten verzamelingen zijn. De afstand van een punt p tot een verzameling A - $\rho(\{p\},A)$ - wordt gedefinieerd door: $\rho(\{p\},A) = \inf \{\rho(p,q) \mid q \in A\}$. Ga na dat $\rho(\{p\},A) = 0$ dan en slechts dan als p adhaerent punt van A is.

Zij nu

$$\varepsilon_p = \tfrac{1}{2}\,\rho(\{p\},G) \text{ voor } p \in H \text{ en}$$
$$\varepsilon_q = \tfrac{1}{2}\,\rho(\{q\},H) \text{ voor } q \in G.$$

Ga na dat ε_p en ε_q groter dan nul zijn.

Stel $U = \cup\{U_{\varepsilon_p}(p) \mid p \in H\}$ en $V = \cup\{U_{\varepsilon_q}(q) \mid q \in G\}$. U resp. V zijn omgevingen van H resp. G.

We laten zien dat $U \cap V = \emptyset$.

Stel $x \in U \cap V$. Uit de definities van U en V volgt dat er $p \in H$ en $q \in G$ bestaan met $x \in U_{\varepsilon_p}(p)$ en $x \in U_{\varepsilon_q}(q)$. Dan is $\rho(p,q) \leq \rho(p,x) + \rho(x,q) < \varepsilon_p + \varepsilon_q \leq 2\max(\varepsilon_p,\varepsilon_q)$. Dus $\rho(p,q) < 2\max(\varepsilon_p,\varepsilon_q)$. Dit is in tegenspraak met het feit dat $\rho(p,q) \geq \rho(\{p\},G) = 2\,\varepsilon_p$ en $\rho(p,q) \geq \rho(\{q\},H) = 2\,\varepsilon_q$; en dus $\rho(p,q) \geq 2\max(\varepsilon_p,\varepsilon_q)$.

Merk op dat geen van de scheidingsaxioma's een continue invariant is. Zij namelijk $\mathcal{O}_1$ resp. $\mathcal{O}_2$ de discrete resp. indiscrete topologie op een verzameling X. De identieke afbeelding van $(X,\mathcal{O}_1)$ op $(X,\mathcal{O}_2)$ is continu. $(X,\mathcal{O}_1)$ voldoet aan al de scheidingsaxioma's T_0 tot en met T_4, terwijl $(X,\mathcal{O}_2)$ aan geen van de scheidingsaxioma's voldoet.

§3. Compactheid

In deze paragraaf behandelen we het begrip van compactheid, dat een grote rol speelt in de analyse.

Definitie 1.
Een (open) overdekking van een topologische ruimte X is een stelsel van (open) verzamelingen zó dat X de verniging van dit stelsel is. Een deeloverdekking van een overdekking $\mathfrak{U}$ is een deelstelsel van $\mathfrak{U}$ dat een overdekking vormt.

Definitie 2.
Een topologische ruimte X heet compact als iedere open overdekking van X een eindige deeloverdekking heeft.
Een deelverzameling A van X heet compact indien A als deelruimte opgevat compact is.

Voorbeeld 1.
Zoals we nog zullen aantonen (IV, §4) zijn de compacte deelverzamelingen in de E^n precies de begrensde en gesloten deelverzamelingen van de E^n.
De E^n zelf is niet compact. De overdekking $\{O_m \mid m = 1,2,\ldots\}$, met $O_m = \{(x_1,\ldots,x_n) \mid \sum x_i^2 < m\}$, heeft geen eindige deeloverdekking, zoals eenvoudig is aan te tonen. Ook is het niet moeilijk om in te zien dat een topologische ruimte met eindig veel punten altijd compact is.

Compactheid is evenals samenhang een continue invariant zoals blijkt uit de volgende stelling.

Stelling 1.
Als $f\colon X_1 \to X_2$ continu is en X_1 is compact, dan is $f(X_1)$ ook compact.

Bewijs.
Zij $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ een open overdekking van $f(X_1)$. Voor iedere α kiezen we een V_α - open in X_2 - zodat $V_\alpha \cap f(X_1) = U_\alpha$. Merk op dat

$f(f^{-1}(U_\alpha)) = f(f^{-1}(V_\alpha)) = U_\alpha$. $\{f^{-1}(V_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ is een open overdekking van X_1 wegens de continuiteit van f. Omdat X_1 compact is, heeft deze overdekking een eindige deeloverdekking, zeg $\{f^{-1}(V_{\alpha_i}) \mid i = 1, \ldots, n\}$.
Dan is $\{f(f^{-1}(V_{\alpha_i})) \mid i = 1, \ldots, n\}$ een eindige overdekking van $f(X_1)$. Omdat $f(f^{-1}(V_{\alpha_i})) = U_{\alpha_i}$, is $\{U_{\alpha_i} \mid i = 1, \ldots, n\}$ een <u>deel</u>overdekking van de gegeven overdekking $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ van $f(X_1)$. Hiermee is de compactheid van $f(X_1)$ aangetoond.

Compactheid is erfelijk voor gesloten deelverzamelingen:

<u>Stelling 2</u>.
Een gesloten deelverzameling G van een compacte ruimte X is compact.

<u>Bewijs</u>.
Zij $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ een open overdekking van G. Voor iedere α kiezen we een V_α - open in X - met $V_\alpha \cap X = U_\alpha$.
$\{X \setminus G, V_\alpha \mid \alpha \in A\}$ is een open overdekking van X. Deze heeft een eindige deeloverdekking $\{X \setminus G, V_{\alpha_i} \mid i = 1, \ldots, n\}$. Dan is $\{U_{\alpha_i} \mid i = 1, \ldots, n\}$ een eindige deeloverdekking van de gegeven overdekking $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$.

Voor Hausdorff ruimten geldt de omkering van Stelling 2:

<u>Stelling 3</u>.
Een compacte deelverzameling C van een Hausdorff ruimte X is gesloten in X.

<u>Bewijs</u>.
We tonen aan dat $X \setminus C$ open is. Daartoe is het voldoende om aan te tonen dat er bij ieder punt $p \in X \setminus C$ een omgeving $U(p)$ is, met $p \in U(p) \subset X \setminus C$ (vgl. II, §1, Propositie 2).
Zij q een punt van C. Omdat X een Hausdorff ruimte is, zijn er <u>disjuncte</u> omgevingen $U_q(p)$ resp. $U_p(q)$ van p resp. q. ($U_q(p)$ hangt af van q!). We mogen aannemen dat $U_q(p)$ en $U_p(q)$ <u>open</u> zijn. Immers

iedere omgeving van een punt bevat altijd een open omgeving van dat punt. Nu is $\{U_p(q) \mid q \in C\}$ een open overdekking van C, welke wegens de compactheid van C een eindige deeloverdekking heeft, zeg $\{U_p(q_1), \ldots, U_p(q_n)\}$.

Zij $U = \cup \{U_p(q_i) \mid i = 1, \ldots, n\}$ en

$V = \cap \{U_{q_i}(p) \mid i = 1, \ldots, n\}$.

Blijkbaar zijn U en V disjuncte omgevingen van C en p. In het bijzonder is dus V een omgeving van p die bevat is in $X \setminus C$. Q. E. D.

Het resultaat in het bewijs van stelling 3 kan ook zó geformuleerd worden:

Lemma 1.

Zij C een compacte deelverzameling van een Hausdorff ruimte. Als $p \notin C$, dan hebben p en C disjuncte omgevingen.

Uit stelling 2 en lemma 1 volgt onmiddellijk het volgende resultaat.

Stelling 4.

Een compacte Hausdorff ruimte is regulier.

Stelling 5.

Een compacte Hausdorff ruimte is normaal.

Bewijs.

Laat F en G disjuncte gesloten verzamelingen zijn in een compacte Hausdorff ruimte X. Omdat X regulier is, zijn er bij ieder punt $p \in F$ disjuncte omgevingen $U_G(p)$ resp. $U_p(G)$ van p resp. G. We mogen aannemen dat $U_G(p)$ en $U_p(G)$ open zijn (vgl. bewijs van stelling 3). Omdat F compact is, heeft de open overdekking $\{U_G(p) \mid p \in F\}$ een eindige deeloverdekking: $\{U_G(p_i) \mid i = 1, \ldots, n\}$.

Zij $U = \cup \{U_G(p_i) \mid i = 1, \ldots, n\}$ en

$V = \cap \{U_{p_i}(G) \mid i = 1, \ldots, n\}$.

Dan zijn U resp. V disjuncte omgevingen van F resp. G. Q. E. D.

Laat X_1 en X_2 Hausdorff ruimten zijn en f: $X_1 \to X_2$ een continue bijectie. Dan is f niet noodzakelijk topologisch (pag. 40, de afbeelding g in voorbeeld 3). Als X_1 compact is, dan is f echter wel topologisch, zoals we zullen aantonen in stelling 7. Voor het bewijs van deze stelling gebruiken we de volgende:

Stelling 6.

Als X_1 compact is, X_2 een Hausdorff ruimte is en f: $X_1 \to X_2$ continu is, dan is f gesloten.

Bewijs.

Zij G een gesloten deelverzameling van X_1. Dan is G compact volgens stelling 2, $f(G)$ compact volgens stelling 1 en $f(G)$ gesloten volgens stelling 3. Hiermee is bewezen dat f gesloten is (II, §4, definitie 5).

Stelling 7.

Als X_1 een compacte ruimte is, X_2 een Hausdorff ruimte is en f: $X_1 \to X_2$ een continue bijectie, dan is f een topologische afbeelding.

Bewijs.

Uit stelling 6 en II, §4, stelling 2.

In definitie 1 is compactheid gedefinieerd in termen van open verzamelingen. We zullen nu met het oog op latere toepassingen compactheid formuleren in termen van gesloten verzamelingen.

Stelling 8.

Zij X een topologische ruimte. X is compact dan en slechts dan als voor ieder stelsel gesloten verzamelingen $\{F_\alpha \mid \alpha \in A\}$ met $\cap \{F_\alpha \mid \alpha \in A\} = \emptyset$ er een eindig deelstelsel $\{F_{\alpha_1}, \ldots, F_{\alpha_n}\}$ is met $\cap \{F_{\alpha_i} \mid i = 1, \ldots, n\} = \emptyset$.

Bewijs.

Het bewijs volgt gemakkelijk uit I, §1, stelling 2, II, §2, definitie 1 en de definitie van compactheid.

Ter illustratie bewijzen we het "slechts dan" gedeelte. Stel X is compact en $\{F_\alpha \mid \alpha \in A\}$ is een stelsel gesloten verzamelingen met $\cap \{F_\alpha \mid \alpha \in A\} = \emptyset$. Blijkbaar is $\{X \setminus F_\alpha \mid \alpha \in A\}$ een open overdekking van X. Deze heeft een eindige deeloverdekking $\{X \setminus F_{\alpha_i} \mid i = 1, \ldots, n\}$. Dan is $\cap \{F_{\alpha_i} \mid i = 1, \ldots, n\} = \emptyset$.

Het in deze paragraaf geintroduceerde begrip van compactheid werd vroeger bi-compactheid genoemd. Voordat dit begrip ingevoerd was verstond men onder compactheid wat wij nu rijcompact zullen noemen (of een begrip dat hier nauw mee verwant was).

Definitie 3.
Een topologische ruimte heer rijcompact als iedere oneindige verzameling een verdichtingspunt heeft.

