ZW

stichting mathematisch centrum

MC

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE   ZC 77/70   SEPTEMBER

AANTEKENINGEN VAN DE WERKGROEP ALGEBRAÏSCHE MEETKUNDE II

ZW

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

§5. Projectieve Schema's.

Definitie 5.1: Een ring R heet een gegradeerde ring als er additieve subgroepen R_n $(n \in \mathbb{Z})$ bestaan zodat

$$R = \sum_{n\in\mathbb{Z}} R_n$$

terwijl bovendien voldaan is aan:

$$R_n . R_m \subset R_{n+m} \ .$$

Definitie 5.2: Als $R = \sum_{n\in\mathbb{N}} R_n$ een gegradeerde ring is, dan noteren we:

$$R_+ := \sum_{n=1}^{\infty} R_n \ .$$

Definitie 5.3: Een ideaal $\underline{i}$ van een gegradeerde ring $R = \sum R_n$ heet homogeen als

$$\underline{i} = \sum \underline{i} \cap R_n \ .$$

Definitie 5.4: Een element r van een gegradeerde ring $R = \sum R_n$ heet homogeen van de graad m als

$$r \in R_m \ .$$

Opmerking 5.5: Als $R = \sum R_n$ een gegradeerde ring is, dan is R_0 een ring en elke R_n is een R_0-moduul.

Opmerking 5.6: Zij $R = \sum R_n$ een gegradeerde ring, en zij $r \in R_m$. Noteer:

$$(R_r)_k := \{\frac{s}{r^t} \mid s \in R_{tm+k}\} \subset R_r \ .$$

Dan is met

$$R_r = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (R_r)_k$$

R_r een gegradeerde ring.

Bew: Ga na.

Definitie 5.7: Als $R = \sum R_n$ een gegradeerde ring is, en $r \in R_m$, dan

$$R_{(r)} := (R_r)_0 = \{\frac{s}{r^t} \in R_r \mid s \in R_{tm}\} .$$

Definitie 5.8: Als $R = \sum R_n$ een gegradeerde ring is, dan noteren we:

$$R^{(d)} := \sum_n R_{nd}$$

Ook $R^{(d)}$ is een gegradeerde ring.

Definitie 5.9: Een ring-morphisme

$$\xi: A \longrightarrow \sum R_n$$

van een ring A naar een gegradeerde ring R heet een gegradeerde A-algebra als $\xi(A) \subset R_0$.

Definitie 5.10: Zij $R = \sum R_n$ een gegradeerde ring en zij M een R-moduul. Als er additieve subgroepen M_n, $n \in \mathbb{Z}$ van M zijn, zodat

$$M = \sum_{n \in \mathbb{Z}} M_n$$

terwijl bovendien voor elke $k, l \in \mathbb{Z}$ geldt:

$$R_k . M_l \subset M_{k+l}$$

dan heet M een gegradeerd R-moduul.

Definitie 5.11: Als $M = \sum M_n$ een gegradeerd R-moduul is, dan noteren we:

$$M^{(m)} := \sum_{n \in \mathbb{Z}} M_{mn}$$

$M^{(m)}$ is een gegradeerd $R^{(m)}$-moduul.

<u>Definitie 5.12</u>: Als $M = \sum M_n$ een gegradeerd R-moduul is, dan noteren we:

$$M(k) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} (M(k))_n$$

waarbij

$$(M(k))_n := M_{k+n}$$

M(k) is zo een gegradeerd R-moduul.

<u>Opmerking 5.13</u>: In het bijzonder hebben we bij een gegradeerde ring $R = \sum R_n$ de gegradeerde R-modulen $R(k)$ $(k\in\mathbb{Z})$.

<u>Definitie 5.14</u>: Zij $R = \sum R_n$ een gegradeerde ring, en zij $M = \sum M_n$ een gegradeerd R-moduul. Zij voorts $r\in R_k$. Dan is M_r een gegradeerd R_r-moduul met

$$M_r = \sum_n (M_r)_n$$

waarbij

$$(M_r)_n := \{\frac{m}{r^t} \in M_r \mid m\in M_{tk+n}\}.$$

Definieer:

$$M_{(r)} := (M_r)_0 \ .$$

<u>Definitie 5.15</u>: Zijn $M = \sum M_n$ en $N = \sum N_n$ twee gegradeerde R-modulen, dan heet een R-moduul-morphisme

$$\phi: M \longrightarrow N$$

een <u>morphisme van gegradeerde R-modulen</u> als voor elke $n\in\mathbb{Z}$ geldt:

$$\phi M_n \subset N_n \ .$$

De verzameling van morphismen van gegradeerde R-modulen van M naar N zullen we aangeven met

$$\mathrm{Hom}_R(M,N)_0$$

(niet te verwarren met $\mathcal{M}_R(M,N)$!)

<u>Opmerking 5.16</u>: <u>Zij</u> $R = \sum R_n$ <u>een gegradeerde ring, en zijn</u> $M = \sum M_n$ <u>en</u> $N = \sum N_n$ <u>twee gegradeerde R-modulen. Dan is</u> $M \otimes_R N$ <u>een gegradeerd R-moduul</u>.

<u>Bewijs</u>: Definieer:

$$(M \otimes N)_n := \{ \sum_i^{<\infty} m_i \otimes m_i' \mid \text{graad } m_i + \text{graad } m_i' = n \} .$$

We krijgen dan een gradering

$$M \otimes N = \sum_n (M \otimes N)_n .$$

<u>Afspraak</u>: Tenzij anders vermeld, zullen we steeds aannemen dat elke gegradeerde ring positief gegradeerd is. D.w.z.:

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} R_n .$$

<u>Definitie 5.17</u>: Bij elke gegradeerde ring $R = \sum R_n$ definiëren we als volgt een topologische ruimte

$$\mathrm{Proj}(R)$$

Als verzameling is Proj(R) de deelverzameling van Spec(R), die gevormd wordt door de punten $x_{\underline{p}}$ die voldoen aan de volgende twee voorwaarden:

$$\begin{cases} \text{(i)} & \underline{p} \text{ is een homogeen priemideaal} \\ \text{(ii)} & R_+ \not\subset \underline{p} \end{cases}$$

We geven verder Proj(R) de door Spec(R) geïnduceerde topologie.

Definitie 5.18: Als $R = \sum R_n$ een gegradeerde ring is, en $r \in R_m$ dan definiëren we:

$$D_+(r) := D(r) \cap \mathrm{Proj}(R).$$

Lemma 5.19: *Zij $R = \sum R_q$ een gegradeerde ring. Zij $n_0 \in \mathbb{N}$ met $n_0 > 0$, zodat voor elke $n \geq n_0$ er een additieve ondergroep $\underline{p}_n$ van R_n is gegeven. Dan zijn de volgende twee uitspraken aequivalent:*

(i) $\exists x_{\underline{p}} \in \mathrm{Proj}(R).\ \underline{p} \cap R_n = \underline{p}_n$ als $n \geq n_0$

(ii)
- a) $R_m \underline{p}_n \subset \underline{p}_{n+m}$ als $n \geq n_0$ en $m \in \mathbb{N}$
- b) Als $r \in R_m$, $t \in R_n$ en $rt \in \underline{p}_{n+m}$, dan is $r \in \underline{p}_m$ of $t \in \underline{p}_n$ als $n,m \geq n_0$
- c) $\exists n \geq n_0 \ .\ \underline{p}_n \neq R_n$

Bewijs (i) $\Longrightarrow$ (ii): a) en b) volgen op triviale manier. Om c) te bewijzen kiezen we $a \in R_+$, zeg $a = a_1 + \ldots + a_k$ $(a_i \in R_i)$. Stel:

$$\forall n \geq n_0 \ .\ \underline{p}_n = R_n \ .$$

Dan is

$$a_1^n \in R_n = \underline{p}_n \subset \underline{p}$$

zodat $a_1 \in \underline{p}$. Evenzo $a_2, \ldots, a_k \in \underline{p}$, dus $a \in \underline{p}$. Met andere woorden: $R_+ \subset \underline{p}$, tegenspraak.

Bewijs (ii) $\Longrightarrow$ (i): Uit c) volgt:

$$\exists n \geq n_0 \ \exists a \in R_n.\ a \notin \underline{p}_n \ .$$

Kies deze a (en n) vast. Definieer voor $m \in \mathbb{N}$:

$$\underline{p}'_m := \{x \in R_m \mid \text{Voor bijna alle } t \text{ geldt: } xa^t \in \underline{p}_{m+tn}\} \ .$$

Dan geldt:

$$m \geq n_0 \Longrightarrow \underline{p}'_m = \underline{p}_m \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

Ook geldt:

$$\forall m.\ \underline{p}'_m \text{ is een additieve groep.}$$

Definieer nu:

$$\underline{p} := \sum_{m \geq 0} \underline{p}'_m \ .$$

Dan is $\underline{p}$ een homogeen ideaal, en, omdat $a \notin \underline{p}$, is $R_+ \not\subset \underline{p}$. Voorts geldt:

$$\underline{p} \text{ is een priemideaal} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(**)$$

Want stel $s,t \in R$ met

$$s = s_0 + \ldots + s_k \quad ; \quad t = t_0 + \ldots + t_l \qquad (s_i, t_i \in R_i)$$

terwijl

$$s,t \notin \underline{p} \ .$$

Dan is

$$s_k t_l \in \underline{p}'_{k+l} \ .$$

Daaruit volgt:

$$\exists \tau \in \mathbb{N}.\ s_k t_l a^\tau \in \underline{p}_{n\tau+k+l} \ .$$

Kies τ voldoende groot en kies τ' en τ'' zo dat $\tau = \tau' + \tau''$ en

$$k + \tau' n \geq n_0 \quad ; \quad l + \tau'' n \geq n_0 \ .$$

Dan is

$$s_k a^{\tau'} \in \underline{p}'_{k+\tau' n} \quad \text{of} \quad t_l a^{\tau''} \in \underline{p}'_{l+\tau'' n}$$

(volgens b)), dus

$$s_k \in \underline{p}_k' \quad \text{of} \quad t_l \in \underline{p}_l'$$

zodat

$$s_k \in \underline{p} \quad \text{of} \quad t_l \in \underline{p} \ .$$

Zeg: $s_k \in \underline{p}$. Dan hebben we:

$$st = (s_0 + \ldots + s_{k-1})(t_0 + \ldots + t_l) + s_k(t_0 + \ldots + t_l) \in \underline{p} \ .$$

Dus:

$$(s_0 + \ldots + s_{k-1})(t_0 + \ldots + t_l) \in \underline{p} \ .$$

Hieruit volgt weer: $s_{k-1} \in \underline{p}$ of $t_l \in \underline{p}$, etc. We vinden zo dat òf $s \in \underline{p}$, òf $t \in \underline{p}$, waarmee (**) bewezen is. Tot slot geldt: $\underline{p}$ is éénduidig bepaald. Want stel dat $\underline{p}$ en $\underline{q}$ beide aan (i) voldoen. Neem aan dat $\underline{p} \neq \underline{q}$. Dan is er een homogeen element b van de graad d zodat bijvoorbeeld $b \in \underline{q}$ en $b \notin \underline{p}$. Als $d > 0$ dan geldt voor elke $m \geq n_0$:

$$b^m \in \underline{q} \cap R_{md} = \underline{p} \cap R_{md} \subset \underline{p}$$

zodat $b \in \underline{p}$, tegenspraak. Als $d = 0$, dan geldt

$$ab \in R_n \cap \underline{q} = R_n \cap \underline{p} \subset \underline{p}$$

en, omdat $a \notin \underline{p}$ moet $b \in \underline{p}$, eveneens tegenspraak. Dus moet $\underline{p} = \underline{q}$.

<u>Propositie 5.20</u>: <u>Als</u> $R = \sum R_q$ <u>een gegradeerde ring is, en als</u> r <u>een homogeen element van</u> R_+ <u>is, dan geldt</u>:

$$D_+(r) = \operatorname{Spec} R_{(r)}$$

<u>als topologische ruimte</u>.

<u>Bewijs</u>: Definieer:

$$\begin{cases} \psi_r : D_+(r) \longrightarrow \operatorname{Spec}(R_{(r)}) \\ \qquad x_{\underline{p}} \longmapsto \{\frac{y}{r^m} \mid y \in \underline{p} \ ; \ \frac{y}{r^m} \in R_{(r)}\} \end{cases}$$

(Ga na dat dit een goede definitie is).