Het is niet moeilijk om in te zien dat een metrische ruimte rijcompact is dan en slechts dan indien iedere rij een convergente deelrij heeft.

We zullen nu onderzoeken wanneer de beide begrippen van compactheid samenvallen.

Definitie 4.
Een topologische ruimte heet een Lindelöf ruimte als iedere open overdekking een aftelbare deeloverdekking heeft.

Uiteraard is iedere compacte ruimte een Lindelöf ruimte. Een ander type ruimte dat Lindelöf ruimte is, wordr behandeld in het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 2.
Een ruimte die aan het tweede aftelbaarheidsaxioma (II, §1, definitie 5) voldoet, is een Lindelöf ruimte.
Bewijs.
Zij $\{O_\alpha \mid \alpha \in A\}$ een overdekking van een topologische ruimte X met een aftelbare basis $\{B_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$.

Schrijf iedere O_α als vereniging van B_i's. De hierbij gebruikte B_i's vormen een aftelbare overdekking van X! Kies bij iedere gebruikte B_i een omvattende O_α. Dan vormen de zo gekozen O_α's een aftelbare overdekking.

Stelling 9.
Een T_1-ruimte X is compact dan en slechts dan als hij rijcompact en Lindelöf is.

Bewijs.
"slechts dan". Dat een compacte ruimte een Lindelöf ruimte is volgt direct uit de definities. Zij nu X een compacte ruimte. We zullen bewijzen dat X rijcompact is. Stel X is niet rijcompact. Dan is er dus een oneindige deelverzameling Z van X die geen verdichtingspunt heeft. Bij iedere punt $p \in X$ is er dan een open omgeving $U(p)$ zodat $U(p) \cap A = \emptyset$ of $U(p) \cap A = \{p\}$. $\{U(p) \mid p \in X\}$ is een open overdekking van X. Deze heeft een eindige deeloverdekking, zeg $\{U(p_1), \ldots, U(p_n)\}$.Dan is $A \subset \{p_1, \ldots, p_n\}$ en dus eindig.Dit is een tegenspraak.
"dan". Zij $\{O_\beta \mid \beta \in B\}$ een open overdekking van een rijcompacte Lindelöf ruimte X. Laat $\{O_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$ een aftelbare deeloverdekking van de gegeven overdekking zijn. We zullen aantonen dat deze aftelbare overdekking een eindige deeloverdekking heeft. Stel dit is niet het geval. Dan geldt voor iedere n dat $X \not\subset \cup \{O_i \mid i = 1, \ldots, n\}$. Kies q_n met $q_n \notin \cup \{O_i \mid i = 1, \ldots, n\}$. Het is niet moeilijk om in te zien dat $\{q_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ oneindig is. Omdat X rijcompact is, heeft deze verzameling een verdichtingspunt, zeg q. q ligt in een zekere O_j. Omdat X een T_1-ruimte is liggen oneindig veel q_n's in O_j. Dit levert een tegenspraak op, want $q_n \notin O_j$ als $n > j$.

Voorbeeld 3.
De E^n heeft een aftelbare basis (p. 28, voorbeeld 8) en is dus een Lindelöf ruimte. Op grond van stelling 9 is een gesloten deelverzameling van E^n compact dan en slechts dan als hij rijcompact is. (Ga na dat een gesloten deelverzameling van een Lindelöf ruimte weer een

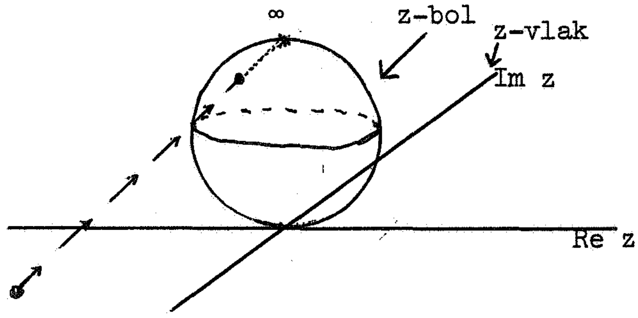
Lindelöf ruimte is; vgl. stelling 2). Verder is het eenvoudig in te zien dat (zowel compacte als) rijcompacte deelruimten van E^n gesloten zijn.
Hieruit volgt dat <u>in E^n de compacte en rijcompacte verzamelingen samenvallen</u>.

<u>Voorbeeld 4</u>.
Een compacte, samenhangende Hausdorff ruimte heet een <u>continuum</u>. Als X een continuum is en f: $X \to Y$ een continue afbeelding is, terwijl Y een Hausdorf ruimte is, dan is ook f(X) een continuum (vgl. §1, stelling 1 en §3, stelling 2).
I.h.b. geldt voor een functie f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ het volgende:
Als f continu is, dan is het beeld van een interval weer een interval.
Hieruit volgen dan de bekende stellingen:

1. Een reële continue functie f gedefinieerd op een interval [a,b] neemt alle waarden tussen f(a) en f(b) aan.
2. Een reële continue functie f gedefinieerd op een interval [a,b] neemt op dit interval een maximum en een minimum aan.

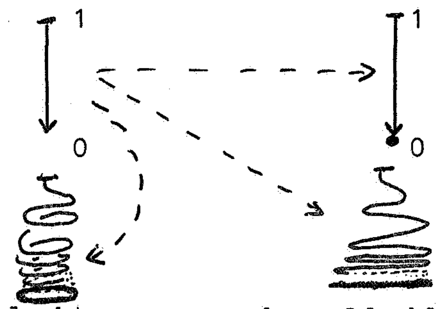
4. De eenpuntscompactificatie

In de functie theorie voert men om verschillende redenen z = ∞ in. Vanuit topologisch standpunt bezien, houdt dit in dat men het z-vlak opvat als topologische deelruimte van de z-bol, namelijk de z-bol minus het punt ∞. Een inbedding van z-vlak in z-bol kan verkregen worden met behulp van "stereographische projectie".



In deze pragraaf zullen we een generalisatie van dit proces beschrijven, namelijk de eenpuntscompactificatie. De eenpuntscompactificatie is een bijzondere manier om ruimten in te bedden in compacte ruimten. Op de algemene theorie hierover komen we in hoofdstuk IV, §6 nog terug.

Nevenstaand plaatje suggereert dat het half open interval [0,1) op verschillende manieren compact gemaakt kan worden.



De eenpuntscompactificatie kan slechts voor een bepaalde klasse van ruimten uitgevoerd worden, namelijk de lokaal compacte ruimten. Het in deze paragraaf behandelde laat zien hoe door "lokaal maken" van een begrip - in dit geval het begrip van compactheid - een nieuwe theorie opgebouwd kan worden.

Definitie 1.

Een compacte ruimte Y heet een compactificatie van een topologische ruimte X als X een deelruimte is van Y en X dicht ligt in Y d.w.z. $\overline{X} = Y$.

Is Y bovendien Hausdorff, dan heet Y een Hausdorff compactificatie.

Definitie 2.

Een topologische ruimte X heet lokaal compact als ieder punt $p \in X$ een compacte omgeving heeft.

Voorbeeld 1.

Zij X = (V,$\mathcal{O}$) waarbij $\mathcal{O}$ de discrete topologie is. Dan is X lokaal compact.

Voorbeeld 2.

De E^n is lokaal compact.

Voorbeeld 3.

De rationale getallen Q met de relatief topologie van $\mathbb{R}$ zijn niet lokaal compact. Door voorbeeld 1 en 3 te combineren kan men inzien dat lokale compactheid geen continue invariant is (neem V aftelbaar in voorbeeld 1).

Stelling 1. (Eenpuntscompactificatie)

Iedere lokaal compacte Hausdorff ruimte kan door middel van ten hoogste één punt uitgebreid worden tot een compacte Hausdorff ruimte.

Voorbeeld 4.

De eenpuntscompactificatie can E^2 is homeomorph met de S^2. Vergelijk dit met het voorbeeld aan het begin van deze paragraaf. De eenpuntscompactificatie van de E^n ($n \geq 1$) is homeomorph met de S^n.

Stelling 2.

Een lokaal compacte Hausdorff ruimte is regulier.

Bewijs.

Zij X een lokaal compacte Hausdorff ruimte. Laat Y de uitbreiding zijn van X tot een compacte Hausdorff ruimte (stelling 1). Y is normaal (§3, stelling 5), dus regulier (§2, stelling 2). Dus X is regulier (§2, stelling 3).

Bewijs van stelling 1.

Stel X is een lokaal compacte, niet compacte Hausdorff ruimte. (Het geval X compact, is triviaal.) Neem een element, zeg ∞, dat niet in X voorkomt (b.v. $\{X\}$). Stel $X \cup \{\infty\} = Y$.

Op Y definieren we de volgende topologie:
U is open in Y dan en slechts dan als

1° $U \cap X$ is open in X.

2° Als $\infty \in U$, dan is $X \setminus U$ compact (of leeg).

a. Y met "deze topologie" is een topologische ruimte.

Het is eenvoudig in te zien dat aan OI en OII voldaan is. Stel U_1 en U_2 zijn open in Y. Dan geldt dat $U_1 \cap X$ en $U_2 \cap X$ open zijn in X. Dan is ook $(U_1 \cap U_2) \cap X$ open in X. Dus $U_1 \cap U_2$ voldoet aan 1°. Om te verifiëren dat $U_1 \cap U_2$ aan 2° voldoet mogen we aannemen dat $\infty \in U_1$ en $\infty \in U_2$. Dan zijn $X \setminus U_1$ en $X \setminus U_2$ compact (2°).
Omdat $X \setminus (U_1 \cap U_2) = (X \setminus U_1) \cup X \setminus U_2)$ en omdat de vereniging van twee compacte ruimten compact is, volgt dat $X \setminus (U_1 \cap U_2)$ compact is. Aan 2° is dus voldaan.

b. X is een deelruimte van Y (triviaal).

c. X ligt dicht in Y.

Als U een open omgeving is van ∞, dan is $X \setminus U$ compact (of leeg). Omdat X niet compact is, is $U \cap X \neq \emptyset$.

d. Y is compact.

Zij $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ een overdekking van Y. Stel $\infty \in U_{\alpha_1}$. Dan is $Y \setminus U_{\alpha_1} = X \setminus U_{\alpha_1}$ compact. $\{U_\alpha \cap (X \setminus U_{\alpha_1}) \mid \alpha \in A\}$ is een open overdekking van de compacte ruimte $X \setminus U_{\alpha_1}$. Deze heeft een eindige deeloverdekking, zeg $\{U_{\alpha_i} \cap (X \setminus U_{\alpha_1}) \mid i = 2, \ldots, n\}$. $\{U_{\alpha_i} \mid i = 1, \ldots, n\}$ is dan een eindige deeloverdekking van de gegeven overdekking.

e. Y is een Hausdorff ruimte.

We behoeven alleen te verifiëren dat een punt $p \in X$ en ∞ disjuncte omgevingen hebben. p heeft een compacte omgeving U. Volgens §3, stelling 3 is U gesloten in X. Hieruit volgt dat $Y \setminus U$ voldoet aan 1° en 2°, dus open is in Y.
U en $Y \setminus U$ zijn dus disjuncte omgevingen van p resp. ∞.

Hoofdstuk IV. Het construeren van nieuwe ruimten.

In dit hoofdstuk behandelen we de constructie van nieuwe ruimten uit oude door middel van het vormen van quotientruimten (§2) en productruimten (§4). De quotientruimten worden gebruikt bij de classificatie van oppervlakken (§3). Het blijkt dat vele eigenschappen invariant zijn voor het vormen van topologische producten zoals samenhang en het T_2-axioma (§4) en compactheid (§5). De theorie van de topologische producten wordt gebruikt om dië ruimten die een Hausdorff compactificatie hebben (III, §4), te karakteriseren (§6). Hierbij maken we gebruik van de resultaten in §1, waarin het bestaan van continue reële functies, gedefinieerd op een topologische ruimte, wordt besproken.

§1. Het lemma van Urysohn

Stelling 1. Laat X een T_1-ruimte zijn. X is normaal dan en slechts dan als er bij ieder tweetal disjuncte gesloten verzamelingen F en G een continue reële functie $f: X \to [0,1]$ bestaat met $f(F) = 0$ en $f(G) = 1$.

Stelling 1 staat bekend als het lemma van Urysohn. Deze stelling geeft in het bijzonder een voldoende voorwaarde (namelijk normaliteit) voor het bestaan van niet constante continue reële functies op een topologische ruimte. Door Hewitt zijn voorbeelden geconstrueerd van reguliere topologische ruimten waarop iedere continue reële functie constant is. Voor het bewijs van stelling 1 gebruiken we lemma's 1 t/m 3.

Lemma 1. Laat D een deelverzameling van de reële getallen zijn zodat $\overline{D} = [0,\infty)$.
Laat aan iedere $t \in D$ een deelverzameling F_t van een vaste verzameling X toegevoegd zijn zó dat

1°. Als $t < s$, dan $F_t \subset F_s$,

2°. $\cup\{F_t \mid t \in D\} = X$.

Laat $f: X \to \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door $f(x) = \inf\{t \mid x \in F_t\}$.

Dan is

(*) $\{x \mid f(x) < s\} = \cup\{F_t \mid t \in D, t < s\}$ en

(**) $\{x \mid f(x) \leq s\} = \cap\{F_t \mid t \in D, t > s\}$ voor ieder reëel getal $s \geq 0$.

Bewijs. (*) Als $x \in \{x \mid f(x) < s\}$, dan is $f(x) < s$. Er is dan een $t_0 < s$ met $x \in F_{t_0}$. Dus $x \in \cup\{F_t \mid t < s\}$.
Omgekeerd, als $x \in \cup\{F_t \mid t < s\}$, dan $x \in F_{t_0}$ met $t_0 < s$. Dus $f(x) \leq t_0 < s$.

(**) Stel $f(x) \leq s$. Dus $\inf \{t \mid x \in F_t\} \leq s$. Dan is, als $u > s$, er een t_0 met $x \in F_{t_0}$ en $t_0 < u$. Uit 1° volgt $x \in F_u$. Dus $x \in \cap\{F_u \mid u > s\}$. Omgekeerd, als $x \in \cap\{F_t \mid t > s\}$, dan is $x \in F_t$ voor iedere $t \in D$ met $t > s$. Omdat D dicht ligt in $[0,\infty)$ geldt dan $f(x) \leq s$.

Opmerking. Uit voorwaarde 2° volgt dat f goed gedefinieerd is (ga na). Dit geldt ook voor de functie in het volgende lemma.

Lemma 2. Laat D een deelverzameling van de reële getallen zijn zodat $\overline{D} = [0,\infty)$.
Laat aan iedere $t \in D$ een open deelverzameling F_t van een vaste topologische ruimte X toegevoegd zijn zó dat

1°. Als $t < s$, dan is $\overline{F}_t \subset F_s$

2°. $\cup\{F_t \mid t \in D\} = X$.

Dan is de functie $f: X \to \mathbb{R}$, gedefinieerd door $f(x) = \inf \{t \mid x \in F_t\}$, continu.

Bewijs. We moeten nagaan dat het origineel van een open verzameling open is. We verifieren dit voor de subbasiselementen $\{t \mid t < s\}$ en $\{t \mid t > s\}$, $s \in \mathbb{R}$. Daarna kan het bewijs afgemaakt worden met behulp van I, §1, stelling 1.
We mogen aannemen dat $s \geq 0$, want voor $s < 0$ is $f^{-1}(\{t|t<s\}) = \emptyset$ en $f^{-1}(\{t|t>s\}) = X$.

$f^{-1}(\{t|t<s\}) = \{x \mid f(x) < s\} \underset{(*)}{=} \cup\{F_t \mid t \in D, t < s\}$.

Omdat iedere F_t open is, is dus $f^{-1}(\{t|t<s\})$ open. Vervolgens tonen we aan dat $f^{-1}(\{t|t>s\})$ open is. Hiertoe laten we zien dat $f^{-1}(\{t|t\leq s\})$ gesloten is.

$f^{-1}(\{t|t\leq s\}) = \{x \mid f(x) \leq s\} \underset{(**)}{=} \cap\{F_t \mid t \in D, t > s\}$.

Nu is $\cap\{F_t \mid t \in D, t > s\} \subset \cap\{\overline{F}_t \mid t \in D, t > s\}$.

Omdat D dicht ligt in $[0,\infty)$ is er bij iedere $t > s$ een $r \in D$ met $t > r > s$. Uit 1° volgt dan $\overline{F}_r \subset F_t$, en dus is

$\cap\{\overline{F}_r \mid r \in D, r > s\} \subset \cap\{F_t \mid t \in D, t > s\}$.

Derhalve geldt:

$f^{-1}(\{t|t\leq s\}) = \cap\{\overline{F}_t \mid t \in D, t > s\}$.

Omdat $\overline{F}_t$ gesloten is, geldt dat $f^{-1}(\{t|t\leq s\})$ gesloten is.

Lemma 3. Laat X een normale ruimte zijn. Dan is er bij iedere gesloten verzameling A en iedere omgeving U van A een open omgeving V van A met $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

Bewijs. Laat A een gesloten verzameling zijn en U een omgeving van A. We mogen aannemen dat U open is. Dan zijn A en $X \setminus U$ disjuncte gesloten verzamelingen. Deze hebben disjuncte omgevingen, zeg V en W; hierbij mogen we weer aannemen dat V en W open zijn.

Dus $A \subset V$ en $X \setminus U \subset W$.

Omdat W open is, is $\overline{V} \cap W = \emptyset$; dus $\overline{V} \subset U$.

Bewijs van stelling 1.

"dan" Laat F en G disjuncte gesloten verzamelingen in X zijn.

Zij $f\colon X \to [0,1]$ continu, terwijl $f(F) = 0$ en $f(G) = 1$.

Dan zijn $f^{-1}([0,\frac{1}{2}))$ resp. $f^{-1}((\frac{1}{2},1])$ disjuncte omgevingen van F resp. G.

"slechts dan" We zullen lemma 2 toepassen. Zij $D = \{p.2^{-q} \mid p$ en q geheel, positief$\}$.

Voor $t \in D$, $t > 1$, zij $F_t = X$.

Voor $t = 1$, zij $F_t = X \setminus G$.

Laat F_0 een open verzameling zijn met $F \subset F_0 \subset \overline{F}_0 \subset X \setminus G$ (lemma 3).

Voor $0 < t < 1$ en $t \in D$, schrijven we t in de vorm $t = (2m+1)\ 2^{-n}$. Met volledige inductie (naar n) definieren we nu $F_{(2m+1)2^{-n}}$ als een open verzameling met

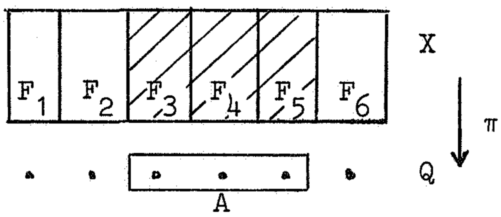
$$\overline{F}_{2m.2^{-n}} \subset F_{(2m+1)2^{-n}} \subset \overline{F}_{(2m+1)2^{-n}} \subset F_{(2m+2)2^{-n}}.$$

Zo'n open verzameling bestaat op grond van lemma 3. Toepassing van lemma 2 geeft nu de gevraagde continue functie.

§2. Quotientruimten

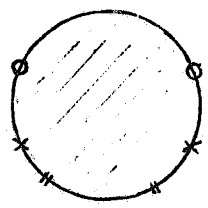
Definitie 1. Zij V een verzameling. Een decompositie (partitie) van V is een stelsel paarsgewijs disjuncte verzamelingen $\{F_\alpha \mid \alpha \in A\}$, waarvan de vereniging V is.

Definitie 2. Zij $X = (V,\mathcal{O})$ een topologische ruimte en $Q = \{F_\alpha \mid \alpha \in A\}$ een partitie van V. De quotientruimte (behorende bij de partitie Q) heeft als punten de elementen van Q.
Een deelverzameling A van Q (A is dus een familie van verzamelingen F_α) is open in de quotientruimte dan en slechts dan als $\cup\{F_\alpha \mid F_\alpha \in A\}$ open is in X.

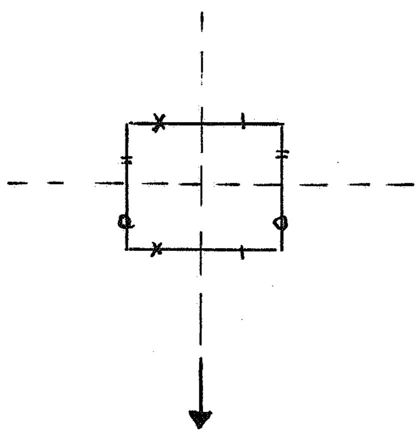


De projectie (quotientafbeelding) van X op Q, genoteerd met π, is gedefinieerd door $\pi(x) = F_\beta$ dan en slechts dan $x \in F_\beta$.

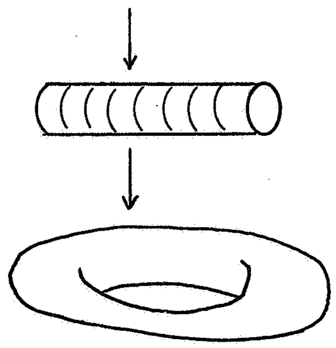
Voorbeeld 1. Zij X de volle cirkelschijf:
$X = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$.
Laat de partitie Q uit de volgende elementen bestaan:
$\{(x_1,x_2)\}$ voor $x_1^2 + x_2^2 < 1$
$\{(x_1,x_2), (-x_1,x_2)\}$ voor $x_1^2 + x_2^2 = 1$.
De quotientruimte is het boloppervlak (portomonnaie met knipsluiting).



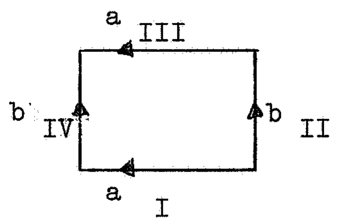
Voorbeeld 2. Zij X het volle vierkant: $X = \{(x_1,x_2) \mid |x_i| \leq 1, i=1,2\}$.
We definieren op X de volgende equivalentierelatie: ieder punt is equivalent met zichtzelf;
Verder $(-1,x) \sim (+1,x)$ als $|x| \leq 1$.
en $(x,-1) \sim (x,1)$ als $|x| \leq 1$.



Bij zo'n equivalentierelatie hoort een partitie van X in equivalentieklassen (I, §3, stelling 1). De quotientruimte bij deze partitie is een <u>torus</u>. De plaatjes suggereren een constructie in twee stappen.