(i) ψ_r is <u>surjectief</u>: Hiertoe construeren we met behulp van het voorgaande lemma bij een priemideaal $\underline{q}$ van $R_{(r)}$ een priemideaal $\underline{p} \subset R$, zodat $\underline{p} \in D_+(r)$ en $\psi_r(x_{\underline{p}}) = \underline{q}$. Stel $r \in R_{n_0}$ en definieer:

$$\begin{cases} \text{(a)} \quad \underline{p}'_{tn_0} := \{x \in R_{tn_0} \mid \frac{x}{r^t} \in \underline{q}\} \\ \text{(b)} \quad \text{Als } n \geq n_0 \text{ dan } \underline{p}_n := \{x \in R_n \mid \exists\, N,t \;.\; x^N \in \underline{p}'_{tn_0}\} \end{cases}$$

We gaan de voorwaarden na voor de groepen $\underline{p}_n$ $(n \geq n_0)$:

(1) $\underline{p}_n$ is een additieve subgroep van R_n: Kies $x,y \in R_n$ zodat

$$x^{N_1} \in \underline{p}'_{t_1 n_0} \quad ; \quad y^{N_2} \in \underline{p}'_{t_2 n_0}$$

Dan volgt:

$$\begin{cases} x^{N_1} \in R_{t_1 n_0} \quad ; \quad \dfrac{x^{N_1}}{r^{t_1}} \in \underline{q} \quad ; \quad N_1 n = t_1 n_0 \\ y^{N_2} \in R_{t_2 n_0} \quad ; \quad \dfrac{y^{N_2}}{r^{t_2}} \in \underline{q} \quad ; \quad N_2 n = t_2 n_0 \end{cases}$$

zodat

$$(x-y)^{N_1+N_2} \in R_{n_0(t_1+t_2)} \quad ; \quad \frac{(x-y)^{N_1+N_2}}{r^{t_1+t_2}} \in \underline{q}$$

wat zeggen wil: $x-y \in \underline{p}_n$

(2) $R_m \underline{p}_n \subset \underline{p}_{n+m}$. Want als $t \in R_m$, $x \in \underline{p}_n$, dan is

$$x^N \in \underline{p}'_{kn_0} \quad ; \quad Nn = kn_0$$

Zodat we vinden:

$$\frac{x^N}{r^k} \in \underline{q} \Longrightarrow \frac{x^{Nn_0}}{r^{kn_0}} \in \underline{q} \Longrightarrow \frac{t^{Nn_0}}{r^{mN}} \cdot \frac{x^{Nn_0}}{r^{kn_0}} = \frac{(xt)^{Nn_0}}{r^{mN+kn_0}} \in \underline{q}$$

Dus: $xt \in \underline{p}_{n+m}$, waarmee (2) bewezen is.

(3) Als $x \in R_m$, $y \in R_n$ en $xy \in \underline{p}_{n+m}$ dan is $x \in \underline{p}_m$ of $y \in \underline{p}_n$. (Triviaal).

(4) $r \in R_{n_0} \setminus \underline{p}_{n_0}$ (triviaal).

Volgens lemma (5.19) volgt uit (1) t/m (4) dat er een éénduidig bepaald homogeen priemideaal $\underline{p} \subset R$ bestaat zodat voor $n \geq n_0$ geldt:

$$\underline{p} \cap R_n = \underline{p}_n$$

terwijl $r \notin \underline{p}$ en $R_+ \not\subset \underline{p}$. Dus $\underline{p} \in D_+(r)$. Ga na dat geldt: $\psi_r(\underline{p}) = \underline{q}$.

(ii) ψ_r is <u>injectief</u>: Kies $\underline{p}_1$ en $\underline{p}_2$ in $D_+(r)$, zodat

$$\psi_r(\underline{p}_1) = \psi_r(\underline{p}_2) \ .$$

Kies $n \geq n_0$ en beschouw $y \in \underline{p}_1 \cap R_n$. Dan is

$$y^{n_0} \in \underline{p}_1 \cap R_{nn_0}$$

zodat

$$\frac{y^{n_0}}{r^n} \in \psi_r(\underline{p}_1) = \psi_r(\underline{p}_2)$$

Dat wil zeggen:

$$\exists z \in \underline{p}_2 \cap R_{n_0 t} \ . \ \frac{z}{r^t} = \frac{y^{n_0}}{r^n}$$

zodat er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zodat $r^{N+n} z = r^{N+t} y^{n_0}$.

Derhalve is dan $y \in \underline{p}_2 \cap R_n$. Volgens lemma (5.19) volgt uit

$$\underline{p}_1 \cap R_n = \underline{p}_2 \cap R_n \qquad \text{als } n \geq n_0$$

dat $\underline{p}_1 = \underline{p}_2$. We hebben bewezen dat $\underline{p}_1 \cap R_n \subset \underline{p}_2 \cap R_n$. Analoog volgt: $\underline{p}_1 \cap R_n \supset \underline{p}_2 \cap R_n$, zodat $\underline{p}_1 = \underline{p}_2$.

(iii) ψ_r is <u>topologisch</u>: Hiertoe construeren we twee bases voor de open topologie van $D_+(r)$ resp. $\mathrm{Spec}(R_{(r)})$, zodat ψ_r de basiselementen in elkaar overvoert.

Een basis voor de open topologie van $\mathrm{Spec}(R_{(r)})$ wordt gegeven door deelverzamelingen van het type

$$D\left(\frac{y}{r^m}\right) \qquad \left(\frac{y}{r^m} \in R_{(r)}\right) .$$

Beschouw nu de twee volgende families deelverzamelingen van $D_+(r)$:

$$\begin{cases} \mathcal{V} := \{D_+(rt) \mid t \text{ homogeen; } t \in R\} \\ \mathcal{W} := \{D(z) \cap D_+(r) \mid z \in R\} . \end{cases}$$

Allereerst is direkt duidelijk dat $\mathcal{V}$ een deelverzameling is van $\mathcal{W}$, want als t homogeen is, dan geldt

$$D(t) \cap D_+(r) = D_+(rt) .$$

Vervolgens: Beschouw

$$x_{\underline{p}} \in D(z) \cap D_+(r) .$$

Zij $z = z_0 + z_1 + \ldots + z_t \quad (z_i \in R_i)$. Dan is er een index i zodat

$$x_{\underline{p}} \in D(z_i) \cap D_+(r)$$

waaruit volgt:

$$D(z) \cap D_+(r) \subset \bigcup_{i=0}^{t} D(z_i) \cap D_+(r) = \bigcup_{i=0}^{t} D_+(z_i r) .$$

Omgekeerd, zij

$$x_{\underline{p}} \in \bigcup_{i=0}^{t} D_+(z_i r)$$

Zeg: $z_i r \notin \underline{p}$. $\underline{p}$ is een homogeen ideaal, dus

$$\underline{p} = \sum_i \underline{p} \cap R_i \ .$$

Met andere woorden: Uit $z = z_0 + \ldots + z_t \in \underline{p}$ zou volgen dat $z_i \in \underline{p}$, tegenspraak. Dus $z \notin \underline{p}$, zodat

$$D(z) \cap D_+(r) = \bigcup_{i=0}^{t} D_+(z_i r) \ .$$

We hebben gevonden:

$$\begin{cases} \text{(i)} \ \mathcal{V} \subset \mathcal{W} \\ \text{(ii)} \ \forall W \in \mathcal{W} \ \exists U_{i_1}, \ldots, U_{i_t} \in \mathcal{V} . \ W = \bigcup_{j=1}^{t} U_{i_j} \end{cases}$$

Hieruit volgt dat - omdat de elementen van $\mathcal{W}$ een basis vormen voor de open topologie van $D_+(r)$ (hebbende de door Spec(R) geïnduceerde topologie), ook $\mathcal{V}$ een basis is voor deze open topologie.
Dat ψ_r topologisch is, volgt nu uit:

$$\psi_r(D_+(rt)) = D\left(\frac{t^{n_0}}{r^n}\right) \qquad \text{als } t \in R_n$$

zoals gemakkelijk is na te gaan.

<u>Opmerking 5.21</u>: <u>Als</u> $R = \sum R_n$ <u>een gegradeerde ring is, en</u> $r \in R_+$ <u>is een homogeen element, dan geldt</u>:

$$D_+(r) = \emptyset \iff r \ \underline{\text{is nilpotent}}.$$

<u>Bewijs</u>: $D_+(r) = \emptyset \iff \mathrm{Spec}(R_{(r)}) = \emptyset \iff R_{(r)} = 0 \iff r$ is nilpotent.

<u>Opmerking 5.22</u>: <u>Zij</u> $R = \sum R_n$ <u>een gegradeerde ring en zij</u>

$$s \in R_{s_0} \quad ; \quad t \in R_{t_0} \ .$$

Noteer:

$$s' := \frac{s^{t_0}}{t^{s_0}} \in R_{(t)} \quad ; \quad t' := \frac{t^{s_0}}{s^{t_0}} \in R_{(s)}$$

Dan geldt:

$$(R_{(s)})_{t'} \simeq R_{(st)} \simeq (R_{(t)})_{s'}$$

Bew: Het isomorphisme $(R_{(s)})_{t'} \simeq R_{(st)}$ wordt gegeven door:

$$\left\{\begin{array}{ccc}
(R_{(s)})_{t'} & \rightleftarrows & R_{(st)} \\[2ex]
\dfrac{\left(\frac{x}{s^m}\right)}{(t')^N} & \longmapsto & \dfrac{xs^{(t_0+s_0)N}t^m}{(st)^{s_0N+m}} \\[4ex]
\dfrac{\left(\frac{yt^{M(s_0-1)}}{s^{M(t_0+1)}}\right)}{(t')^M} & \longleftarrow\!\shortmid & \dfrac{y}{(st)^M}
\end{array}\right.$$

Propositie 5.23: *Als $R = \sum R_n$ een gegradeerde ring is, en als $X = \mathrm{Proj}(R)$, dan bestaat er bij X op kanonieke manier een schoof van ringen $\mathcal{O}_X$, zodat $(X, \mathcal{O}_X)$ een preschema is.*

Bewijs: Allereerst merken we op dat we een open overdekking

$$X = \bigcup_{\substack{s \in R_n \\ n>0}} D_+(s)$$

van X hebben. (Want, als $x_{\mathfrak{p}} \in X$, dan $R_+ \not\subset \mathfrak{p}$ zodat er een homogeen element s met graad ongelijk 0 is, zodat $s \notin \mathfrak{p}$.) Op elke $D_+(s)$ hebben we wegens

$$D_+(s) = \mathrm{Spec}(R_{(s)})$$

de struktuurschoof bij de ring $R_{(s)}$, zeg $\mathcal{O}_{(s)}$. We plakken deze schoven

$\mathcal{O}_{(s)}$ tot de schoof $\mathcal{O}_X$ op X. De isomorphismen

$$\mathcal{O}_{(s)}|D_+(st) \longrightarrow \mathcal{O}_{(t)}|D_+(st)$$

worden gegeven door:

$$(D_+(st), \mathcal{O}_{(s)}|D_+(st)) = \mathrm{Spec}((R_{(s)})_{t'}) \simeq \mathrm{Spec}((R_{(t)})_{s'}) =$$

$$= (D_+(st), \mathcal{O}_{(t)}|D_+(st))$$

(Ga dit na, en ook dat aan de tweede plakvoorwaarde is voldaan). (We noteren vaak Proj(R) i.p.v. $(X,\mathcal{O}_X)$, ook als we het preschema bedoelen.)

Propositie 5.24: Proj(R) is een schema.

Bew: In §3 is bewezen dat een preschema $(X,\mathcal{O}_X)$ een schema is als er een open affiene overdekking $(X_i)_i$ van X bestaat, zodat voor elke (i,j) $X_i \cap X_j$ affien is, en zodat bovendien de beelden van $\mathcal{O}_X(X_i)$ en $\mathcal{O}_X(X_j)$ onder de restricties tot $\mathcal{O}_X(X_i \cap X_j)$ samen de ring $\mathcal{O}_X(X_i \cap X_j)$ voortbrengen.

Welnu, kies als open affiene overdekking

$$\mathrm{Proj}(R) = \bigcup_{\substack{s \in R_n \\ n>0}} D_+(s)$$

Dan is zeker $D_+(s) \cap D_+(t) = D_+(st) = \mathrm{Spec}\, R_{(st)}$ affien. De restricties

$$\mathcal{O}_X(D_+(s)) \longrightarrow \mathcal{O}_X(D_+(st))$$

worden verkregen als volgt: ($t' := \dfrac{t^{s_0}}{s^{t_0}}$ als $s \in R_{s_0}$, $t \in R_{t_0}$)

$$\begin{cases} \mathcal{O}_X(D_+(s)) = R_{(s)} \xrightarrow{\text{kan.}} (R_{(s)})_{t'} \xrightarrow{\sim} R_{(st)} = \mathcal{O}_X(D_+(st)) \\[2ex] \qquad\qquad \dfrac{x}{s^m} \longmapsto \dfrac{xt^m}{(st)^m} \end{cases}$$

(Cf. opm. (5.22)). Evenzo hebben we de restrictie:

$$\begin{cases} \mathcal{O}_X(D_+(t)) = R_{(t)} \xrightarrow{\text{kan.}} (R_{(t)})_{s'} \longrightarrow R_{(st)} = \mathcal{O}_X(D_+(st)) \\ \qquad\qquad \dfrac{y}{s^n} \longmapsto \dfrac{ys^n}{(st)^n} \end{cases}$$

(als $s' := \dfrac{s^{t_0}}{t^{s_0}}$). We moeten laten zien dat $R_{(st)}$ door de beelden van $R_{(s)}$ en $R_{(t)}$ wordt voortgebracht. Kies hiertoe een willekeurig element

$$\frac{z}{(st)^M} \in R_{(st)}$$

We kunnen dan schrijven:

$$\frac{z}{(st)^M} = \frac{zt^{M(s_0+t_0)}}{(st)^{M(t_0+1)}} \cdot \frac{s^{M(t_0+s_0)}}{(st)^{Ms_0}}$$

en beide factoren zijn de beelden van resp.

$$\frac{zt^{M(s_0-1)}}{s^{M(t_0+1)}} \in R_{(s)} \quad \text{en} \quad \frac{s^{Mt_0}}{t^{Ms_0}} \in R_{(t)}$$

waarmee de propositie bewezen is.

<u>Propositie 5.25</u> <u>Als</u> S <u>een gegradeerde A-algebra is, dan is</u> Proj(S) <u>een schema over</u> Spec(A).

<u>Bewijs</u>: Allereerst construeren we een kanoniek morphisme van preschema's

$$(f,F)\colon \mathrm{Proj}(S) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A) \ .$$

Laat de A-algebra S gegeven zijn door het ring-morphisme

$$\eta\colon A \longrightarrow S \ .$$

Kies een homogeen element $s \in S_+$. Dan induceert η een ring-morphisme

$$\begin{cases} \eta_s : A \longrightarrow S_{(s)} \\ \quad a \longmapsto \dfrac{\eta(a)}{1} \end{cases}$$

zodat we een morphisme van affiene schema's

$$(f_s, F_s) := \left[D_+(s) = \mathrm{Spec}(S_{(s)}) \xrightarrow[\mathrm{Spec}(\eta_s)]{} \mathrm{Spec}\ (A)\right]$$

hebben verkregen. Omdat voor elk tweetal homogene elementen $s, t \in S_+$ het diagram

$$\begin{tikzcd} S_{(s)} \arrow[d, "\text{kan.}"'] & \\ & A \arrow[ul, "\eta_s"'] \arrow[dl, "\eta_{st}"] \\ S_{(st)} & \end{tikzcd}$$

commuteert, komen (f_s, F_s) en (f_t, F_t) overéén op de doorsnede $D_+(st)$, zodat de familie

$$\{(f_s, F_s) \mid s \text{ homogeen, } s \in S_+\}$$

ons het gevraagde kanonieke morphisme van preschema's (f, F) oplevert. Hiermee is $\mathrm{Proj}(S)$ een preschema over $\mathrm{Spec}(A)$. Dat $\mathrm{Proj}(S)$ een $\mathrm{Proj}(A)$-schema is volgt direkt uit prop. (3.47), analoog als in het bewijs van prop. (5.24).

Propositie 5.26: Zij R een gegradeerde ring en zij M een gegradeerd R-moduul. Noteer: $(X, \mathcal{O}_X) = \mathrm{Proj}(R)$. Dan bestaat er een quasi-coherent $\mathcal{O}_X$-moduul $\tilde{M}$ zodat voor elk homogeen element $s \in R_+$ geldt:

$$\tilde{M}(D_+(s)) = M_{(s)}$$

terwijl de restrictie-morphismen

$$\tilde{M}(D_+(s)) \longrightarrow \tilde{M}(D_+(st))$$

<u>de kanonieke morphismen</u>

$$M_{(s)} \longrightarrow M_{(st)}$$

<u>zijn</u>.

<u>Bewijs</u>: Deze constructie verloopt geheel analoog aan die van de struktuur-schoof $\mathcal{O}_X$ op X. (Cf. prop. 5.23). Als s een homogeen element is uit R_+, dan is $M_{(s)}$ een $R_{(s)}$-moduul. (Ga na). Volgens opm. (4.2) is er dus een schoof

$$\widetilde{M_{(s)}}$$

op $D_+(s) = \mathrm{Spec}(R_{(s)})$ gedefinieerd. Omdat we - analoog aan opm. (5.22) - weer isomorphismen

$$(M_{(s)})_{t'} \simeq M_{(st)} \simeq (M_{(t)})_{s'}$$

hebben, (Hierbij is $s \in R_{s_0}$, $t \in R_{t_0}$, terwijl

$$s' := \frac{s^{t_0}}{t^{s_0}} \quad ; \quad t' := \frac{t^{s_0}}{s^{t_0}} \quad),$$

kunnen we deze schoven $\widetilde{M_{(s)}}$ plakken (ga na) tot een schoof $\tilde{M}$, gedefinieerd op X. Ga na dat $\tilde{M}$ een $\mathcal{O}_X$-moduul is.

<u>Opmerking 5.27</u>: Als R een gegradeerde ring is, en $(X,\mathcal{O}_X) = \mathrm{Proj}(R)$, dan kunnen we R als R-moduul (gegradeerd) opvatten en er geldt:

$$\mathcal{O}_X = \tilde{R} .$$

<u>Propositie 5.28</u>: <u>Als</u> R <u>een gegradeerde ring is</u>, <u>en</u> $(X,\mathcal{O}_X) = \mathrm{Proj}(R)$, <u>dan is de toevoeging</u>

$$M \longrightarrow \tilde{M}$$

<u>een covariante exakte functor, compatibel met het nemen van inductieve limieten, die aan elk gegradeerd R-moduul een quasi-coherent $\mathcal{O}_X$-moduul toevoegt.</u>

<u>Bewijs</u>: Laten M en N twee gegradeerde R-modulen zijn, en zij

$$\phi \in \mathrm{Hom}_R(M,N)_0 \ .$$

Dan induceert ϕ voor elke homogene s met positieve graad een $R_{(s)}$-moduul-morphisme

$$\phi_{(s)}: M_{(s)} \longrightarrow N_{(s)} \ .$$

Bovendien, als t nog een homogeen element uit R_+ is, commuteert het diagram

$$\begin{array}{ccc} M_{(s)} & \xrightarrow{\phi_{(s)}} & N_{(s)} \\ \text{kan.}\downarrow & & \downarrow\text{kan.} \\ M_{(st)} & \xrightarrow{\phi_{(st)}} & N_{(st)} \end{array}$$

zodat de familie morphismen

$$\tilde{M}|D_+(s) = \widetilde{M_{(s)}} \xrightarrow{\widetilde{\phi_{(s)}}} \widetilde{N_{(s)}} = \tilde{N}|D_+(s)$$

een morphisme

$$\tilde{\phi}: \tilde{M} \longrightarrow \tilde{N}$$

van $\mathcal{O}_X$-modulen induceert. Hiermee is $M \longrightarrow \tilde{M}$ een covariante functor. Dat deze functor exakt is, kunnen we lokaal controleren. We zijn dus klaar als we bewijzen dat, als

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

een exakte rij van gegradeerde R-modulen is, ook de geïnduceerde rij van $R_{(s)}$-modulen

$$0 \longrightarrow M'_{(s)} \longrightarrow M_{(s)} \longrightarrow M''_{(s)} \longrightarrow 0$$

exakt is. Dit is direkt te verifiëren. Nu moet nog ingezien worden dat $M \longrightarrow \tilde{M}$ compatibel is met het nemen van inductieve limieten.
Zij

$$\{M_\alpha ; \phi^\alpha_\beta : M_\alpha \longrightarrow M_\beta ; \alpha \prec \beta\}_{\alpha,\beta \in I}$$

een inductief systeem van gegradeerde R-modulen. Dan is ook

$$\{(M_\alpha)_{(s)} ; (\phi^\alpha_\beta)_{(s)} : (M_\alpha)_{(s)} \longrightarrow (M_\beta)_{(s)}\}$$

een inductief systeem, dit maal van $R_{(s)}$-modulen.
Noteer nu:

$$M := \varinjlim M_\alpha \quad ; \quad \mathcal{M} := \varinjlim \tilde{M}_\alpha$$

(Merk op dat $\{\tilde{M}_\alpha, \widetilde{\phi^\alpha_\beta}\}$ ook een injectief systeem van $\mathcal{O}_X$-modulen is). Voor elke $\alpha \in I$ induceert het kanonieke morphisme

$$\theta_\alpha : M_\alpha \longrightarrow M$$

een $\mathcal{O}_X$-moduul-morphisme

$$\tilde{\theta}_\alpha := \tilde{M}_\alpha \longrightarrow \tilde{M} = \widetilde{\varinjlim M_\alpha} \ .$$

Ga na dat deze morphismen een uniek bepaald morphisme

$$\theta : \mathcal{M} = \varinjlim \tilde{M}_\alpha \longrightarrow \tilde{M}$$

van $\mathcal{O}_X$-modulen bepalen. Om te controleren dat $\tilde{\theta}$ een isomorphisme is, is het voldoende dit lokaal te verifiëren, dus moet voor elk homogeen element $s \in R_+$ worden gecontroleerd dat

$$\varinjlim (M_\alpha)_{(s)} = (\varinjlim M_\alpha)_{(s)} \ .$$

Ga dit na.

Definitie 5.29: Zijn R en S twee gegradeerde ringen, en is

$$\phi : R \longrightarrow S$$

een morphisme van gegradeerde ringen (D.w.z.: $\phi(R_n) \subset S_n$), dan noteren we:

$$G(\phi) := \bigcup_{\substack{r \in R_+ \\ r \text{ homogeen}}} D_+(\phi r) \ .$$

Opmerking 5.30: $G(\phi)$ is een open deelverzameling van Proj(S), en dus kunnen we de struktuur-schoof van Proj(S) beperken tot $G(\phi)$, zodat $G(\phi)$ een schema is.
Bovendien geldt, als S_+ als ring *) wordt voortgebracht door $\phi(R_+)$, dat $G(\phi) = \mathrm{Proj}(S)$, want stel

$$x_{\underline{p}} \in \mathrm{Proj}(S)$$

($\underline{p}$ een priemideaal van S). Zeg: $x_{\underline{p}} \in D_+(s)$, waarbij s een homogeen element is uit S_+. Volgens het gegeven kunnen we s dan schrijven als eindige som van termen van de vorm

$$\phi(r_1).\phi(r_2). \ \ldots \ . \phi(r_t) \qquad (r_i \in R_+, \ r_i \text{ homogeen})$$

zodat er, omdat $s \notin \underline{p}$, een homogeen element $r \in R_+$ te vinden is, zodat $\phi r \notin \underline{p}$. Dat wil zeggen:

$$x_{\underline{p}} \in D_+(\phi r) \subset G(\phi)$$

zodat $G(\phi) = \mathrm{Proj}(S)$.

---

*) Hier is S_+ een ring zonder eenheidselement!

Propositie 5.31: <u>Zij ϕ: R $\longrightarrow$ S een morphisme van gegradeerde ringen. Dan induceert ψ voor elk homogeen element $r \in R_+$ een ring-morphisme</u>

$$\begin{cases} \phi_{(r)}: R_{(r)} \longrightarrow S_{(\phi r)} \\ \qquad \dfrac{a}{r^n} \longmapsto \dfrac{\phi a}{\phi r^n} \end{cases}$$

Er bestaat precies één morphisme van schema's

$$\mathrm{Proj}(\phi): G(\phi) \longrightarrow \mathrm{Proj}(R)$$

zodat voor elk homogeen element $r \in R_+$ de "beperking" van $\mathrm{Proj}(\phi)$ tot $D_+(\phi r)$ samenvalt met het morphisme van affiene schema's

$$\mathrm{Spec}(S_{(\phi r)}) = D_+(\phi r) \xrightarrow[\mathrm{Spec}(\phi_{(r)})]{} D_+(r) = \mathrm{Spec}(R_{(r)})$$

Bewijs: Dat de morphismen van affiene schema's $\mathrm{Spec}(\phi_{(r)})$ een morphisme van schema's

$$\mathrm{Proj}(\phi): G(\phi) \longrightarrow \mathrm{Proj}(R)$$

bepalen volgt direkt uit de commutativiteit van de diagrammen

$$\begin{tikzcd} S_{(\phi r)} \arrow[d, "\text{kan.}"] & R_{(r)} \arrow[l, "\phi_{(r)}"'] \arrow[d, "\text{kan.}"] \\ S_{(\phi rt)} & R_{(rt)} \arrow[l, "\phi_{(rt)}"'] \end{tikzcd}$$

(Merk op dat we hier een morphisme van schema's aangeven met $\mathrm{Proj}(\phi)$ en niet met een paar (f,F). Zolang er geen verwarring ontstaat zullen we dit ook in het vervolg wel doen).

Propositie 5.32: Als A en B twee ringen zijn met een ring-morphisme $\psi: B \longrightarrow A$, en als R een gegradeerde B-algebra is, gegeven door

$$\begin{cases} R = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} R_n \\ \xi: B \longrightarrow R \end{cases}$$

en als $S := R\otimes_B A$, dan is S op natuurlijke manier een gegradeerde A-algebra en er geldt:

$$\mathrm{Proj}(S) = \mathrm{Proj}(R)\ \Pi_{\mathrm{Spec}(B)}\ \mathrm{Spec}(A)$$

Bewijs: ψ induceert een morphisme van affiene schema's

$$(g,G)\colon \mathrm{Spec}\ A \longrightarrow \mathrm{Spec}\ B.$$

S is een gegradeerde A-algebra met gradering, resp. algebra-struktuur

$$S = \sum_{n\in\mathbb{N}} R_n \otimes_B A\ ;\quad \begin{cases} A \xrightarrow{\eta} S \\ a \longmapsto 1\otimes a \end{cases}$$

Voorts hebben we het kanonieke morphisme van gegradeerde ringen

$$\begin{cases} \phi\colon R \longrightarrow S = R\otimes A \\ \qquad r \longmapsto r\otimes 1 \end{cases}$$

Beschouw het diagram

$$\begin{tikzcd} G(\phi) \arrow[r, "\mathrm{Proj}(\phi)"'] \arrow[d, "{(\tau,T)}"'] & \mathrm{Proj}(R) \arrow[d, "{(\pi,\Pi)}"] \\ \mathrm{Spec}(A) \arrow[r, "\mathrm{Spec}(\psi)"'] & \mathrm{Spec}(B) \end{tikzcd} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

(Hierbij is (π,Π) het struktuur-morphisme van $\mathrm{Proj}(R)$ over $\mathrm{Spec}(B)$ (Cf. prop. 5.25) en ontstaat (τ,T) door het struktuur-morphisme van $\mathrm{Proj}(S)$ over $\mathrm{Spec}(A)$ te "beperken" tot $G(\phi)$. (Cf. Opm. (5.30)).
Om te laten zien dat het diagram (i) commuteert is het voldoende om voor elk homogeen element $r\in R_+$ de commutativiteit aan te tonen van de door (i) geïnduceerde diagrammen

$$\begin{tikzcd} D_+(\phi r) \arrow[r] \arrow[d] & D_+(r) \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(A) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(B) \end{tikzcd}$$

en, omdat dit diagrammen zijn van affiene schema's, kunnen wij volstaan met de commutativiteit van de diagrammen

$$\begin{tikzcd} S_{(\phi r)} \arrow[d, "\eta_{(\phi r)}"'] & R_{(r)} \arrow[l, "\phi_{(r)}"'] \arrow[d, "\xi_{(r)}"] \\ A & B \arrow[l, "\psi"] \end{tikzcd}$$

(waarbij

$$\eta_{(\phi r)}(a) := \frac{\eta(a)}{1} \;;\; \xi_{(r)}(b) := \frac{\xi(b)}{1} \;;\; \phi_{(r)}\left(\frac{x}{r^n}\right) := \frac{\phi x}{\phi r^n} \quad)$$

te controleren, en dat is gemakkelijk.