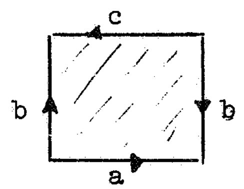


Zo'n equivalentierelatie als in voorbeeld 2 kunnen we kortweg aangeven zoals in nevenstaand plaatje is gedaan. We <u>identificeren</u> boog I met III en boog II met IV.

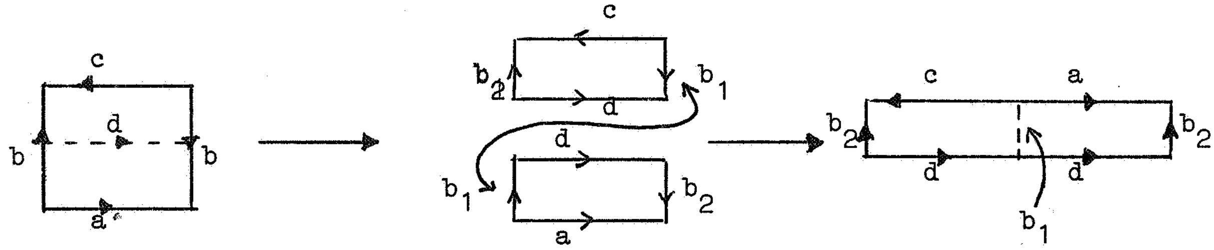


Preciezer gezegd: Neem een homeomorphisme f tussen boog I en III zo dat de orientatie, aangegeven met pijlen, behouden blijft. Dan definieren we een equivalentierelatie als volgt: ieder punt is equivalent met zichzelf, $p \in I$ en $q \in III$ zijn equivalent als $q = f(p)$. Analoog worden boog II en IV behandeld.

<u>Voorbeeld 3</u>. Zij X het volle vierkant (zoals in voorbeeld 2). De identificatie van de rand van X is aangegeven in nevenstaand plaatje. De quotientruimte bij deze identificatie heet de <u>Möbius band</u>. Een goede voorstelling van de Möbiusband kan men krijgen door van een lange strip papier de einden aan elkaar te plakken, nadat men er een halve slag in heeft gelegd.



Onderstaande plaatjes geven enige "knip" oefening met de Möbiusband aan



Voorbeeld 4. Componenten ruimte. Zij X een topologische ruimte. We definieren op X de volgende equivalentierelatie.
$x \sim y$ dan en slechts dan als x en y tot dezelfde component behoren.
De quotientruimte bij de partitie geinduceerd door deze equivalentie relatie heet de componentenruimte van X.
Men kan bewijzen dat de componentenruimte van een compacte Hausdorff ruimte een compacte totaal onsamenhangende Hausdorff ruimte is.

Het is nuttig om bij de volgende stellingen de relatie met analoge stellingen uit de groepentheorie na te gaan (vervang continue afbeelding door homeomorfisme; quotientruimte door factorgroep).

Stelling 1. Zij Q een quotientruimte van een topologische ruimte X en π de quotientafbeelding.
Dan is π continu.

Bewijs. Volgt direct uit definitie 2.

Stelling 2. Zij Q een quotientruimte van een topologische ruimte X en π de quotientafbeelding.
Een afbeelding $f: Q \to Y$ is continu dan en slechts dan als $f \cdot \pi: X \to Y$ continu is.

Bewijs. "slechts dan". triviaal.
"dan". Zij U open in Y. Nu is $f^{-1}(U) = \pi \cdot (f \cdot \pi)^{-1}(U)$.
Omdat $f \cdot \pi$ continu is, is $(f \cdot \pi)^{-1}(U)$ open. $(f \cdot \pi)^{-1}(U)$ is de vereniging van elementen van de partitie die hoort bij Q. Dus $\pi(f \cdot \pi)^{-1}(U)$ is open in Q volgens definitie 2.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f \cdot \pi"'] & Q \arrow[d, "f"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Stelling 3. Zij $f: X \to Y$ een continue surjectie. Laat Q de quotientruimte zijn behorende bij de partitie $\{f^{-1}(y) \mid y \in Y\}$. Dan is er een continue bijectie $\psi: Q \to Y$ zodat het diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & Y \\ & Q \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

commutatief is.
Is bovendien f gesloten of open, dan is ψ een topologische afbeelding.

<u>Bewijs</u>. Zij $p \in Q$. Dan is $p = f^{-1}(q)$ voor precies één $q \in Y$. Definieer dan: $\psi(p) = q$. Het is gemakkelijk om in te zien dat ψ een bijectie is. ψ is continu volgens stelling 2. Stel nu dat f open is. We tonen aan dat ψ open is. ψ is dan een topologische afbeelding volgens (II, §4, stelling 2). (Het geval dat f gesloten is, kan analoog behandeld worden.) Zij U een open verzameling in Q. $\psi(U) = f \cdot \pi^{-1}(U)$. $\pi^{-1}(U)$ is open (stelling 1). Omdat f open is, is $f \cdot \pi^{-1}(U)$ open. Dus $\psi(U)$ is open. Dus ψ is open.

<u>Voorbeeld 5</u>. Als X compact is en Y een Hausdorff ruimte, dan is een continue afbeelding $f: X \to Y$ gesloten volgens (III, §3, stelling 6). In dat geval is de afbeelding ψ in stelling 3 dus een topologische afbeelding.
In het algemeen is de afbeelding ψ in stelling 3 niet noodzakelijk topologisch. Een voorbeeld waarin ψ niet topologisch is, is het volgende: $X = (V,Q_1)$ en $Y = (V,Q_2)$ waarin Q_1 de discrete topologie en Q_2 de indiscrete topologie is. De identieke afbeelding f van V op zichzelf is een continue bijectie $f: X \to Y$. Het is duidelijk dat in dit geval Q homeomorf is met X. ψ is dus niet topologisch.

In voorbeeld 1 tot en met 4 zijn de elementen van de partitie gesloten. Dit hangt samen met de volgende stelling die volgt uit stelling 1 en III, §2, stelling 1.

<u>Stelling 4</u>. Zij Q een quotientruimte van een topologische ruimte X en $\{F_\beta \mid \beta \in B\}$ de bij Q behorende partitie. Q is een T_1-ruimte dan en slechts dan als iedere F_β gesloten is.

§3. Oppervlakken

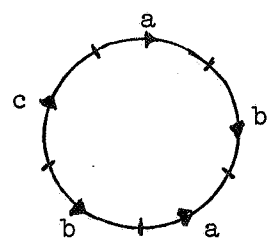
Definitie 1. Een gesloten oppervlak is een compacte samenhangende metrische ruimte, die lokaal twee-dimensionaal Euclidisch is d.w.z. ieder punt van de ruimte heeft een omgeving die homeomorf is met E^2.

De S^2 en de torus (§2, voorbeeld 2) zijn voorbeelden van een gesloten oppervlak. De Möbiusband is géén gesloten oppervlak (§2, voorbeeld 3; in de randen c en a is de Möbiusband niet lokaal Euclidisch).

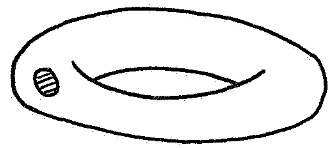
Men kan bewijzen dat ieder gesloten oppervlak verkregen kan worden uit een gesloten cirkelschijf, waarvan de rand in een even aantal bogen is verdeeld welke twee aan twee worden geïdentificeerd (vgl. §2, voorbeeld 2). (Voor een bewijs zie H. Seifert en W. Threlfall, Lehrbuch der topologie, hfdst. VI.)

In deze paragraaf geven we enige voorbeelden van ruimten die verkregen worden uit een gesloten cirkelschijf door identificatie van bogen op de rand. Aan het slot van de paragraaf vermelden we dan de klassificatie van de gesloten oppervlakken.

1.

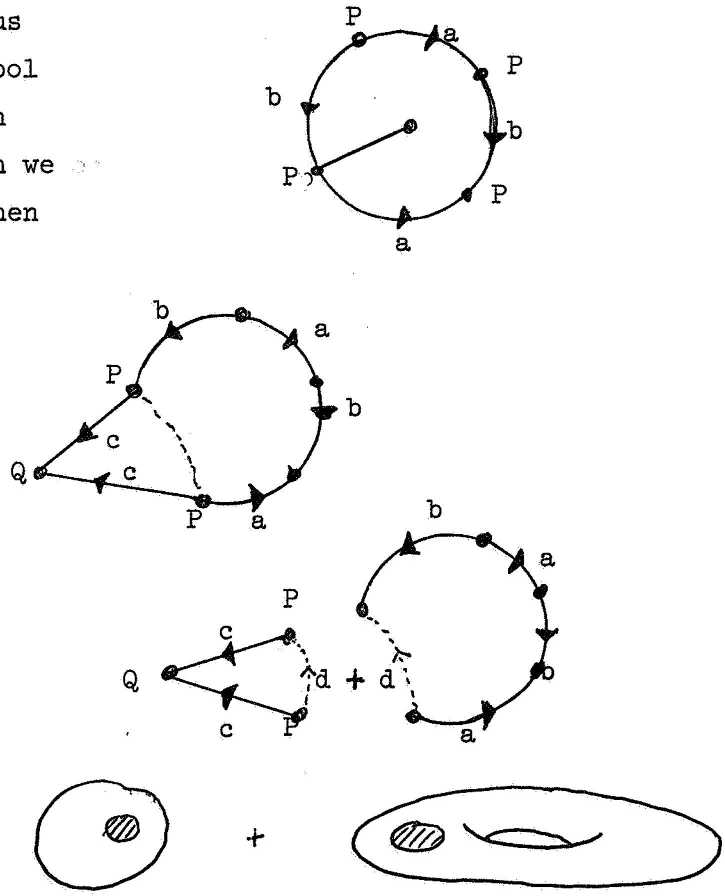


Door identificatie van de bogen op de rand zoals aangegeven in nevenstaande figuur ontstaat een hengsel (= torus met gat).

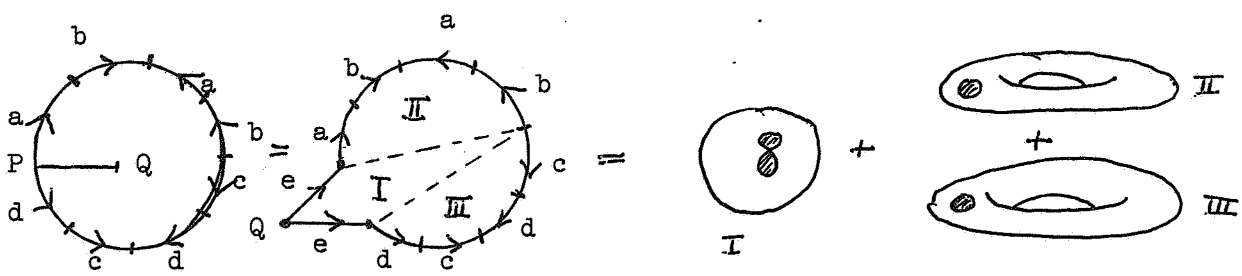


De identificatie van de bogen op de cirkel kunnen we kort aangeven met c a b a^{-1} b^{-1}. Hierbij hebben we een vaste oriëntatie op de cirkel genomen - in dit geval rechtsom - en we geven een boog bv. aan met a als de oriëntatie van a overeenstemd met de gekozen oriëntatie en we geven een boog aan met a^{-1} als de oriëntatie van a tegengesteld is aan de gekozen oriëntatie.