Nu wordt S_+ voortgebracht als A-moduul door R_+. Hieruit kan men op analoge manier als in het bewijs van opm. (5.30) afleiden dat

$$G(\phi) = \mathrm{Proj}(S)$$

zodat diagram (i) wordt:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Proj}(S) \arrow[r, "\mathrm{Proj}(\phi)"] \arrow[d, "{(\tau,T)}"'] & \mathrm{Proj}(R) \arrow[d, "{(\pi,\Pi)}"] \\ \mathrm{Spec}(A) \arrow[r, "\mathrm{Spec}(\psi)"'] & \mathrm{Spec}(B) \end{tikzcd} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$$

Overdek Proj(R) met $(D_+(r))_{\substack{r \text{ homogeen} \\ r \in R_+}}$.

Dan is (ii) een gevezeld produkt als elk der diagrammen

$$\begin{tikzcd} D_+(\phi r) \arrow[r] \arrow[d] & D_+(r) \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(A) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(B) \end{tikzcd}$$

een gevezeld produkt is. Dit is het geval als

$$S_{(\phi r)} = R_{(r)} \otimes_B A$$

en dit volgt gemakkelijk uit $S = R\otimes_B A$.

Opmerking 5.33: Zij S een gegradeerde ring. We zeggen dat S_+ wordt voortgebracht door S_1 als elk element $s \in S_+$ te schrijven is als eindige som van termen van de vorm

$$s_0 t_1 \cdots t_n$$

met $s_0 \in S_0$ en $t_1,\ldots,t_n \in S_1$ (n mag per term verschillen). Uiteraard is S_+ voortgebracht door S_1 dan en slechts dan, als S als S_0-algebra wordt voortgebracht door

$$S_0 \sum S_1 \ .$$

We zeggen dat S_+ wordt voortgebracht door eindig veel elementen van S_1 als S_+ wordt voortgebracht door S_1, terwijl bovendien S_1 een eindig voortgebracht S_0-moduul is.

Opmerking 5.34: Als S een gegradeerde A-algebra is, zodat S_+ wordt voortgebracht door S_1, dan is

$$\mathrm{Proj}(S) = \bigcup_{s\in S_1} D_+(s) \ .$$

Is bovendien $S_1 = S_0 t_1 + \ldots + S_0 t_n$ met $t_1,\ldots,t_n \in S_1$, dan is

$$\mathrm{Proj}(S) = \bigcup_{i=1}^{n} D_+(t_i) \ .$$

Bewijs: Ga na.

Opmerking 5.35: Als S een gegradeerde A-algebra is, en $d\in\mathbb{N}$, dan is er een isomorphisme van Spec(A)-schema's

$$\mathrm{Proj}(S) \simeq \mathrm{Proj}(S^{(d)}) \ .$$

Bewijs: Allereerst bewijzen we dat geldt:

$$\mathrm{Proj}(S^{(d)}) = \bigcup_{\substack{s\in S_+ \\ s \text{ homogeen}}} D_+(s^d) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

(Merk op dat als $s\in S_k$, $s^d\in(S^{(d)})_k$). Kies $x_{\underline{p}}\in\mathrm{Proj}(S^{(d)})$ en definieer:

$$\underline{p}_m := \{x\in S_m \mid x^d\in \underline{p}\cap(S^{(d)})_m\} \qquad (m \geq 1).$$

Voor elke $m \geq 1$ hebben we dan een additieve groep $\underline{p}_m$ gevonden. Ga na dat deze groepen voldoen aan de voorwaarden (ii) van lemma (5.19), zodat zij op éénduidige wijze een priemideaal $\underline{q}$ van S bepalen, homogeen en zo dat $S_+\not\subset\underline{q}$, met de eigenschap

$$m \geq 1 \Longrightarrow \underline{q}\cap S_m = \underline{p}_m \;.$$

In het bijzonder geldt:

$$m \geq 1 \Longrightarrow \underline{q}\cap S_{md} = \underline{q}\cap(S^{(d)})_m = \underline{p}\cap(S^{(d)})_m \;.$$

Stel nu $\underline{q}\in D_+(s)$ voor een of ander homogeen element $s\in S_+$. Dan volgt dat $s\notin\underline{q}$, dus, als $s\in S_k$,

$$s^d\notin\underline{q}\cap S_{dk} = \underline{p}\cap(S^{(d)})_k \qquad (k \geq 1)$$

Met andere woorden:

$$\underline{p}\in D_+(s^d)$$

waarmee (i) geverifieerd is.

Merk vervolgens op dat we voor elk homogeen element van S_+ een ring-morphisme

$$\left\{\begin{array}{l} \theta_{(s)}: S_{(s)} \longrightarrow (S^{(d)})_{(s^d)} \\[1ex] \qquad \dfrac{x}{s^t} \longmapsto \dfrac{xs^{t(d-1)}}{(s^d)^t} \end{array}\right. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$$

hebben, en dat, als ook r een homogeen element uit S_+ is, het diagram

$$\begin{tikzcd} S_{(s)} \arrow[r, "\theta_{(s)}"] \arrow[d, "\text{kan.}"'] & (S^{(d)})_{(s^d)} \arrow[d, "\text{kan.}"] \\ S_{(rs)} \arrow[r, "\theta_{(rs)}"'] & (S^{(d)})_{(r^d s^d)} \end{tikzcd}$$

commuteert. Derhalve bepalen de door (ii) geïnduceerde isomorphismen van affiene schema's

$$D_+(s^d) = \mathrm{Spec}(S^{(d)})_{(s^d)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}\, S_{(s)} = D_+(s)$$

een kanoniek isomorphisme van schema's

$$\mathrm{Proj}(S^{(d)}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Proj}(S) \ .$$

Ga zelf na dat dit een isomorphisme van Spec(A)-schema's is.

<u>Opmerking 5.36</u>: <u>Zij S een gegradeerde ring. Definieer als volgt een nieuwe gegradeerde ring:</u>

$$\begin{cases} S'_0 := \mathbb{Z} \text{ "slordige notatie" } ; \ S'_n := S_n \quad \text{als } n > 0 \ ; \\ S' := \sum S'_n \end{cases}$$

<u>dan is er een kanoniek isomorphisme</u>

$$\mathrm{Proj}(S) \simeq \mathrm{Proj}(S') \qquad ^{*)}$$

Bewijs: Beschouw $x_{\underline{p}} \in \mathrm{Proj}(S')$. Definieer voor elke $m > 0$

$$\underline{p}_m := \underline{p} \cap S'_m = \underline{p} \cap S_m$$

---

*) met $S'_0 := \mathbb{Z}$ bedoelen we het kanonieke beeld van $\mathbb{Z}$ in S_0.

Dan is $\{\underline{p}_m \mid m > 0\}$ een familie additieve groepen die voldoet aan de voorwaarden (ii) van lemma (5.19), zodat bij $\underline{p}$ een éénduidig bepaald priemideaal $\underline{q} \subset S$ bestaat met

$$m > 0 \Longrightarrow \underline{q} \cap S_m = \underline{q} \cap S'_m = \underline{p} \cap S'_m$$

zodat geldt:

$$\mathrm{Proj}(S') = \bigcup_{\substack{s \in S_+ \\ s \text{ homogeen}}} D_+(s)$$

en omdat voor elk homogeen element $s \in S_+$ geldt:

$$S_{(s)} \simeq S'_{(s)}$$

is $\mathrm{Proj}(S') \simeq \mathrm{Proj}(S)$.

<u>Gevolg 5.37</u>: <u>Zij S een gegradeerde A-algebra. Definieer als volgt een nieuwe gegradeerde A-algebra</u> S'_A :

$$\begin{cases} (S'_A)_0 := A \text{ "slordige notatie"}; \ (S'_A)_n := S_n \text{ als } n > 0; \\ S'_A := \sum (S'_A)_n \qquad \text{als A-moduul.} \end{cases}$$

<u>Dan is er een kanoniek morphisme van Spec(A)-schema's</u>

$$\mathrm{Proj}(S) \simeq \mathrm{Proj}(S'_A) \qquad {}^{*)}$$

<u>Bewijs</u>: Dat er een kanoniek isomorphisme van schema's bestaat is triviaal. Het enige dat nog moet worden gecontroleerd is dat dit isomorphisme compatibel is met de Spec(A)-struktuur. Dit volgt echter onmiddellijk uit de commutativiteit der diagrammen

$$\begin{tikzcd} S_{(s)} \arrow[rr, "\sim"] & & (S'_A)_{(s)} \\ & A \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

---

*) Cf. Opm. bij (5.36)

<u>Definitie 5.38</u>: Een morphisme van gegradeerde ringen

$$\phi: R \longrightarrow S$$

heet <u>TN-surjectief</u> als er een $n_0 \in \mathbb{N}$ bestaat zodat voor elke $n \geq n_0$ geldt:

$$\phi_n := [\phi | R_n : R_n \longrightarrow S_n]$$

is surjectief.

<u>Propositie 5.39</u>: <u>Als $\phi: R \longrightarrow S$ een TN-surjectief morphisme van gegradeerde ringen is, dan geldt</u>:

(i) $G(\phi) = \mathrm{Proj}(S)$

(ii) $\mathrm{Proj}(\phi)$ <u>is een gesloten immersie</u>.

<u>Bewijs</u>: Kies $d \in \mathbb{N}$ zodat ϕ_n surjectief is voor $n \geq d$. Definieer:

$$\begin{cases} (R')_0 := \mathbb{Z} \quad ; \quad (R')_n := (R^{(d)})_n & \text{als } n > 0 \\ (S')_0 := \mathbb{Z} \quad ; \quad (S')_n := (S^{(d)})_n & \text{als } n > 0 \end{cases}$$

Dan zijn

$$R' := \sum (R')_n \quad \text{en} \quad S' := \sum (S')_n$$

op natuurlijke wijze weer twee gegradeerde ringen, terwijl volgens opm. (5.36) en opm. (5.35) er kanonieke morphismen

$$\mathrm{Proj}(R') \simeq \mathrm{Proj}(R) \quad ; \mathrm{Proj}(S') \simeq \mathrm{Proj}(S)$$

bestaan. Bovendien induceert $\phi: R \longrightarrow S$ op kanonieke manier een morphisme $\phi': R' \longrightarrow S'$ van gegradeerde ringen, gegeven door:

$$\begin{cases} \phi'_0 : (R')_0 = \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z} = (S')_0 \\ \phi'_n : (R')_n = R_{nd} \xrightarrow{\phi_{nd}} S_{nd} = (S')_n & (n > 0) \end{cases}$$

Het is duidelijk dat ϕ' surjectief is. Dus brengt $\phi'(R'_+)$ S'_+ voort, zodat $G(\phi') = \mathrm{Proj}(S')$ (Cf. (5.30)).

Kies nu een homogeen element $r \in R_n$ $(n > 0)$. Dan commuteert het diagram

$$\begin{tikzcd}
(R^{(d)})_{(r^d)} \arrow[r, "\alpha"] & (S^{(d)})_{(\phi r^d)} \\
R_{(r)} \arrow[u, "\delta", "\wr"'] \arrow[r, "\beta"] & S_{(\phi r)} \arrow[u, "\gamma"', "\wr"]
\end{tikzcd} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

als we definiëren:

$$\begin{cases} \beta: \dfrac{x}{r^t} \longmapsto \dfrac{\phi x}{(\phi r)^t} \\[2ex] \delta: \dfrac{x}{r^t} \longmapsto \dfrac{x r^{t(d-1)}}{(r^d)^t} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \alpha: \dfrac{y}{(r^d)^t} \longmapsto \dfrac{\phi y}{(\phi r)^{dt}} \\[2ex] \gamma: \dfrac{z}{(\phi r)^t} \longmapsto \dfrac{z(\phi r)^{t(d-1)}}{(\phi r)^{dt}} \end{cases}$$

Uit de commutativiteit van (i) volgt dat voor elke homogene $r \in R_+$ de door het diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Proj}(S') = G(\phi') \arrow[r, "\mathrm{Proj}(\phi')"'] \arrow[d, "\wr"'] & \mathrm{Proj}(R') \arrow[d, "\wr"'] \\
\mathrm{Proj}(S) \supset G(\phi) \arrow[r, "\mathrm{Proj}(\phi)"'] & \mathrm{Proj}(R)
\end{tikzcd} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$$

geïnduceerde diagrammen

$$\begin{tikzcd}
D_+(\phi' r') \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & D_+(r') \arrow[d, "\wr"] \\
D_+(\phi r) \arrow[r] & D_+(r)
\end{tikzcd}$$

(waarbij $r' = r^d$) commuteren, zodat (ii) zelf een commutatief diagram is. Omdat in dit diagram het isomorphisme

$$\mathrm{Proj}(S') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Proj}(S)$$

$G(\phi')$ op $G(\phi)$ afbeeldt, volgt dat $G(\phi) = \mathrm{Proj}(S)$. Diagram (ii) laat zich dan schrijven als

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Proj}(S') & \xrightarrow[\mathrm{Proj}(\phi')]{} & \mathrm{Proj}(R') \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \mathrm{Proj}(S) & \xrightarrow[\mathrm{Proj}(\phi)]{} & \mathrm{Proj}(R) \end{array}$$

zodat $\mathrm{Proj}(\phi)$ een gesloten immersie is, dan en slechts dan als $\mathrm{Proj}(\phi')$ een gesloten immersie is. Met andere woorden: Om te bewijzen dat $\mathrm{Proj}(\phi)$ een gesloten immersie is, mogen we aannemen dat ϕ surjectief is.