2. We tonen nu aan dat een torus ontstaat door samenvoegen van bol met gat en een hengsel. We gaan daarbij uit van de torus waarin we een snede aanbrengen (vgl. openen van kartonnen melkpak). Daarna vouwen we de torus open en knippen hem door.

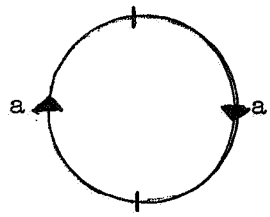


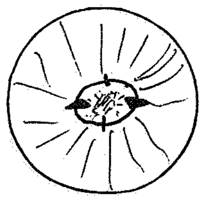
3. Door identificatie van bogen op de cirkelrand aangegeven door het schema a b a^{-1} b^{-1} c d c^{-1} d^{-1} ontstaat een gesloten oppervlak dat ontstaan gedacht kan worden door samenvoegen van een bol met twee gaten en twee hengsels.



I.h.a. ontstaat uit een cirkelschijf door identificatie volgens het schema a_1 b_1 a_a^{-1} b_1^{-1} ... a_h b_h a_h^{-1} b_h^{-1} een bol met h gaten waarop h hengsels worden geplakt: een <u>bol met h hengsels</u>.

4. Door diametraalpuntsidentificatie van de cirkelrand ontstaat uit de cirkelschijf het <u>projectieve vlak</u>. We kunnen het projectieve vlak ook verkrijgen door uit het boloppervlak een gat te snijden en dan op de rand diametraalpuntsidentificatie toe te passen.
Zo'n gat met diametraalpuntsidentificatie van de rand heet een <u>kruismuts</u>.

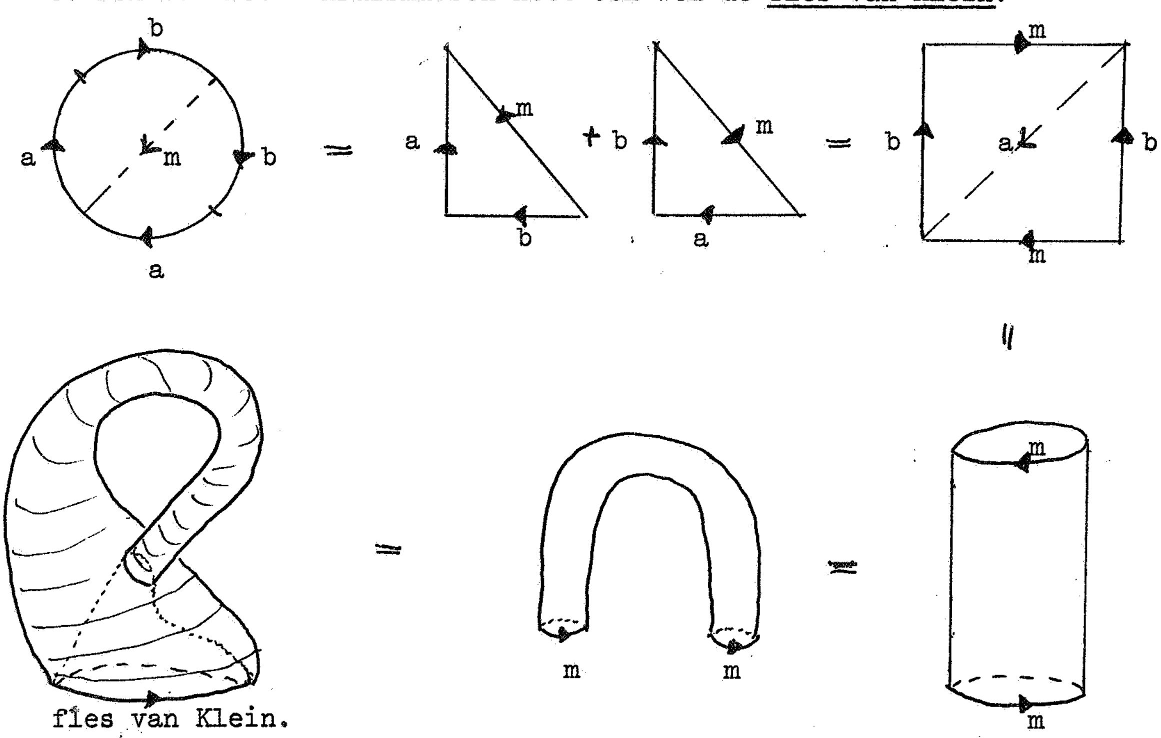




5. Uit de cirkelschijf ontstaat door identificatie van bogen op de rand volgens het schema $a_1\ a_1\ \ldots\ a_k\ a_k$ een <u>bol met k kruismutsen</u>.

<u>Stelling 1</u>. Een gesloten oppervlak is homeomorf met een bol met h hengsles of een bol met k kruismutsen.
(Voor een bewijs zie Seifert en Threlfall l.c.)

6. Een bol met 2 kruismutsen heet ook wel de <u>fles van Klein</u>.



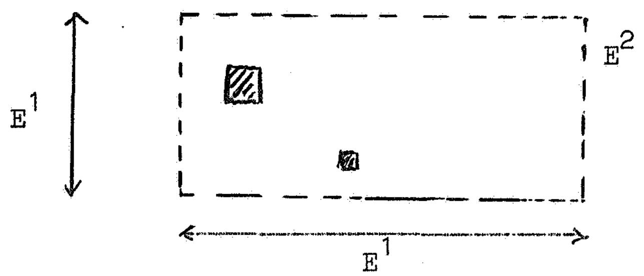
fles van Klein.

§4. Topologische producten

We definieren eerst eindige topologische producten.

Definitie 1. Laat $X_i = (V_i, \mathcal{O}_i)$, $i = 1, \ldots, n$, topologische ruimten zijn. Het topologisch product $\Pi\{X_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ van $X_1, \ldots, X_n$ heeft als punten de elementen van het Cartesisch product $\Pi\{V_i \mid i = 1, \ldots, n\}$(I, §2, definitie 1) en als basis voor de open verzamelingen de Cartesische producten $\Pi\{U_i \mid i = 1, \ldots, n\}$, waarbij $U_i \in \mathcal{O}_i$.

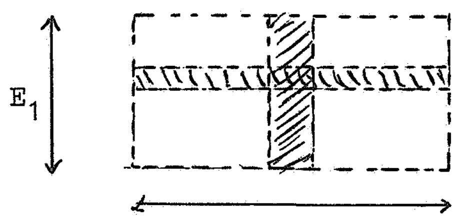
Voorbeeld 1. $E^n = \Pi\{X_i \mid X_i = E^1, i = 1, \ldots, n\}$.



Definitie 2. $\pi_i : \Pi\{V_j \mid j = 1, \ldots, n\} \to V_i$ gedefinieerd door $\pi_i((v_1, \ldots, v_n)) = v_i$ heet de natuurlijke projectie op de i^{de} coordinaat.

Het is eenvoudig in te zien dat de volgende definitie equivalent is met definitie 1.

Definitie 3. Laat $X_i = (V_i, \mathcal{O}_i)$, $i = 1, \ldots, n$, topologische ruimten zijn. Het topologische product $\Pi\{X_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ van $X_1, \ldots, X_n$ heeft als punten de elementen van het Cartesisch product $\Pi\{V_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ en als subbasis voor de open verzamelingen de collectie $\{\pi_i^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{O}_i, i = 1, \ldots, n\}$



(*) We zullen aantonen dat het eindig product van samenhangende (resp. compacte) ruimten weer samenhangend (resp. compact) is.

We willen nu het topologisch product $\Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ van de collectie van topologische ruimten $\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ (A oneindig) definieren en wel zó dat (*) blijft gelden. Hierbij blijkt definitie 1 niet geschikt, doch definitie 3 wel.

We brengen eerst de definitie van Cartesisch product in herinnering (I, §5, definitie 1). Het Cartesisch product $\Pi\{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$ van de familie $\{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$ is de verzameling van alle functies $f\colon A \to \cup\{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$ met $f(\alpha) \in V_\alpha$ voor alle $\alpha \in A$.

<u>Definitie 4</u>. $\pi_\beta\colon \Pi\{V_\alpha \mid \alpha \in A\} \to V_\beta$, gedefinieerd door $\pi_\beta(f) = f(\beta)$ heet de <u>natuurlijke projectie op de β^{de} coordinaat</u>.

<u>Definitie 5</u>. Laat $X_\alpha = (V_\alpha, \mathcal{O}_\alpha)$, $\alpha \in A$, topologische ruimten zijn. Het <u>topologisch product</u> $\Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ van het stelsel $\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ heeft als punten de elementen van het Cartesisch product $\Pi\{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$ en als subbasis voor de open verzamelingen de collectie $\{\pi_\alpha^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{O}_\alpha, \alpha \in A\}$.

Merk op dat $B = \{\cap\{\pi_{\alpha_i}(U_i) \mid i = 1, \ldots, n\} \mid U_i \in \mathcal{O}_{\alpha_i}, \alpha_i \in A, n = 1, 2, 3, \ldots\}$ blijkbaar een basis is voor $\Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Een element van B is van de vorm $\Pi\{Z_\alpha \mid \alpha \in A\}$ waarbij $Z_\alpha = V_\alpha$ voor alle α met slechts eindig veel uitzonderingen, zeg $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$; hiervoor is $Z_{\alpha_i} \in \mathcal{O}_{\alpha_i}$.

De volgende twee stellingen zullen we geregeld gebruiken.

<u>Stelling 1</u>. Laat $\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ een stelsel topologische ruimten zijn De natuurlijke projectie $\pi_\beta\colon \Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in A\} \to X_\beta$ is continu en open.

<u>Bewijs</u>. Als U open is in X_β, dan is $\pi_\beta^{-1}(U)$ per definitie open in $\Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Dus π_β is continu.

Om aan te tonen dat π_β open is, beschouwen we eerst een element van de basis B (alinea voor stelling 1). Zo'n element heeft de vorm $\Pi\{Z_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Hierin is iedere Z_α open in Z_α. $\pi_\beta(\Pi\{Z_\alpha \mid \alpha \in A\}) = Z_\beta$ en dus is het beeld van dit basiselement onder de afbeelding π_β open. Is U een willekeurige open verzameling uit $\Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$, dan is U de vereniging van elementen uit B. Pas nu I, §2, stelling 1 toe.

Stelling 2. Zij $f\colon X \to \Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$.
Dan is f continu dan en slechts dan als $\pi_\alpha \cdot f$ continu is voor iedere $\alpha \in A$.

Bewijs. "slechts dan" triviaal.
"dan" Zij eerst U een subbasiselement van $\Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$: $U = \pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ met U_β open in X_β.
Dan is $f^{-1}(U) = f^{-1} \cdot \pi_\beta^{-1}(U_\beta) = (\pi_\beta \cdot f)^{-1}(U_\beta)$.
Wegens de continuiteit van $\pi_\beta \cdot f$ is $f^{-1}(U)$ open. Pas nu I, §2, stelling 1 toe.

Gevolg 1. Laat $\sigma\colon A \to A$ een bijectie zijn. De afbeelding f: $\Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in A\} \to \Pi\{X_{\sigma(\alpha)} \mid \alpha \in A\}$ gedefinieerd door $f(g)(\sigma(\alpha)) = g(\alpha)$, $g \in \Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ is topologisch. Het topologisch product is dus onafhankelijk van de volgorde van de factoren.