We hebben commutatieve diagrammen

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Proj}(S) & \xrightarrow[\mathrm{Proj}(\phi)]{} & \mathrm{Proj}(R) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{Spec}(S_{(\phi r)}) = D_+(\phi r) & \xrightarrow[\mathrm{Spec}(\phi_{(r)})]{} & D_+(r) = \mathrm{Spec}(R_{(r)}) \end{array}$$

als r een homogeen element is van R_+, en:

$$\begin{cases} \phi_{(r)}: R_{(r)} \longrightarrow S_{(\phi r)} \\ \qquad \dfrac{x}{r^t} \longmapsto \dfrac{\phi x}{(\phi x)^t} \end{cases}$$

Als we dus kunnen bewijzen dat $\mathrm{Spec}(\phi_{(r)})$ een gesloten immersie is voor elke homogene $r \in R_+$ zijn we klaar. Dus is het voldoende om te bewijzen dat $\phi_{(r)}$ surjectief is, maar dit volgt uit de veronderstelde surjectiviteit van ϕ.

Afspraak 5.40: Als we spreken over een diagram (bijv. een exakte rij) van gegradeerde S-modulen, dan is altijd vóóronderstelD dat de optredende morphismen morphismen van gegradeerde S-modulen zijn, tenzij ter plaatse anders is vermeld.

Zij nu S een gegradeerde ring, en zij M een gegradeerd S-moduul. We hebben gedefinieerd voor elke $n \in \mathbb{Z}$ een gegradeerd S-moduul M(n). In het bijzonder hebben we gegradeerde S-modulen S(n).

Definitie 5.41: Een gegradeerd S-moduul M heet vrij als gegradeerd S-moduul als er een verzameling

$$\{n_i \mid n_i \in \mathbb{Z},\ i \in I\}$$

bestaat en een isomorphisme van gegradeerde S-modulen

$$M \simeq \sum_{i \in I} S(n_i) .$$

Definitie 5.42: M heet een gegradeerd S-moduul van eindig type als er een exakt rijtje van gegradeerde S-modulen

$$\sum_{i=1}^{k} S(n_i) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

bestaat. $(n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z})$.

Definitie 5.43: M heet een gegradeerd S-moduul met eindige presentatie als er een exakt rijtje van gegradeerde S-modulen

$$\sum_{i=1}^{k} S(n_i) \longrightarrow \sum_{j=1}^{l} S(m_j) \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

bestaat $(n_1, \ldots, n_k, m_1, \ldots, m_l \in \mathbb{Z})$.

Opmerking 5.44: Als S een gegradeerde ring is, en $n, m \in \mathbb{Z}$ dan bestaat er een kanoniek isomorphisme van gegradeerde S-modulen

$$S(m) \otimes_S S(n) \simeq S(m+n) .$$

Bewijs: Merk op dat (slordig genoteerd!)

$$(S(m) \otimes S(n))_k := \sum_{i+j=k} (S(m))_i \otimes (S(n))_j$$

en definieer:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i+j=k} (S(m))_i \otimes (S(n))_j \rightleftarrows (S(m+n))_k \\[2ex] \sum\limits_{\alpha} x_\alpha \otimes y_\alpha \longmapsto \sum\limits_{\alpha} x_\alpha y_\alpha \\[2ex] z\otimes 1 \longleftarrow\!\!| \; z \end{cases}$$

Ga na dat zo het gevraagde isomorphisme wordt verkregen.

Lemma 5.45: Zij S een gegradeerde ring en $(X,\mathcal{O}_X) = \mathrm{Proj}(S)$. Dan bestaat er voor elk tweetal gegradeerde S-modulen M en N een kanoniek functorieel (in M en N) morphisme van $\mathcal{O}_X$-modulen

$$\lambda: \tilde{M}\otimes_{\mathcal{O}_X}\tilde{N} \longrightarrow \widetilde{M\otimes_S N}$$

Bewijs: Kies $s\in S_d$ $(d > 0)$. Dan geldt:

$$\tilde{M}\otimes_{\mathcal{O}_X}\tilde{N}|D_+(s) = \tilde{M}|D_+(s)\otimes_{\mathcal{O}_X|D_+(s)}\tilde{N}|D_+(s) = \widetilde{M_{(s)}}\otimes_{\widetilde{S_{(s)}}}\widetilde{N_{(s)}} =$$

$$= \widetilde{M_{(s)}\otimes_{S_{(s)}}N_{(s)}} .$$

(Dit laatste gelijkteken geldt, omdat we werken met $S_{(s)}$-modulen (zonder gradering!)).

Voorts is

$$\widetilde{M\otimes_S N}|D_+(s) = \widetilde{(M\otimes_S N)_{(s)}} .$$

Definieer nu:

$$\begin{cases} \lambda_s: M_{(s)}\otimes_{S_{(s)}}N_{(s)} \longrightarrow (M\otimes_S N)_{(s)} \\[2ex] \dfrac{x}{s^m}\otimes\dfrac{y}{s^n} \longmapsto \dfrac{x\otimes y}{s^{m+n}} \end{cases}$$

Dit is een $S_{(s)}$-moduul-morphisme, terwijl bovendien voor elk tweede homogeen element $t \in S_+$ het diagram

$$\begin{array}{ccc} M_{(s)} \otimes_{S_{(s)}} N_{(s)} & \xrightarrow[\lambda_s]{} & (M \otimes_S N)_{(s)} \\ \Big\downarrow \text{kan.} & & \Big\downarrow \text{kan.} \\ M_{(st)} \otimes_{S_{(st)}} N_{(st)} & \xrightarrow[\lambda_{st}]{} & (M \otimes_S N)_{(st)} \end{array}$$

commuteert. Derhalve induceren de morphismen

$$\tilde{\lambda}_s : \widetilde{M_{(s)} \otimes_{S_{(s)}} N_{(s)}} \longrightarrow \widetilde{(M \otimes_S N)}_{(s)}$$

het gevraagde morphisme

$$\lambda : \tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{N} \longrightarrow \widetilde{M \otimes_S N}$$

Ga zelf de functorialiteit van λ in M en N na.

<u>Propositie 5.46</u>: <u>Zij S een gegradeerde ring, zodat S_+ wordt voortgebracht door S_1. Zij voorts $(X, \mathcal{O}_X) = \mathrm{Proj}(S)$. Dan is er een kanoniek functorieel (in M en N) isomorphisme</u>

$$\lambda : \tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{N} \xrightarrow{\sim} \widetilde{M \otimes_S N}$$

<u>voor elk tweetal gegradeerde S-modulen.</u>

<u>Bewijs</u>: λ wordt bepaald door de morphismen

$$\lambda_s : M_{(s)} \otimes_{S_{(s)}} N_{(s)} \longrightarrow (M \otimes_S N)_{(s)}$$

als s een homogeen element uit S_+ is (Cf. lemma 5.45). Omdat S_+ door S_1 wordt voortgebracht, geldt:

$$\mathrm{Proj}(S) = \bigcup_{s \in S_1} D_+(s)$$

zodat we klaar zijn als we bewijzen dat λ_s een isomorphisme is voor elke $s \in S_1$.
Beschouw nu

$$\frac{\sum_i^{<\infty} m_i \otimes n_i}{s^k} \in (M \otimes_S N)_{(s)}$$

dan geldt voor elke i: graad (m_i) + graad $(n_i) = k$. Zeg: graad $(m_i) = \mu_i$.
Definieer:

$$\begin{cases} \lambda'_s : (M \otimes_S N)_{(s)} \longrightarrow M_{(s)} \otimes_{S_{(s)}} N_{(s)} \\ \dfrac{\sum m_i \otimes n_i}{s^k} \longmapsto \sum_i \dfrac{m_i}{s^{\mu_i}} \otimes \dfrac{n_i}{s^{k-\mu_i}} \end{cases}$$

Dat λ'_s goed gedefinieerd is ziet men als volgt in:

$$(M \otimes_S N)_s \approx M_s \otimes_{S_s} N_s$$

zodat uit

$$\frac{\sum m_i \otimes n_i}{s^k} = 0$$

direkt volgt:

$$\sum \frac{m_i}{s^{\mu_i}} \otimes \frac{n_i}{s^{k-\mu_i}} = 0$$

Ook is gemakkelijk in te zien dat λ'_s de inverse is van λ_s, zodat λ_s een isomorphisme is.

<u>Definitie 5.47</u>: Als S een gegradeerde ring is, en M en N zijn twee gegradeerde S-modulen, dan heet een S-moduul-morphisme

$$\phi : M \longrightarrow N$$

van graad n als voor elke $k \in \mathbb{Z}$ geldt:

$$\phi(M_k) \subset N_{k+n} .$$

Noteer de verzameling van deze morphismen met

$$\mathrm{Hom}_S(M,N)_n .$$

Definitie 5.48: Met de notaties uit de vorige definitie:

$$\mathrm{Hom}_S(M,N) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_S(M,N)_n \subset \underline{\mathcal{M}}_S(M,N) .$$

Opmerking 5.49: $\mathrm{Hom}_S(M,N)$ is een gegradeerd S-moduul (De vermenigvuldiging wordt gegeven door:

$$(s.\mu)(m) := s.\mu(m)$$

$(s \in S,\ \mu \in \mathrm{Hom}_S(M,N),\ m \in M)$).

Opmerking 5.50: Als M een gegradeerd S-moduul is, voortgebracht door eindig veel homogene elementen, dan is

$$\mathrm{Hom}_S(M,N) = \underline{\mathcal{M}}_S(M,N) .$$

Bewijs: Zij

$$M = Sm_1 + \ldots + Sm_t$$

Zij graad$(m_i) = \mu_i$. Kies

$$\phi \in \underline{\mathcal{M}}_S(M,N) .$$

Dan is ϕ bepaald door $\phi m_1,\ldots,\phi m_i$. Kies $i \in \mathbb{Z}$ en noteer:

$\phi_i(m_k)$:= het homogene deel van graad $i+\mu_k$ van $\phi(m_k)$ $(k = 1,\ldots,t)$.

Dan geldt:

$$\phi(m_k) = \sum_i^{<\infty} \phi_i(m_k) \qquad (k = 1,\ldots,t)$$

en is de graad van $\phi_i(m_k)$ $i+\mu_k$, zodat

$$\phi_i \in \mathrm{Hom}_S(M,N)_i$$

en dus:

$$\phi \in \mathrm{Hom}_S(M,N) \ .$$

<u>Opmerking 5.51</u>: Zij A een ring, en zijn M en N twee A-modulen. Noteer: $(X,\mathcal{O}_X) = \mathrm{Spec}\ A$. We hebben dan een isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\tilde{M},\tilde{N}) \simeq \underline{\mathfrak{M}}_A(M,N)$$

dat als volgt wordt verkregen: Als $\Phi: \tilde{M} \longrightarrow \tilde{N}$ een $\mathcal{O}_X$-moduul-morphisme is, dan is $\Phi(X): M \longrightarrow N$ een A-moduul-morphisme, en het is met behulp van opm. IV in het bewijs van Stell. (4.33) eenvoudig na te gaan dat

$$\widetilde{\Phi(X)} = \Phi \ .$$

Als $a \in A$, dan hebben we bovendien een commutatief diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\tilde{M},\tilde{N}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\text{restr.}"'] & \underline{\mathfrak{M}}_A(M,N) \arrow[d, "\text{kan.}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|D(a)}(\tilde{M}|D(a),\tilde{N}|D(a)) \arrow[r, "\sim"] & \underline{\mathfrak{M}}_{A_a}(M_a,N_a)
\end{tikzcd}$$

(Ga na). We passen dit toe op de volgende situatie: Zij nu S een gegradeerde ring, en laten M en N gegradeerde S-modulen zijn, terwijl we nu noteren: $(X,\mathcal{O}_X) = \mathrm{Proj}(S)$. Laten verder s en t twee homogene elementen van S_+ zijn. Volgens het voorgaande hebben we dan een commutatief diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|D_+(s)}(\tilde{M}|D_+(s),\tilde{N}|D_+(s)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\text{restr.}"] & \underline{\mathfrak{M}}_{S_{(s)}}(M_{(s)},N_{(s)}) \arrow[d, "\text{kan.}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|D_+(st)}(\tilde{M}|D_+(st),\tilde{N}|D_+(st)) \arrow[r, "\sim"] & \underline{\mathfrak{M}}_{(S_{(s)})_{t'}}((M_{(s)})_{t'},(N_{(s)})_{t'})
\end{tikzcd}$$

(Hierbij is, als $s \in S_{s_0}$, $t \in S_{t_0}$, t' gedefinieerd door

$$t' := \frac{t^{s_0}}{s^{t_0}} \in S_{(s)} \quad . \quad).$$

Lemma 5.52: Zij S een gegradeerde ring met $(X, \mathcal{O}_X) = \mathrm{Proj}(S)$. Dan bestaat er voor elk tweetal gegradeerde S-modulen M en N een kanoniek functorieel (in M en N) $\mathcal{O}_X$-moduul-morphisme

$$\mu : \widetilde{\mathrm{Hom}_S(M.N)} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\tilde{M},\tilde{N}) \ .$$

Bew: Zij $s \in S_{s_0}$ en $t \in S_{t_0}$ $(s_0, t_0 > 0)$. Dan hebben we:

$$\widetilde{\mathrm{Hom}_S(M,N)}(D_+(s)) = \mathrm{Hom}_S(M,N)_{(s)}$$

en ook:

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\tilde{M},\tilde{N})(D_+(s)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|D_+(s)}(\tilde{M}|D_+(s),\tilde{N}|D_+(s)) \simeq$$

$$\simeq \underline{\mathcal{M}}_{S_{(s)}}(M_{(s)},N_{(s)})$$

Volgens opm. (5.51) is het lemma bewezen, indien we een morphisme

$$\mu_s : \mathrm{Hom}_S(M,N)_{(s)} \longrightarrow \underline{\mathcal{M}}_{S_{(s)}}(M_{(s)},N_{(s)})$$

kunnen vinden, zodat het diagram

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_S(M,N)_{(s)} & \xrightarrow{\mu_s} & \underline{\mathcal{M}}_{S_{(s)}}(M_{(s)},N_{(s)}) \\
\Big\downarrow \text{kan.} & & \Big\downarrow \text{kan.} \\
(\mathrm{Hom}_S(M,N)_{(s)})_{t'} & \xrightarrow[(\mu_s)_{t'}]{} & \underline{\mathcal{M}}_{(S_{(s)})_{t'}}((M_{(s)})_{t'},(N_{(s)})_{t'})
\end{array}$$

commuteert. (Weer is

$$t' := \frac{t^{s_0}}{s^{t_0}} \in S_{(s)} \quad).$$

Welnu, met de definitie

$$\begin{cases} \mu_s : \operatorname{Hom}_S(M,N)_{(s)} \longrightarrow \underline{m}_{S_{(s)}}(M_{(s)},N_{(s)}) \\ \qquad \frac{\alpha}{s^k} \longmapsto \left[\frac{m}{s^1} \longmapsto \frac{\alpha(m)}{s^{k+1}}\right] \end{cases}$$

is dit het geval, zoals gemakkelijk valt te controleren.

<u>Opm</u>: Men dient ook te controleren dat $(\mu_s)_{t'}$ en μ_{st} (analoog gedefinieerd als μ_s) overéénkomen modulo de identificaties

$$(S_{(s)})_{t'} = S_{(st)} \quad , \quad (M_{(s)})_{t'} = M_{(st)} \quad , \quad (N_{(s)})_{t'} = N_{(st)} \ .$$

Ga dit na.

<u>Propositie 5.53</u>: <u>Als S een gegradeerde ring is, zodat S_+ door S_1 wordt voortgebracht, en als M een gegradeerd S-moduul is met eindige presentatie, en N is een gegradeerd S-moduul, dan is er een kanoniek functorieel (in N) isomorphisme van $\mathcal{O}_X$-modulen</u>

$$\mu: \widetilde{\operatorname{Hom}_S(M,N)} \xrightarrow{\sim} \underline{\operatorname{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\tilde{M},\tilde{N}) \ .$$

<u>Bewijs</u>: In verband met het vorige lemma is het voldoende om de bijectivitiet van de morphismen

$$\mu_s : \operatorname{Hom}_S(M,N)_{(s)} \longrightarrow \underline{m}_{S_{(s)}}(M_{(s)},N_{(s)})$$

te controleren. Omdat S_+ door S_1 wordt voortgebracht, kunnen we ons daarbij beperken tot het geval $s \in S_1$.

We hebben voor elke $n \in \mathbb{Z}$ de volgende isomorphismen:

$$\text{(i)} \qquad \eta: \begin{cases} N(-n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_S(S(n),N) \\ x_k \longmapsto [s_1 \longmapsto s_1x_k] \end{cases}$$

en, omdat (i) een morphisme van gegradeerde S-modulen is, een geïnduceerd isomorphisme van $S_{(s)}$-modulen $(s \in S_1)$

$$\text{(ii)} \qquad \eta_s: \begin{cases} N(-n)_{(s)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_S(S(n),N)_{(s)} \\ \dfrac{x_k}{s^k} \longmapsto \dfrac{\alpha}{s^k} \end{cases}$$

(met α: $s_1 \longmapsto s_1x_k$ als $s_1 \in S(n)_1$). Ook hebben we:

$$\text{(iii)} \qquad \eta'_s: \begin{cases} N_{(s)} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathfrak{M}}_{S_{(s)}}(S(n)_{(s)},N_{(s)}) \\ \dfrac{x_k}{s^k} \longmapsto \left[\dfrac{s_1}{s^1} \longmapsto \dfrac{x_ks_1}{s^{k+1+n}}\right] \end{cases}$$

(i) en (ii) geven nu, samengesteld met μ_s:

$$\begin{array}{ccc} N(-n)_{(s)} \simeq \mathrm{Hom}_S(S(n),N)_{(s)} \xrightarrow{\mu_s} \underline{\mathfrak{M}}_{S_{(s)}}(S(n)_{(s)},N_{(s)}) \simeq N_{(s)} \\ \dfrac{x_k}{s^k} \longmapsto \dfrac{x_k}{s^{k-n}} \end{array}$$

Dit morphisme is bijectief, zodat μ_s bijectief is.
Beschouw nu een exakte rij

$$\sum_{i=1}^{k} S(n_i) \longrightarrow \sum_{j=1}^{l} S(m_j) \longrightarrow M \longrightarrow 0 \ .$$

Omdat voor elke n_i (en analoog voor elke m_j)

$$\mathrm{Hom}_S(S(n_i),N)_{(s)} \simeq \underline{\mathfrak{M}}_{S_{(s)}}(S(n_i)_{(s)},N_{(s)})$$

volgt (wegens de functorialiteit van μ_s en het feit dat de functor

$$M \longrightarrow M_{(s)}$$

compatibel is met het nemen van sommen) dat

$$\mu_s: \mathrm{Hom}_S(M,N)_{(s)} \longrightarrow \underline{\mathcal{M}}_{S_{(s)}}(M_{(s)},N_{(s)})$$

ook een isomorphisme is, wat te bewijzen was.

Definitie 5.54: Zij S een gegradeerde ring en zij $(X,\mathcal{O}_X) = \mathrm{Proj}(S)$. Dan noteren we voor elke $n\in\mathbb{Z}$:

$$\mathcal{O}_X(n) := \widetilde{S(n)} \ .$$

Definitie 5.55: Zij S een gegradeerde ring, $(X,\mathcal{O}_X) = \mathrm{Proj}(S)$ en zij $\mathcal{M}$ een $\mathcal{O}_X$-moduul. Noteer voor elke $n\in\mathbb{Z}$:

$$\mathcal{M}(n) := \mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_X(n) \ .$$

Lemma 5.56: Als S een gegradeerde ring is, en M is een gegradeerd S-moduul, dan is

$$M\otimes_S S(n) \simeq M(n)$$

(als gegradeerde S-modulen).

Bewijs: Ga na.

Opmerking 5.57: Als S een gegradeerde ring is, zodat S_+ wordt voortgebracht door S_1, en als $(X,\mathcal{O}_X) = \mathrm{Proj}(S)$, terwijl M een gegradeerd S-moduul is, dan is er een kanoniek functorieel (in M) isomorphisme van gegradeerde ringen

$$\tilde{M}(n) \simeq \widetilde{M(n)}$$

voor elke $n\in\mathbb{Z}$.

Bewijs: Met behulp van prop. (5.46) hebben we:

$$\tilde{M}(n) := \tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n) = \tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{S(n)} \xrightarrow[\lambda]{\sim} \widetilde{M \otimes_S S(n)} \simeq \widetilde{M(n)}$$

(Cf. lemma 5.56).

Opmerking 5.58: Als S een gegradeerde ring is, zodat S_+ door S_1 wordt voortgebracht, en $(X, \mathcal{O}_X) = \mathrm{Proj}(S)$, dan is voor elke $n \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{O}_X(n)$$

een inverteerbaar $\mathcal{O}_X$-moduul.

Bewijs: X wordt overdekt door de open deelverzamelingen $D_+(s)$ met $s \in S_1$. Kies $s \in S_1$. Dan is er een isomorphisme van $S_{(s)}$-modulen

$$\begin{cases} S_{(s)} \xrightarrow{\sim} (S(n))_{(s)} \\ \frac{1}{1} \longmapsto \frac{s^n}{1} \end{cases}$$

Derhalve geldt:

$$\mathcal{O}_X(n)|D_+(s) = \widetilde{S(n)}|D_+(s) = \widetilde{S(n)_{(s)}} \simeq \widetilde{S_{(s)}} = \mathcal{O}_X|D_+(s)$$

waaruit de opmerking volgt.

Opmerking 5.59: Zij S een gegradeerde ring, zodat S_+ door S_1 wordt voortgebracht. Zij $(X, \mathcal{O}_X) = \mathrm{Proj}(S)$. Dan geldt voor elke $n \in \mathbb{Z}$:

$$\mathcal{O}_X(n) = (\mathcal{O}_X(1))^{\otimes n}$$

Bewijs: Kies eerst $n = -1$. We hebben dan:

$$\mathcal{O}_X(1)^{\otimes(-1)} := \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X(1), \mathcal{O}_X) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{S(1)}, \tilde{S})$$

Nu heeft uiteraard S(1) als gegradeerd S-moduul een eindige presentatie, zodat volgens prop. (5.53)

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{S(1)},\tilde{S}) \simeq \widetilde{\mathrm{Hom}_S(S(1),S)} \ .$$

Omdat $\mathcal{O}_X(-1) = \widetilde{S(-1)}$ moeten we dus bewijzen:

$$S(-1) \simeq \mathrm{Hom}_S(S(1),S) \ .$$

Het is direkt duidelijk dat dit isomorphisme van gegradeerde S-modulen wordt gegeven door

$$\begin{cases} S(-1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(S(1),S) \\ x_k \longmapsto [y_l \mapsto x_k y_l] \end{cases}$$

zodat voor n = -1 de opmerking bewezen is. Vervolgens zij $n \geq 1$. Dan hebben we:

$$\mathcal{O}_X(n) = \widetilde{S(n)} \simeq \widetilde{S(n-1)\otimes S(1)} = \widetilde{S(n-1)}\otimes\widetilde{S(1)} = \ldots = \overset{n}{\otimes}\,\widetilde{S(1)} = \mathcal{O}_X(1)^{\otimes n}$$

Als n = 0, dan is de opmerking per definitie waar, en als $n \geq 1$, dan geldt:

$$\mathcal{O}_X(-n) = \widetilde{S(-n)} = \widetilde{S(-1)}\otimes\ldots\otimes\widetilde{S(-1)} = \mathcal{O}_X(-1)^{\otimes(n)} =$$

$$= (\mathcal{O}_X(1)^{\otimes(-1)})^{\otimes n} = \mathcal{O}_X(1)^{\otimes(-n)}$$

waarmee de opmerking bewezen is voor elke $n \in \mathbb{Z}$.

<u>Gevolg 5.60</u>: <u>Als</u> S <u>een gegradeerde ring is</u>, <u>en</u> $(X,\mathcal{O}_X) = \mathrm{Proj}(S)$, <u>dan geldt voor elke</u> $n,m \in \mathbb{Z}$:

$$\mathcal{O}_X(n)\otimes\mathcal{O}_X(m) = \mathcal{O}_X(n+m)$$

<u>als</u> S_+ <u>door</u> S_1 <u>wordt voortgebracht</u>.

Bewijs: Ga na. (Cf. opm. (4.108)).

Opmerking 5.61: In def. (4.109) was gedefinieerd: Als $\mathcal{M}$ een inverteerbaar $\mathcal{O}_X$-moduul is (waarbij $(X,\mathcal{O}_X)$ een geringde ruimte is) dan is

$$\Gamma_*(\mathcal{M}) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{M}^{\otimes n}(X) .$$

Verder hadden we voor een willekeurig $\mathcal{O}_X$-moduul $\mathcal{N}$:

$$\Gamma_*(\mathcal{M},\mathcal{N}) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{N}\otimes\mathcal{M}^{\otimes n}(X) .$$

Bovendien is volgens opm. (4.112) $\Gamma_*(\mathcal{M},\mathcal{N})$ op natuurlijke manier een gegradeerd $\Gamma_*(\mathcal{M})$-moduul.
In ons geval voeren we een wat slordige notatie in:
Zij S een gegradeerde ring en zij $(X,\mathcal{O}_X)=\mathrm{Proj}(S)$. Neem aan dat S_+ door S_1 wordt voortgebracht. Dan is volgens opm. (5.58) $\mathcal{O}_X(1)$ een inverteerbaar $\mathcal{O}_X$-moduul en we noteren voor elk $\mathcal{O}_X$-moduul $\mathcal{N}$ kortheidshalve:

Notatie: $$\Gamma_*(\mathcal{N}) := \Gamma_*(\mathcal{O}_X(1),\mathcal{N})$$

Er geldt dan:

$$\Gamma_*(\mathcal{N}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{N}\otimes\mathcal{O}_X(1)^{\otimes n}(X) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{N}\otimes\mathcal{O}_X(n)(X) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{N}(n)(X)$$

(Cf. def. (5.55)).