We geven nu de topologische definitie van de grafiek van een functie $f\colon X \to Y$.

Definitie 5. Laat $F\colon X \to Y$ een afbeelding zijn. De grafiek X_f van $f\colon X \to Y$ is de deelruimte van het topologisch product $X \times Y$ gedefinieerd door $X_f = \{(x,y) \mid y = f(x)\}$.

Stelling 3. Als $f\colon X \to Y$ continu is, dan is de grafiek X_f van f homeomorf met X.

Bewijs. Zij π de natuurlijke projectie van $X \times Y$ op X en $\pi \mid X_f = g$. g is continu (stelling 1) en bijectief (definitie afbeelding). Tenslotte tonen we aan dat g open is (merk op dat de restrictie van een open afbeelding niet noodzakelijk open is). We nemen eerst aan dat $U = U_1 \times U_2$ waarbij U_1 open is in X en U_2 open is in Y. We tonen aan dat $g(U \cap X_f)$ open is in X.

$$\begin{aligned} g(U\cap X_f) = \pi(U\cap X_f) &= \{x \mid (x,f(x)) \in U = U_1 \times U_2\} \\ &= \{x \mid x \in U_1,\ f(x) \in U_2\} \\ &= U_1 \cap f^{-1}(U_2). \end{aligned}$$

Omdat f continu is, is $g(U\cap X_f)$ open.
Pas nu I, §2, stelling 1 toe (vgl. bewijs stelling 1).

We onderzoeken nu de invariantie van topologische eigenschappen voor het vormen van producten.

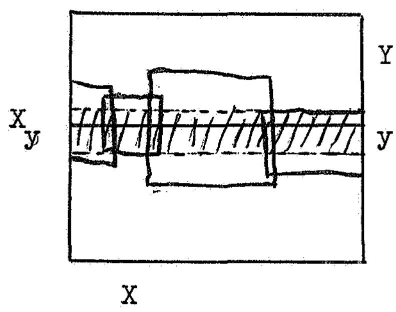
Stelling 4. Het topologisch product $\Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ van een familie van Hausdorffruimten is een Hausdorffruimte.

Bewijs. Zij $f, g \in \Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ en $f \neq g$.
Dan is $f(\beta) \neq g(\beta)$ voor zekere $\beta \in A$.
$f(\beta), g(\beta) \in X_\beta$. Omdat X_β een Hausdorffruimte is hebben $f(\beta)$ en $g(\beta)$ disjuncte open omgevingen, zeg U_1 en U_2. Hieruit volgt dat $\pi_\beta^{-1}(U_1)$ en $\pi_\beta^{-1}(U_2)$ disjuncte omgevingen van f en g zijn.

Stelling 5. (Tychonoff) Het topologisch product $\Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ van een familie van compacte ruimten is een compacte ruimte.

Bewijs. Het bewijs voor oneindige producten wordt in de volgende paragraaf gegeven. Hier geven we een bewijs voor eindige producten. Het is voldoende om aan te tonen dat het product van twee compacte ruimten compact is (daarna volledige inductie).

Laat X en Y compacte ruimten zijn. Zij eerst $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ een overdekking van $X \times Y$, waarbij $U_\alpha = V_\alpha \times W_\alpha$ met V_α open in X en W_α open in Y. Voor een vaste $y \in Y$ beschouwen we $X_y = \{(x,y) \mid x \in X\}$. X_y is homeomorf met X zoals gemakkelijk is in te zien (kan ook met stelling 3 aangetoond worden). X_y is dus compact. Hieruit volgt dat er $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ bestaan zodat $X_y \subset \cup\{V_{\alpha_i} \times W_{\alpha_i} \mid i = 1, \ldots, n\}$.
Zij $V_y = \cap\{V_{\alpha_i} \mid i = 1, \ldots, n\}$. Dan is $X \times V_y \subset \cup\{V_{\alpha_i} \times W_{\alpha_i} \mid i = 1, \ldots, n\}$.



Bij het punt y is er dus een open omgeving V_y zó dat de "strook" $X \times V_y$ door eindig veel $V_\alpha \times W_\alpha$ overdekt wordt. Bij ieder punt $y \in Y$ nemen we nu een open omgeving V_y zodat de strook $X \times V_y$ door eindig veel $V_\alpha \times W_\alpha$ overdekt wordt. Omdat Y compact is, heeft de overdekking $\{V_y \mid y \in Y\}$ een eindige deeloverdekking, zeg $V_{y_1}, \ldots, V_{y_k}$.

Dan wordt $X \times Y$ overdekt door eindig veel stroken $X \times V_y$, terwijl ieder strook weer door eindig veel $V_\alpha \times W_\alpha$ overdekt wordt. Dus $X \times Y$ wordt door eindig veel $V_\alpha \times W_\alpha$ overdekt.

Zij nu $\{C_\beta \mid \beta \in B\}$ een willekeurige open overdekking. Kies bij iedere punt $(x,y) \in X \times Y$ en iedere C_β met $(x,y) \in C_\beta$ een $U_\alpha = V_\alpha \times W_\alpha$ (zie boven zodat

$(x,y) \in V_\alpha \times W_\alpha \subset C_\beta$.

De zo verkregen collectie $\{V_\alpha \times W_\alpha \mid \alpha \in A_1\}$ is een overdekking van $X \times Y$, die een eindige deeloverdekking $\{V_{\alpha_i} \times W_{\alpha_i} \mid i = 1, \ldots, n\}$ heeft. Kies nu bij iedere $V_{\alpha_i} \times W_{\alpha_i}$ een omvattende C_β. Dit levert een eindige deeloverdekking van $\{C_\beta \mid \beta \in B\}$ op. Q.E.D.

<u>Stelling 6</u>. Het topologisch product $\Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ van een familie van samenhangende ruimten is samenhangend.

<u>Bewijs</u>. Zij eerst X en Y samenhangend. Bij ieder punt $(x,y) \in X \times Y$ beschouwen we de samenhangende verzameling

$A_{(x,y)} = \{(t,y) \mid t \in X\} \cup \{(x,t) \mid t \in Y\}$.

Pas nu III, §1, stelling 2 toe: $X \times Y$ is dus samenhangend. Met volledige inductie volgt hieruit dat een eindig product van samenhangende ruimten weer samenhangend is.

Zij nu X_α samenhangend voor $\alpha \in A$.

Laat f een vast punt zijn uit $\Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$. (Denk eraan: $f: A \to \cup\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$.)

Zij $Q = \{g \mid g \in \Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}, g(\alpha) = f(\alpha)$ op <u>eindig</u> veel uitzonderingen na$\}$.

We zullen aantonen dat Q samenhangend is en dat $\overline{Q} = \Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$. De stelling volgt dan uit III, §1, stelling 3. Laat $q \in Q$ en stel dat $f(\alpha) \neq g(\alpha)$ voor $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Zij $R = \{h \mid h \in \Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}, h(\alpha) = f(\alpha)$ voor $\alpha \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}\}$.

Dan $f, g \in R \subset Q$. Bovendien is R homeomorf met $X_{\alpha_1} \times \ldots \times X_{\alpha_n}$. f en g behoren dus beide tot de samenhangende verzameling R. Omdat g een willekeurig element uit Q is, volgt de samenhang van Q uit III, §1, stelling 2.

We tonen nu aan dat een willekeurig punt $h \in \Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ verdichtingspunt van Q is. Zij U een omgeving van h. We mogen aannemen dat U van de volgende vorm is: $U = \Pi\{Z_\alpha \mid \alpha \in A\}$, waarbij $Z_\alpha = X_\alpha$ voor alle α met slechts eindig veel uitzonderingen, zeg $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$; hiervoor is Z_{α_i} open in X_{α_i} (vgl. opmerking voor stelling 1).

Definieer nu $k \in \Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ door

$$k(\alpha) = f(\alpha) \text{ voor } \alpha \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \text{ en}$$
$$k(\alpha_i) \in Z_{\alpha_i} \text{ voor } \alpha \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}. \text{ Dan is } k \in Q \cap U.$$

In het bijzonder is dus $Q \cap U \neq \emptyset$. Dus h is verdichtingspunt van Q.

Opmerking. Zij N de verzameling van de natuurlijke getallen. De elementen van het topologisch product $\Pi\{X_n \mid n \in N\}$ geven we aan met $(x_1, x_2, \ldots)$ in plaats van met $f\colon N \to \cup\{X_n \mid n \in N\}$; hierbij is $x_i = f(i)$, $i \in N$.

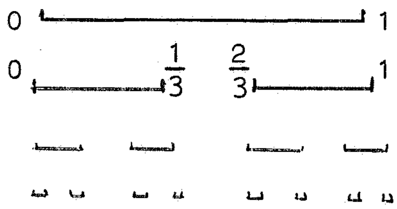
Voorbeeld 2. Een doublet D is een discrete ruimte bestaande uit twee punten:

$D = (\{0,1\}, \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\})$.

Het Cantordiscontinuum is het aftelbaar topologisch product van doubletten: $\Pi\{D_i \mid D_i = D, i \in N\}$.

Het Cantordiscontinuum werd door Cantor ingevoerd als

$$C = \{x \mid x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n},\ a_n = 0 \text{ of } 2\}.$$



Een voorstelling van C verkrijgt men door uit $[0,1]$ het interval $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ weg te laten; vervolgens van de resterende intervallen weer het middelste derde weg te laten enz.

We definieren een topologische afbeelding $f\colon C \to \Pi\{D_i \mid i \in N\}$ door

$$f\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}\Big) = \Big(\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{2}, \ldots\Big).$$

Ga na dat f topologisch is (gebruik eventueel stelling 2). Door de voorstelling van het Cantorcontinuum als aftelbaar product zien men met weinig moeite in dat het Cantordiscontinuum homogeen is. D.w.z.

als p, q $\in$ C, dan is er een topologische afbeelding $f: C \to C$ met $f(p) = q$.

Voorbeeld 3. De separabele Hilbertruimte H kan als volgt gedefinieerd worden:

$$H = \{\underline{x} \mid \underline{x} = (x_1, x_2, \ldots), x_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$$

met de metriek ρ bepaald door:

$$\rho(\underline{x},\underline{y}) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

De fundamentaalbalk van Hilbert F is een deelruimte van H bepaald door

$$F = \{\underline{x} \mid \underline{x} = (x_1, x_2, \ldots), x_i \in R, |x_i| \leq \tfrac{1}{i}\}.$$

F is homeomorf met het aftelbaar topologisch product van gesloten intervallen: $\Pi\{I_j \mid I_j = [-1,1], j \in N\}$.
Een topologische afbeelding $f: \Pi\{I_j \mid j \in N\} \to F$ is gegeven door $f((x_1, x_2, x_3, \ldots)) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \ldots)$. Ga dit na.

Men kan bewijzen dat $\Pi\{I_j \mid j \in N\}$, en dus ook F, homogeen is. (lasig bewijs) Dit is voor het eerst bewezen door Anderson (1963).
Ook kan bewezen worden dat de separabele Hilbertruimte H homeomorf is met het aftelbare topologisch product van reële rechten:
$H \sim \Pi\{\mathbb{R}_i \mid \mathbb{R}_i = \mathbb{R}, i \in N\}$ (Anderson 1966).

§5. Stelling van Tychonoff

In deze paragraaf bewijzen we de stelling van Tychonoff (vorige paragraaf, stelling 5) en het zgn. lemma van Alexander. Als hulpmiddel bij het bewijs gebruiken we het begrip van filter (N. Bourbaki).

Definitie 1. Een stelsel deelverzamelingen $\mathcal{F}$ van X heet een filter op X als:

F1. Als $G \in \mathcal{F}$ en $G \subset H$, dan $H \in \mathcal{F}$,

F2. Als $G_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, \ldots, n$, dan $\cap\{G_i \mid i = 1, \ldots, n\} \in \mathcal{F}$,

F3. $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Voorbeeld 1. Zij A een niet lege deelverzameling van X, Het stelsel van alle omgevingen van A, het omgevingssysteem van A, is een filter.

Het volgende lemma zullen we enige keren gebruiken.

Lemma 1. Laat $\{F_\alpha \mid \alpha \in A\}$ een stelsel verzamelingen zijn zó dat $\cap\{F_{\alpha_i} \mid i = 1, \ldots, n\} \neq \emptyset$ voor ieder eindig deelstelsel $\{F_{\alpha_i} \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$. Zij $\mathcal{G} = \{G \mid \exists\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset A$ met $F_{\alpha_1} \cap \ldots \cap F_{\alpha_n} \subset G\}$. Dan is $\mathcal{G}$ een filter dat $\{F_\alpha \mid \alpha \in A\}$ omvat.

Bewijs. We gaan na dat aan F2 voldaan is (Ga F1 en F3 zelf na.) Stel $G_i \in \mathcal{G}$. Voor iedere i zijn er dan $\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in_i}$ zodat $\cap\{F_{\alpha_{ij}} \mid j = 1, \ldots, n_i\} \subset G_i$. Dan is

$$\cap\{F_{\alpha_{ij}} \mid j = 1, \ldots, n_i;\ i = 1, \ldots, n\} \subset \cap\{G_i \mid i = 1, \ldots, n\}.$$

Dus $\cap\{G_i \mid i = 1, \ldots, n\} \in \mathcal{G}$.

Definitie 2. Laat $\mathcal{F}_1$ en $\mathcal{F}_2$ filters zijn op X.
Als $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$, dan heet $\mathcal{F}_2$ fijner dan $\mathcal{F}_1$.
Als $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ en $\mathcal{F}_1 \neq \mathcal{F}_2$, dan heet $\mathcal{F}_2$ echt fijner dan $\mathcal{F}_1$.

Definitie 3. Een filter $\mathcal{F}$ op X heet een ultrafilter als er geen filter bestaat, dat echt fijner is dan $\mathcal{F}$.

<u>Stelling 1</u>. Ieder filter is bevat in een ultrafilter.

Stelling 1 wordt <u>hier niet</u> bewezen. Voor het bewijs maakt men gebruik van het keuze axioma (of het lemma van Zorn, dat hiermee equivalent is).
De twee volgende stellingen geven de belangrijkste eigenschappen van ultrafilters weer.

<u>Stelling 2</u>. Laat F een filter zijn op X.
F is een ultrafilter dan en slechts dan als aan de volgende voorwaarde voldaan is: Voor alle A en B:
Als $A \cup B \in F$, dan $A \in F$ of $B \in F$. (*)

<u>Bewijs</u>. "slechts dan".
Stel F is een ultrafilter en aan de voorwaarden (*) is niet voldaan:
$A \cup B \in F$, $A \notin F$ en $B \notin F$ voor zekere A en B.
Zij $G = \{M \mid A \cup M \in F\}$.
Het is eenvoudig na te gaan dat G een filter is.
$F \subset G$ en $F \neq G$ want $B \in G \setminus F$.
Het filter G is dus echt fijner dan F. Dit is in tegenspraak met het feit dat F een ultrafilter is.
"dan". Uit F1 volgt, dat altijd $X \in F$. Uit voorwaarde (*) volgt dan dat voor iedere deelverzameling Y van X geldt:
$Y \in F$ of $(X \setminus Y) \in F$.
Stel nu dat G echt fijner is dan F. Stel $Y \in G \setminus F$.
Dan $(X \setminus Y) \notin G$ (anders $\emptyset = Y \cap (X \setminus Y) \in G$). Dan $(X \setminus Y) \notin F$. Dus $Y \in F$.
Tegenspraak.

<u>Gevolg 1</u>. Zij F een ultrafilter op X. Als $\cup\{A_i \mid i = 1, \ldots, n\} \in F$, dan is er een j zodat $A_j \in F$.

<u>Stelling 3</u>. Zij F een ultrafilter op X, Als $G \cap F \neq \emptyset$ voor alle $F \in F$, dan $G \in F$.

<u>Bewijs</u>. Zij $G = \{H \mid (\exists F \in F)(G \cap F \subset H)\}$.
G is een filter (lemma 1; vervang $\{F_\alpha \mid \alpha \in A\}$ door $F \cup \{G\}$), dat fijner is dan F. Omdat F een ultrafilter is, geldt $F = G$. In het bijzonder is $G \in G = F$.

We beschouwen nu filters op topologische ruimten.

Definitie 4. Zij $\mathcal{F}$ een filter op een topologische ruimte X. We zeggen dat $\mathcal{F}$ convergeert naar $x \in X$ als $\mathcal{F}$ fijner is dan het omgevingssysteem $\mathcal{U}(x)$ van x. $\mathcal{F}$ heet convergent als er een x is zodat $\mathcal{F}$ convergeert naar x.

We kunnen nu compactheid als volgt karakteriseren.

Stelling 4. Een topologische ruimte X is compact dan en slechts dan als iedere ultrafilter op X convergent is.

Bewijs. "slechts dan". Zij $\mathcal{F}$ een ultrafilter op X. Beschouw $\mathcal{G} = \{\overline{F} \mid F \in \mathcal{F}\}$. Uit III, §3, stelling 8 volgt nu $\cap\mathcal{G} \neq \emptyset$. Zij $x \in \cap\mathcal{G}$. Dan $x \in \overline{F}$ voor iedere $F \in \mathcal{F}$. Hieruit volgt dat als U een omgeving is van x - d.w.z. $U \in \mathcal{U}(x)$ - dan $U \cap F \neq \emptyset$ voor iedere $F \in \mathcal{F}$. Uit stelling 3 volgt dan $U \in \mathcal{F}$. Dus $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{F}$ en $\mathcal{F}$ convergeert naar x.
"dan". Stel $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ is een open overdekking van X welke geen eindige deeloverdekking heeft. Zij $F_\alpha = X \setminus U_\alpha$, $\alpha \in A$. Dan is $\cap\{F_{\alpha_i} \mid i = 1, \ldots, n\} \neq \emptyset$ voor ieder eindig deelstelsel $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset A$.
Zij $\mathcal{F} = \{F \mid (\exists\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\} \subset A)(\cap\{F_{\alpha_i} \mid i=1,\ldots,n\} \subset F)\}$.
Volgens lemma 1 is $\mathcal{F}$ een filter dat $\{F_\alpha \mid \alpha \in A\}$ omvat. Zij $\mathcal{G}$ een ultrafilter dat fijner is dan $\mathcal{F}$ (stelling 1). $\mathcal{G}$ is convergent volgens het gegeven. Stel $\mathcal{G}$ convergeert naar x. Dan $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{G}$. In het bijzonder is dan $U \cap F \neq \emptyset$ voor alle $U \in \mathcal{U}(x)$ en alle $F \in \{F_\alpha \mid \alpha \in A\}$.
Omdat iedere F_α gesloten is, volgt $x \in \cap\{F_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Maar dan $x \notin \cup\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Dus $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ is geen overdekking. Tegenspraak.

Stelling 5. (Lemma van Alexander)
Een topologische rukmte X is compact dan en slechts dan als er een subbasis $\mathcal{S}$ voor de open verzamelingen van X bestaat zó dat iedere overdekking van X met elementen van $\mathcal{S}$ een eindige deeloverdekking heeft.

Bewijs. "slechts dan". Triviaal.
"dan". Stel $\mathcal{S}$ is een subbasis voor de open verzamelingen van X die voldoet aan de voorwaarden van de stelling. Stel dat X niet compact is. Volgens stelling 4 is er dan een ultrafilter $\mathcal{F}$ op X dat niet convergent

is. Zij x een willekeurig punt uit X. Omdat F niet convergent is, convergeert F niet naar x. Dus het omgevingssysteem $\mathcal{U}(x)$ van x is niet bevat in F. Er is dus een omgeving U van z, met $U \notin F$. Nu kiezen we $S_i \in \mathcal{S}$, $i = 1, \ldots, n$ zodat $x \in \cap\{S_i \mid i = 1, \ldots, n\} \subset U$. Omdat $U \notin F$, geldt $S_j \notin F$ voor zekere j (F1 en F2). We noemen dit subbasiselement S_x.
Voor ieder punt $x \in X$ is er dus een $S_x \in \mathcal{S}$ met $x \in S_x$ en $S_x \notin F$.
Beschouw de overdekking $\{S_x \mid x \in X\}$. Deze overdekking heeft een eindige deeloverdekking, zeg $\{S_{x_1}, \ldots, S_{x_n}\}$.
Omdat $X = \cup\{S_{x_i} \mid i = 1, \ldots, n\}$ en $X \in F$, geldt dat $S_{x_j} \in F$ voor zekere j (gevolg 1). Dit is een contradictie.

Een toepassing van stelling 5 wordt gegeven in het volgende voorbeeld en in het bewijs van stelling 6.

Voorbeeld 2. Het interval [a,b] is compact. We tonen dit als volgt aan. Het stelsel van alle verzamelingen van de vorm
$\{x \mid c < x \leq b\}$, $a \leq c < b$ en $\{x \mid a \leq x < c\}$, $a < c \leq b$ is een subbasis voor de open verzamelingen van [a,b].
Laat $\mathcal{U}$ een overdekking zijn van [a,b] met elementen uit deze subbasis.
Zij $p = \inf \{c \mid (c,b] \in \mathcal{U}\}$. Dan is er een $q > p$ zodat $[a,q) \in \mathcal{U}$ (en dus $p \in [a,q)$). Kies nu een $r \in (p,q)$ zodat $(r,b] \in \mathcal{U}$. Dan is $\{[a,q), (r,b]\}$ een overdekking van [a,b] die uit twee elementen bestaat.

Voorbeeld 3. Uit voorbeeld 2 en §4, stelling 5 volgt dat het product van eindig veel intervallen compact is.
Met III, §3, stelling 2 volgt hieruit dat iedere begrensde gesloten deelverzameling van de E^n compact is. Omgekeerd is een compacte deelverzameling van de E^n gesloten (III, §3, stelling 3) en begrensd (vgl. III, §3, stelling 1).
De compacte deelverzamelingen van de E^n zijn dus juist de begrensde en gesloten deelverzamelingen van de E^n.

Stelling 6. (Tychonoff). Het toplogisch product $\Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ van een stelsel topologische ruimten $\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ is compact dan en slechts dan als iedere X_α compact is.