Lemma 5.62: Zij S een gegradeerde ring, zodat S_+ door S_1 wordt voortgebracht. Zij M een gegradeerd S-moduul. Dan bestaat er een kanoniek morphisme van gegradeerde abelse groepen

$$\alpha: M \longrightarrow \Gamma_*(\tilde{M}) .$$

Bewijs: Noteer: $(X,\mathcal{O}_X) = \mathrm{Proj}(S)$. Kies twee homogene elementen $s,t\in S_+$.
We hebben dan een morphisme van abelse groepen

$$\begin{cases} \alpha_0(s): M_0 \longrightarrow M_{(s)} = \tilde{M}(D_+(s)) \\ \qquad m \longmapsto \frac{m}{1} \end{cases}$$

terwijl de diagrammen

$$\begin{tikzcd} & M_{(s)} \arrow[d, "\text{kan.}"] & = \tilde{M}(D_+(s)) \arrow[d, "\text{restr.}"] \\ M_0 \arrow[ur, "\alpha_0(s)"] \arrow[dr, "\alpha_0(st)"'] & & \\ & M_{(st)} & = \tilde{M}(D_+(st)) \end{tikzcd}$$

commuteren. De verzameling $\{\alpha_0(s) \mid s \text{ homogeen}, s \in S_+\}$ definieert dus een morphisme van abelse groepen

$$\alpha_0 : M_0 \longrightarrow \tilde{M}(X) .$$

Kies nu $n \in \mathbb{Z}$. Dan is - als abelse groep - $M_n = (M(n))_0$, en hebben we, op dezelfde manier zoals we α_0 verkregen hebben,

$$\alpha_n := \left[M_n = (M(n))_0 \longrightarrow \widetilde{M(n)}(X) = \tilde{M}(n)(X)\right] .$$

Derhalve induceert de verzameling $\{\alpha_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ een morphisme van gegradeerde abelse groepen

$$\alpha : M \longrightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widetilde{M(n)}(X) = \Gamma_*(\tilde{M}) .$$

<u>Opmerking 5.63</u>: <u>Zij S een gegradeerde ring, zodat S_1 S_+ voortbrengt. Dan is het in lemma (5.62) gedefinieerde kanonieke morphisme</u>

$$\alpha : S \longrightarrow \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$$

<u>een morphisme van gegradeerde ringen.</u>

<u>Bewijs</u>: α is een morphisme van abelse groepen dat de gradering respecteert, dus moeten we alleen nog nagaan of α ook multiplicatief is. Beschouw

hiertoe de gegradeerde ring

$$\Gamma_*(\mathcal{O}_X) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(n)(X) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{S(n)}(X).$$

Als $\tau_n \in \widetilde{S(n)}(X)$ en $\tau_m \in \widetilde{S(m)}(X)$, dan wordt $\tau_n\tau_m \in \widetilde{S(n+m)}(X)$ gegeven door:

$$\left\{\begin{array}{ccc} \widetilde{S(n)}(X)\otimes\widetilde{S(m)}(X) & \xrightarrow{\text{kan.}} \widetilde{S(n)}\otimes\widetilde{S(m)}(X) = & \widetilde{S(n+m)}(X) \\ \tau_n\otimes\tau_m & \longmapsto & \tau_n\tau_m \end{array}\right.$$

(Cf. opm. (4.110), opm. (5.44), propositie (5.46)). Als $s\in S_1$, dan wordt dit morphisme lokaal gegeven door:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{S(n)}(D_+(s))\otimes\widetilde{S(m)}(D_+(s)) & & \widetilde{S(n+m)}(D_+(s)) \\ \| & & \| \\ S(n)_{(s)}\otimes_{S_{(s)}} S(m)_{(s)} & \longrightarrow & S(n+m)_{(s)} \\ \dfrac{t_k}{s^k}\otimes\dfrac{t_l}{s^l} & \longmapsto & \dfrac{t_k t_l}{s^{k+l}} \end{array}$$

Kies nu $t_n \in S_n$ en $t_m \in S_m$. Dan geldt, wegens de definitie voor α:

$$\alpha(t_n)|D_+(s) = \frac{t_n}{1} \in S(n)_{(s)} \quad ; \quad \alpha(t_m)|D_+(s) = \frac{t_m}{1} \in S(m)_{(s)} .$$

Dus geldt ook:

$$\alpha(t_n).\alpha(t_m)|D_+(s) = \frac{t_n t_m}{1} = \alpha(t_n t_m)|D_+(s)$$

zodat, omdat dit voor elke $s\in S_1$ geldt,

$$\alpha(t_n)\alpha(t_m) = \alpha(t_n t_m)$$

waarmee de opmerking bewezen is.

Terminologie 5.64: Zij $(X,\mathcal{O}_X)$ een preschema en zij $\mathcal{M}$ een $\mathcal{O}_X$-moduul. Zij μ een globale snede van $\mathcal{M}$. Definieer voor elk punt $x \in X$:

$$\mu(x) := \mu_x (\text{mod } \underline{m}_x . \mathcal{M}(x))$$

als μ_x het door μ geïnduceerde element van $\mathcal{M}(x)$ is, en $\underline{m}_x$ het maximale ideaal van de lokale ring $\mathcal{O}_X(x)$.

Opmerking 5.65: Zij S een gegradeerde ring zodat S_1 S_+ voortbrengt. Zij $(X,\mathcal{O}_X) = \text{Proj}(S)$, en zij verder $s \in S_n$ $(n > 0)$. Als

$$\alpha_n : S_n \longrightarrow \widetilde{S(n)}(X)$$

het in lemma (5.62) gedefinieerde natuurlijke morphisme van abelse groepen is, dan is

$$D_+(s) = \{x \in X \mid \alpha_n(s)(x) \neq 0\} .$$

Bewijs: Wegens

$$X = \bigcup_{t \in S_1} D_+(t)$$

kunnen we volstaan met voor elke $t \in S_1$ te bewijzen:

$$D_+(st) = \{x \in D_+(t) \mid \alpha_n(s)(x) \neq 0\}$$

of, aequivalent hiermee (als $s' = \frac{s}{t^n}$)

$$\text{Spec}(S_{(t)})_{s'} = \{x \in D_+(t) \mid \alpha_n(s)(x) \neq 0\}$$

of, als we noteren: $x = x_{\underline{p}}$ voor elke $x \in D_+(t)$, waarbij $\underline{p}$ het priemideaal is dat met x correspondeert in de ring $S_{(t)}$, en als we bovendien rekening houden met de definitie van $\alpha_n(s)|D_+(t)$:

$$\{x_{\underline{p}} \mid s' \notin \underline{p}\} = \{x_{\underline{p}} \mid \frac{(\frac{s}{1})}{(\frac{1}{1})} \notin \underline{p}(S_{(t)})_{\underline{p}} . (S(n)_{(t)})_{\underline{p}}\}$$

en dit is direkt te verifiëren.

Opmerking 5.66: Zij S een gegradeerde ring zodat S_1 S_+ voortbrengt, zij $(X,\mathcal{O}_X) = \mathrm{Proj}(S)$ en zij $\mathcal{M}$ een $\mathcal{O}_X$-moduul. Dan is $\Gamma_*(\mathcal{M})$ op natuurlijke manier een gegradeerd S-moduul.

Bewijs: $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ is een gegradeerde ring en $\Gamma_*(\mathcal{M})$ is op natuurlijke manier een gegradeerd $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$-moduul. (Ga na). Ook hebben we volgens opm. (5.63) een morphisme van gegradeerde ringen

$$\alpha: S \longrightarrow \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$$

zodat we op $\Gamma_*(\mathcal{M})$ een door α geïnduceerde gegradeerde S-moduul-struktuur hebben.

Lemma 5.67: Zij S een gegradeerde ring, zodat S_+ door S_1 wordt voortgebracht. Noteer: $(X,\mathcal{O}_X) = \mathrm{Proj}(S)$. Dan bestaat er voor elk $\mathcal{O}_X$-moduul $\mathcal{M}$ een kanoniek morphisme van $\mathcal{O}_X$-modulen

$$\beta: \widetilde{\Gamma_*(\mathcal{M})} \longrightarrow \mathcal{M}$$

dat functoriëel is in $\mathcal{M}$.

Bewijs: Zij $s \in S_d$, $d > 0$. Kies een element

$$\frac{z}{s^n} \in \widetilde{\Gamma_*(\mathcal{M})}(D_+(s)) = \Gamma_*(\mathcal{M})_{(s)} .$$

Dan hebben we:

$$z \in \Gamma_*(\mathcal{M})_{nd} = \mathcal{M}(nd)(X) = [\mathcal{M} \otimes \widetilde{S(nd)}](X)$$

en ook:

$$\frac{1}{s^n} \in S(-nd)_{(s)} = \widetilde{S(-nd)}(D_+(s)) .$$

Definieer nu een morphisme van $S_{(s)}$-modulen

$$\beta_s: \Gamma_*(\mathcal{M})_{(s)} \longrightarrow \mathcal{M}(D_+(s))$$

als volgt:

$$\begin{cases} \mathcal{M}(nd)(D_+(s)) \otimes \widetilde{S(-nd)}(D_+(s)) \xrightarrow{\text{kan.}} [\mathcal{M}(nd) \otimes \widetilde{S(-nd)}](D_+(s)) = \mathcal{M}(D_+(s)) \\ (z|D_+(s)) \otimes \frac{1}{s^n} \xmapsto{\text{per def.}} \beta_s(\frac{z}{s^n}) \end{cases}$$

We tonen aan, dat als $t \in S_e$, $e > 0$, het diagram

$$\begin{tikzcd} \Gamma_*(\mathcal{M})_{(s)} \arrow[r, "\beta_s"'] \arrow[d, "\text{kan.}"'] & \mathcal{M}(D_+(s)) \arrow[d, "\text{restr.}"'] \\ \Gamma_*(\mathcal{M})_{(st)} \arrow[r, "\beta_{st}"'] & \mathcal{M}(D_+(st)) \end{tikzcd} \qquad \text{.....................(i)}$$

commuteert. Merk hiertoe allereerst op dat het diagram

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}(nd)(D_+(s)) \otimes \widetilde{S(-nd)}(D_+(s)) \arrow[r] \arrow[d, "\text{restr.} \otimes \text{restr.}"'] & \mathcal{M}(D_+(s)) \arrow[d, "\text{restr.}"'] \\ \mathcal{M}(nd)(D_+(st)) \otimes \widetilde{S(-nd)}(D_+(st)) \arrow[r] & \mathcal{M}(D_+(st)) \end{tikzcd} \qquad \text{......(ii)}$$

commuteert, zodat

$$\beta_s(\frac{z}{s^n}) \mid D_+(st)$$

het beeld is van het element

$$z|D_+(st) \otimes \frac{t^n}{(st)^n} \qquad \text{.....................(iii)}$$

als we daarop het morphisme toepassen, gegeven door de onderste horizontale pijl van diagram (ii).
Voorts commuteert wegens de associativiteit van het tensorprodukt het diagram

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
& \mathcal{M}(nd)(D_+(st))\otimes\widetilde{S(ne)}(D_+(st))\otimes\widetilde{S(-n(d+e))}(D_+(st)) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathcal{M}(n(d+e))(D_+(st))\otimes\widetilde{S(-n(d+e))}(D_+(st)) \arrow[dr] & & \mathcal{M}(nd)(D_+(st))\otimes\widetilde{S(-nd)}(D_+(st)) \arrow[dl] \\
& \mathcal{M}(D_+(st)) &
\end{tikzcd}$$

zodat, met behulp van (iii) geldt:

$$\beta_{st}\left(\frac{zt^n}{(st)^n}\right) = \beta_s\left(\frac{z}{s^n}\right) \mid D_+(st)$$

waarmee de commutativiteit van (i) bewezen is. We hebben dus een door het stel $\{\beta_s \mid s \in S_d,\ d > 0\}$ geïnduceerd morphisme van $\mathcal{O}_X$-modulen:

$$\beta\colon \widetilde{\Gamma_*(\mathcal{M})} \longrightarrow \mathcal{M}$$

Ga zelf na dat dit morphisme functorieel is in $\mathcal{M}$.

<u>Lemma 5.68</u>: <u>Zij S een gegradeerde ring zodat S_+ door S_1 wordt voortgebracht. Dan is, als M een gegradeerd S-moduul is, de samenstelling</u>

$$\tilde{M} \xrightarrow[\tilde{\alpha}]{} \widetilde{\Gamma_*(\tilde{M})} \xrightarrow[\beta]{} \tilde{M}$$

<u>de identiteit op</u> $\tilde{M}$.

<u>Bewijs</u>: We kunnen dit lokaal nagaan. Kies hiertoe $s \in S_d$, $d > 0$. Beschouw

$$M_{(s)} \xrightarrow[\alpha_{(s)}]{} \Gamma_*(\tilde{M})_{(s)} \xrightarrow[\beta_s]{} M_{(s)}$$

waarbij $\alpha_{(s)}$ gedefinieerd is met

$$\alpha_{(s)}\left(\frac{m}{s^n}\right) := \frac{\alpha(m)}{s^n} .$$

Als $\frac{m}{s^n} \in M_{(s)}$, dan is $m \in M_{nd}$ en wordt $\alpha(m)$ gekarakteriseerd door

$$\alpha(m)\,|\,D_+(s) := \frac{m}{1} \in \tilde{M}(nd)(D_+(s))$$

Nu wordt

$$\beta_s\left(\frac{\alpha(m)}{s^n}\right)$$

gedefinieerd door

$$\left\{\begin{array}{l} \tilde{M}(nd)(D_+(s)) \otimes \widetilde{S(-nd)}(D_+(s)) \xrightarrow{\text{kan.}} \tilde{M}(D_+(s)) \\ (\alpha(m)\,|\,D_+(s)) \otimes \frac{1}{s^n} \longmapsto \beta_s\left(\frac{\alpha(m)}{s^n}\right) \end{array}\right. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

Identificeren we

$$\tilde{M}(nd)(D_+(s)) = M(nd)_{(s)} \;;\quad \widetilde{S(-nd)}(D_+(s)) = S(-nd)_{(s)} \;;$$

$$\tilde{M}(D_+(s)) = M_{(s)}$$

dan geeft (i):

$$\left\{\begin{array}{l} M(nd)_{(s)} \otimes S(-nd)_{(s)} \longrightarrow M_{(s)} \\ \frac{m}{1} \otimes \frac{1}{s^n} \longmapsto \frac{m}{s^n} \end{array}\right.$$

(Ga na!), zodat het lemma bewezen is.