<u>Bewijs</u>. "slechts dan". Uit §4, stelling 1 en III, §3, stelling 1.
"dan". We passen stelling 5 toe. Als subbasis S kiezen we $\{\pi_\alpha^{-1}(U) \mid U \text{ open in } X_\alpha,\ \alpha \in A\}$.
Zij nu C een overdekking van $\Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ met elementen van S. Stel C heeft geen eindige deeloverdekking (*).
Neem een vaste index $\beta \in A$.
Beschouw $C_\beta = \{U \mid U \text{ open in } X_\beta,\ \pi_\beta^{-1}(U) \in C\}$.
Wegens (*) en de compactheid van X_β is C_β geen overdekking van X_β.
Kies $q_\beta \in X_\beta \setminus \cup C_\beta$.
Zij $f\colon A \to \cup\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ gedefinieerd door $f(\alpha) = q_\alpha$.
Dan is $f \in \Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ en $f \notin \cup C$ ($f \notin C_\beta$ voor iedere $\beta \in A$!). Dus C is geen overdekking. Contradictie.

<u>Voorbeeld 4</u>. Het Cantordiscontinuum (§4, voorbeeld 2) en de fundamentaalbalk van Hilbert (§4, voorbeeld 3) zijn compact.

Ga de volgende stelling zelf na.

<u>Stelling 7</u>. Het topologisch product $\Pi\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ van een stelsel topologische Hausdorff ruimten $\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ is locaal compact dan en slechts dan als iedere X_α locaal compact is en alle X_α op eindig veel uitzonderingen na compact zijn.

§6. Inbeddingen in hyperkubussen

Volgens de resultaten uit de paragrafen 4 en 5 is het topologisch product van gesloten intervallen een compacte Hausdorffruimte. In deze paragraaf onderzoeken we welke ruimten opgevat kunnen worden als deelruimte van een hyperkubus (is "ingebed worden in een hyperkubus"). Hiermee onderzoeken we tevens welke ruimten een Hausdorff compactificatie hebben (vgl. III, §4). Tenslotte leiden we de klassieke metriseringsstelsel van Urysohn af.

Definitie 1. Een hyperkubus is een topologisch product van gesloten intervallen.

Definitie 2. Een topologische T_1-ruimte X heet volledig regulier indien er bij iedere punt $x \in X$ en iedere gesloten deelverzameling $G \subset X$ met $x \notin G$ een continue reële functie $f: X \to \mathbb{R}$ bestaat met $f(x) = 0$ en $f(G) = 1$.

Uit het lemma van Urysohn en het bewijs ervan (§1) vinden we de volgende stelling.

Stelling 1. Een normale ruimte is volledig regulier. Een volledig reguliere ruimte is regulier.

Stelling 2. Een deelruimte van een volledig reguliere ruimte is volledig regulier.

Bewijs. Zij X een volledog reguliere ruimte en $Y \subset X$. Zij $p \in Y$ en G een in Y gesloten verzameling met $p \notin G$. Omdat G gesloten is in Y, is $p \notin \overline{G}$ (afsluiting in X). Zij f een continue reële functie op X met $f(p) = 0$ en $f(\overline{G}) = 1$. Dan is f/Y een continue reële functie op Y met $(f/Y)(p) = 0$ en $(f/Y)(G) = 1$.
De volledig reguliere ruimten zijn ingevoerd door Tychonoff (1930). Het blijkt dat een topologische ruimte opgevat kan worden als een deelruimte van een hyperkubus dan en slechts dan als hij volledig regulier is (volgende stelling).
Door Tychonoff zijn tevens voorbeelden geconstrueerd van volledig reguliere ruimten die niet normaal zijn en van reguliere ruimten die niet volledig regulier zijn. Op deze voorbeelden gaan we hier niet in.

<u>Stelling 3</u>. Zij X een topologische ruimte. De volgende voorwaarden I t/m III zijn equivalent.

I $\quad$ X is volledig regulier,

II $\quad$ X is homeomorf met een deelruimte van een hyperkubus,

III $\quad$ X heeft een Hausdorff compactificatie.

<u>Bewijs</u>. II $\to$ III. Een hyperkubus is een compacte Hausdorffruimte. Als X homeomorf is met een deelruimte van een hyperkubus P, dan kunnen we X identificeren met deze deelruimte. $\overline{X}$ (de afsluiting van X in P) is dan compact als gesloten deelverzameling van de compacte hyperkubus P en blijkbaar een compactificatie van X.
III $\to$ I. Een compacte Hausdorffruimte is normaal (III, §3, stelling 5), en dus volledig regulier. Uit stelling 2 volgt dan dat X regulier is.
I $\to$ II. Zij X volledig regulier. Beschouw alle paren (p,U) met $p \in U$ en U open in X: $\{(p,U)_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Bij ieder paar $(p,U)_\alpha$ kiezen we een continue reële functie $f_\alpha: X \to [0,1]$ met $f_\alpha(p) = 0$ en $f_\alpha(X\setminus U) = 1$.
(Zo'n functie verkrijgt men door een continue reële functie $g: X \to \mathbb{R}$ met $g(p) = 0$ en $g(X\setminus U) = 1$, welke bestaat op grond van definitie 2, samen te stellen met $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $h(x) = 0$ voor $x \leq 0$, $h(x) = x$ voor $0 \leq x \leq 1$, en $h(x) = 1$ voor $x \geq 1$.) Zij $W_\alpha = f_\alpha^{-1}([0,1))$.
Het is duidelijk dat $p \in W_\alpha \subset U$. Bovendien is W_α open wegens de continuiteit van f_α.
Het stelsel $\{W_\alpha \mid \alpha \in A\}$ is een basis voor de open verzamelingen van X.
We bewijzen dit met het criterium uit II, §1, stelling 3.
Zij W een open verzameling en $q \in W$. Dan is $(q,W) = (p,U)_\beta$ voor zekere $\beta \in A$. Dan is $q \in W_\beta \subset W$.
Het voorgaande kunnen we als volgt samenvatten.

$(*)$ Is X een volledig reguliere ruimte, dan is er een basis $\{W_\alpha \mid \alpha \in A\}$ voor de open verzamelingen van X en een stelsel continue reële functies $\{f_\alpha \mid \alpha \in A\}$ met $f_\alpha: X \to\ 0,1$ en $f_\alpha^{-1}([0,1)) = W_\alpha$.

Met behulp van eigenschap $(*)$ tonen we aan dat X homeomorf is met een deelruimte van $\Pi\{I_\alpha \mid I_\alpha = [0,1], \alpha \in A\}$. We zullen nu een afbeelding $f: X \to \Pi\{I_\alpha \mid \alpha \in A\}$ construeren. (Denk eraan: een element uit

$\Pi\{I_\alpha \mid \alpha \in A\}$ is een functie $h: A \to \cup\{I_\alpha \mid \alpha \in A\}$ met $h(\beta) \in I_\beta$, $\beta \in A$.)
Zij $x \in X$; $\underline{f(x)(\alpha) = f_\alpha(x)}$.
We zullen achtereenvolgens aantonen dat f continu is, f injectief is en $f: X \to f(X)$ open is. Dan is $f: X \to f(X)$ een topologische afbeelding, hetgeen bewezen moest worden.
De continuiteit van f volgt uit §4, stelling 2: $\pi_\alpha \cdot f = f_\alpha$ en f_α is continu. Dat $\pi_\alpha \cdot f = f_\alpha$, volgt uit $\pi_\alpha \cdot f(x) = \pi_\alpha(f(x)) = f(x)(\alpha) = f_\alpha(x)$ voor alle $x \in X$.
f is injectief. Zij namelijk $x \neq y$. Dan is $(x, X\backslash\{y\}) = (p,U)_j$ voor zekere $j \in A$. Dan is $x \in W_j$ en $y \notin W_j$ en dus $f_j(x) \in [0,1)$ en $f_j(y) = 1$. In het bijzonder is $f_j(x) \neq f_j(y)$. Dus $f(x)(j) \neq f(y)(j)$ en $f(x) \neq f(y)$.
Tenslotte tonen we aan dat $f: X \to f(X)$ open is.
In verband met I, §1, stelling 1 is het voldoende **om** aan te tonen dat $f(W_\alpha)$ open is in $f(X)$ voor iedere α.

$$
\begin{aligned}
\text{Nu is } f(W_\alpha) &= \{f(x) \mid x \in W_\alpha\} \\
&= \{f(x) \mid x \in X,\ f_\alpha(x) \in [0,1)\} \\
&= \{f(x) \mid x \in X,\ \pi_\alpha(f(x)) \in [0,1)\} \\
&= f(X) \cap \pi_\alpha^{-1}([0,1)).
\end{aligned}
$$

Dus $f(W_\alpha)$ is gelijk aan de doorsnede van de open verzameling $\pi_\alpha^{-1}([0,1))$ en $f(X)$. Dus $f(W_\alpha)$ is open in $f(X)$. Q.E.D.

We zullen nu enige gevolgen van stelling 3 afleiden.

Gevolg 1. Het topologisch product van een stelsel van volledig reguliere ruimten is volledig regulier.

Bewijs. Uit de equivalentie van I en II. Een product van hyperkubussen is een hyperkubus.

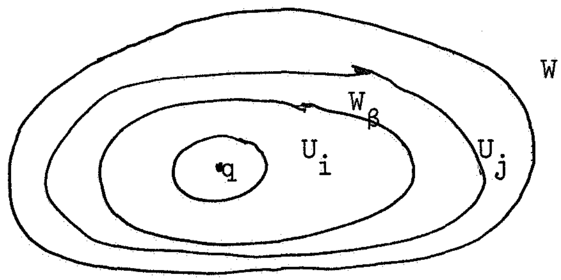
Gevolg 2. Een lokaal compacte Hausdorffruimte is volledig regulier.

Bewijs. Uit de equivalentie van I en III, en III, §4, stelling 1.

Gevolg 3. (Urysohn-Tychonoff) Een volledig reguliere ruimte X met aftelbare basis is homeomorf met een deelruimte van de fundamentaalbalk van Hilbert en dus metrizeerbaar.

<u>Bewijs</u>. Omdat X volledig regulier is, is er een basis $\{W_\alpha \mid \alpha \in A\}$ en een stelsel continue functies $\{f_\alpha \mid \alpha \in A\}$ zodat aan (*) voldaan is. (bewijs vorige stelling). Zij nu $\{U_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$ een aftelbare basis voor de open verzamelingen van X. Als $\overline{U}_i \subset U_j$ en als er een W_α is met $\overline{U}_i \subset W_\alpha \subset U_j$, dan noteren we deze W_α met W_{ij}. In de andere gevallen nemen we $W_{ij} = \emptyset$. Dan is $\{W_{ij} \mid i = 1, 2, \ldots; j = 1, 2, \ldots\}$ een aftelbare basis van X. We bewijzen dit met het croterium uit II, §1, stelling 3.

Zij W een open verzameling en $q \in W$. Dan is er een j zodat $q \in U_j \subset W$ want $\{U_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$ is een basis. Dan is er een β met $q \in W_\beta \subset U_j$, want $\{W_\alpha \mid \alpha \in A\}$ is een basis. Dan is er een i zodat $q \in U_i \subset \overline{U}_i \subset W_\beta$, want $\{U_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$ is een basis en X is regulier. Dan is $W_\beta = W_{ij}$ en $q \in W_{ij} \subset W$.



Dus X heeft een aftelbare basis $\{W_{ij} \mid i = 1, 2, \ldots; j = 1, 2, \ldots\}$ zó dat voor iedere $W_{ij} \neq \emptyset$ er een continue $f_{ij}: X \to [0,1]$ bestaat met $W_{ij} = f_{ij}^{-1}([0,1))$. Uit het bewijs van de vorige stelling volgt dan dat X homeomorf is met het aftelbare topologisch product van gesloten intervallen. Pas nu §4, voorbeeld 3 toe.