<u>Propositie 5.69</u>: <u>Als S een gegradeerde ring is, zodat S_+ wordt voortgebracht door eindig veel elementen uit S_1, en als</u> $(X, \mathcal{O}_X) = \mathrm{Proj}(S)$, <u>dan is voor elk quasi-coherent $\mathcal{O}_X$-moduul $\mathcal{N}$ het kanonieke morphisme</u>

$$\beta : \widetilde{\Gamma_*(\mathcal{N})} \longrightarrow \mathcal{N}$$

<u>een isomorphisme</u>.

Voordat we deze propositie bewijzen, eerst enkele opmerkingen:

Opmerking 5.70: Als $(X,\mathcal{O}_X)$ = Spec A en M is een A-moduul, dan geldt voor elke globale snede

$$\mu \in \tilde{M}(X)$$

dat, als $\mu|D(a) = 0 \quad (a \in A)$, er een $n \in \mathbb{N}$ bestaat zodat

$$a^n \mu = 0 \ .$$

Bewijs: triviaal.

Opmerking 5.71: Zij $(X,\mathcal{O}_X)$ = Spec A en zij V een open kompakte deelverzameling van X. Zij verder $\mathcal{M}$ een quasi-coherent $\mathcal{O}_X|V$-moduul. Als $a \in A$ zodat $D(a) \subset V$, dan bestaat er voor elke $\mu \in \mathcal{M}(D(a))$ een $n \in \mathbb{N}$, zodat de snede

$$(a^n|D(a)).\mu \in \mathcal{M}(D(a))$$

kan worden voortgezet tot een snede van $\mathcal{M}$ over V.

Bewijs: Zij eerst V = Spec A. Dan is $\mathcal{M} = \tilde{M}$ voor een zeker A-moduul M, en $\mathcal{M}(D(a)) = M_a$. Zij voorts

$$\mu = \frac{m}{a^n} \in M_a = \mathcal{M}(D(a)) \ .$$

Dan is m een globale snede van $\tilde{M}$ en er geldt:

$$m|D(a) = \frac{a^n}{1} \cdot \frac{m}{a^n} = (a^n|D(a)).\mu \ ,$$

zodat in dit geval de opmerking bewezen is. Zij nu $V \neq X$. Dan zijn er elementen

$$\alpha_1,\ldots,\alpha_t \in A$$

zodat

$$V = D(a_1) \cup \ldots \cup D(a_t)$$

Dan is wegens $D(a) \subset V$ ook

$$D(a) = D(aa_1) \cup \ldots \cup D(aa_t)$$

Voor elke $i \in \{1,\ldots,t\}$ is bij $\mu|D(aa_i)$ een n_i te vinden zodat

$$(a^{n_i}|D(aa_i)).(\mu|D(aa_i)) \in \mathfrak{M}(D(aa_i))$$

is voort te zetten tot een snede in $\mathfrak{M}(D(a_i))$. Kies nu:

$$n := \max \{n_i\}$$

Dan is elke

$$(a^n|D(aa_i)).(\mu|D(aa_i)) \in \mathfrak{M}(D(aa_i))$$

voort te zetten tot een snede

$$\mu_i \in \mathfrak{M}|D(a_i) \ .$$

Definieer nu:

$$\mu_{i,j} := \mu_i|D(a_ia_j) - \mu_j|D(a_ia_j) \ .$$

Dan is

$$(\mu_{i,j} - \mu_{j,i})|D(aa_ia_j) = 0$$

zodat er een $n_0 \in \mathbb{N}$ te vinden is met

$$(a^{n_0}|D(a_ia_j)).(\mu_{i,j} - \mu_{j,i}) = 0 \ .$$

(Cf. opm. (5.70)). Derhalve geldt voor elke i en elke j

$$a^{n_0}\mu_i|D(a_ia_j) = a^{n_0}\mu_j|D(a_ia_j) \ ,$$

zodat er een snede $\mu_0 \in \mathcal{M}(V)$ bestaat met

$$\mu_0|D(a_i) = a^{n_0}\mu_i \ .$$

Dan geldt voor elke i ook:

$$\mu_0|D(aa_i) = a^{n+n_0}\mu|D(aa_i)$$

zodat

$$\mu_0|D(a) = (a^{n+n_0}|D(a)).\mu$$

(schoof-eigenschap), zodat de opmerking bewezen is.

N.B.: Als $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ twee $\mathcal{O}_X$-modulen zijn, dan zullen we vaak het beeld onder het kanonieke morphisme van preschoven

$$\mathcal{M}(U)\otimes\mathcal{N}(U) \longrightarrow (\mathcal{M}\otimes\mathcal{N})(U)$$

van een element $\mu\otimes\nu \in \mathcal{M}(U)\otimes\mathcal{N}(U)$ ook met $\mu\otimes\nu$ aangeven (U is een open deelverzameling van X). Ga steeds ter plaatse na dat deze slordigheid geoorloofd is.

Opmerking 5.72: Zij $(X,\mathcal{O}_X)$ een preschema en zij $\mathcal{M}$ een inverteerbaar $\mathcal{O}_X$-moduul. Zij $\mu \in \mathcal{M}(X)$ en noteer:

$$X_\mu := \{x \in X | \mu(x) \neq 0\} \ .$$

(Cf. (5.64)). Zij U een open affiene omgeving van een punt $x \in X_\mu$, zodat er een isomorphisme

$$\Phi:\ \mathcal{M}|U \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X|U$$

bestaat. Noteer U = Spec(A) en ook:

$$a := \Phi(U)(\mu|U) \in \mathcal{O}_X(U) = A \ .$$

(i) Er geldt: $U \cap X_\mu = D(a)$.

Bewijs (i): Kies $x = x_{\underline{p}} \in U \cap X_\mu$. ($\underline{p}$ is een priemideaal van A). Omdat $\mathcal{M}$ inverteerbaar is en U affien, is

$$\mathcal{M}|U \simeq \tilde{M}$$

voor een zeker A-moduul M, isomorf met A. Zeg:

$$\begin{cases} \Phi(U): M \xrightarrow{\sim} A \\ \qquad\quad m \longmapsto 1 \end{cases}$$

Dan is $M = Am$. Stel nu $a \in \underline{p}$. Dan is $\mu|U = a.m \in \underline{p}.M$, dus

$$\mu_x = \frac{am}{1} \in \underline{p}.M_{\underline{p}}$$

wat zeggen wil: $\mu(x) = 0$. (μ_x is het door μ geïnduceerde element in de staak $\mathcal{M}(x) = M_{\underline{p}}$). Stel nu omgekeerd: $\mu(x_{\underline{p}}) = 0$. Dus:

$$\frac{am}{1} \in \underline{p}.M_{\underline{p}} \ .$$

Dan volgt gemakkelijk dat $a \in \underline{p}$. Hiermee is (i) bewezen. (Merk op dat hieruit ook volgt dat X_μ open is.)

(ii) Er is een isomorphisme van $\mathcal{O}_X|X_\mu$-modulen

$$\Psi: \mathcal{M}|X_\mu \xleftarrow{\sim} \mathcal{O}_X|X_\mu \ .$$

Bewijs (ii): Zij U een open deelverzameling van X_μ. Definieer:

$$\begin{cases} \Psi(U): \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{M}(U) \\ \qquad\qquad\quad r \longmapsto r.(\mu|U) \ . \end{cases}$$

Dat Ψ een isomorphisme is, kunnen we lokaal controleren: Kies $x \in X_\mu$ en daarbij een open affiene omgeving U van x binnen X_μ zodat

$$\Phi: \mathcal{M}|U \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X|U .$$

Zij $\mathcal{O}_X(U) = A$; $\Phi(U)(\mu|U) = a$; $\mathcal{M}|U = \tilde{M}$; $M = Am \simeq A$; $\Phi(U)(m) = 1 \in A$.
We hebben dan de samenstelling:

$$\begin{cases} A = \mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{\Psi(U)} \mathcal{M}(U) \xrightarrow{\Phi(U)} \mathcal{O}_X(U) = A \\ 1 \longmapsto \mu|U \longmapsto a \end{cases}$$

Nu is $X_\mu \cap U = U$, dus is volgens (i) $D(a) = U = \operatorname{Spec} A$, zodat a een eenheid is. Derhalve is $\Phi(U)\circ\Psi(U)$ een isomorphisme, dus evenzo $\Psi(U)$. We kunnen dit voor iedere voldoende kleine open omgeving van elk punt $x \in X_\mu$ doen, zodat Ψ een isomorphisme is.

<u>Opmerking 5.73</u>: <u>Zij $(X,\mathcal{O}_X)$ een kompakt schema en zij $\mathcal{M}$ een inverteerbaar, en $\mathcal{N}$ een quasi-coherent $\mathcal{O}_X$-moduul. Zij voorts $\mu \in \mathcal{M}(X)$ en noteer:</u>

$$X_\mu := \{x \in X \mid \mu(x) \neq 0\} .$$

<u>Als $\nu \in \mathcal{N}(X)$ met $\nu|X_\mu = 0$, dan is er een $n \in \mathbb{N}$ zodat</u>

$$\nu \otimes \mu^{\otimes n} = 0 .$$

<u>Bewijs</u>: Kies een open affiene overdekking $(U_i)_i$ van X zodat we voor elke i een isomorphisme

$$\Phi_i: \mathcal{M}|U_i \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X|U_i$$

hebben. We kunnen aannemen dat deze overdekking eindig is. Voor elke i hebben we dan een isomorphisme

$$\begin{cases} \mathcal{N} \otimes \mathcal{M}^{\otimes k}(U_i) \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}(U_i) \\ \nu \otimes \mu^{\otimes k}|U_i \longmapsto \Phi_i(U_i)(\mu|U_i)^k.(\nu|U_i) \end{cases}$$

en we zijn klaar als we laten zien dat voor elke i er een $k_i \in \mathbb{N}$ bestaat zodat

$$\Phi_i(U_i)(\mu|U_i)^{k_i}.(\nu|U_i) = 0 \ .$$

Zij U_i = Spec A. Dan is

$$a := \Phi_i(U_i)(\mu|U_i) \in \mathcal{O}_X(U_i) = A$$

en bovendien:

$$X_\mu \cap U_i = D(a) \ .$$

(Cf. Opm. (5.72)). Ook is $\mathcal{N}|U_i = \tilde{N}$ voor een zeker A-moduul N, zodat

$$n := \nu|U_i \in \tilde{N}(U_i) = N \ .$$

Nu is

$$\nu|U_i \cap X_\mu = \frac{n}{1} = 0 \qquad (\text{in } N_a)$$

dus is er een $k_i \in \mathbb{N}$ zodat $a^{k_i}n = 0$.

<u>Opmerking 5.74</u>: <u>Zij</u> $(X, \mathcal{O}_X)$ <u>een kompakt schema</u>, $\mathcal{M}$ <u>een inverteerbaar en</u> $\mathcal{N}$ <u>een quasi-coherent</u> $\mathcal{O}_X$<u>-moduul, terwijl</u> $\mu \in \mathcal{M}(X)$ <u>en</u>

$$X_\mu := \{x \in X | \mu(x) \neq 0\} \ .$$

<u>Dan bestaat er voor iedere</u> $\nu \in \mathcal{N}(X_\mu)$ <u>een</u> $n \in \mathbb{N}$, <u>zodat de snede</u>

$$\nu \otimes \mu^{\otimes n}|X_\mu \in \mathcal{N} \otimes \mathcal{M}^{\otimes n}(X_\mu)$$

<u>kan worden voortgezet tot een snede</u>

$$\nu' \in \mathcal{N} \otimes \mathcal{M}^{\otimes n}(X) \ .$$

<u>Bewijs</u>: Kies een eindige affiene open overdekking $(U_i)_i$ van X, zodat we voor elke i een isomorphisme

$$\Phi_i : \mathcal{M}|U_i \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X|U_i$$

hebben, en noteer $U_i = \operatorname{Spec}(A_i)$. Dan is er een A_i-moduul N_i zodat

$$\mathcal{N}|U_i = \tilde{N}_i$$

terwijl we bovendien kunnen noteren:

$$a_i := \Phi_i(U_i)(\mu|U_i) \in \mathcal{O}_X(U_i) = A_i \ .$$

Merk verder op (Opm. 5.72)):

$$X_\mu \cap U_i = D(a_i)$$

Dan is

$$\frac{n_i}{a_i^{t_i}} := \nu|X_\mu \cap U_i \in \tilde{N}_i(D(a_i)) = (N_i)_{a_i}$$

en we hebben voor elke i een isomorphisme

$$\begin{cases} \mathcal{N} \otimes \mathcal{M}^{\otimes k}(X_\mu \cap U_i) \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}(X_\mu \cap U_i) = (N_i)_{a_i} \\ (\nu|X_\mu \cap U_i) \otimes (\mu^{\otimes k}|X_\mu \cap U_i) \longmapsto \dfrac{a_i^k n_i}{a_i^{t_i}} \end{cases}$$

Kies t:= $\max\{t_i\}$ en beschouw

$$a_i^{t-t_i} n_i \in N_i \ .$$

Dan kunnen we

$$\nu_i^! \in \mathcal{N}\otimes\mathcal{M}^{\otimes t}(U_i)$$

definieren met:

$$\begin{cases} \mathcal{N}\otimes\mathcal{M}^{\otimes t}(U_i) \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}(U_i) = N_i \\ \nu_i^! \longmapsto a_i^{t-t_i} n_i \end{cases}$$

Er geldt dan:

$$\begin{cases} \mathcal{N}\otimes\mathcal{M}^{\otimes t}(U_i \cap X_\mu) \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}(U_i \cap X_\mu) = (N_i)_{a_i} \\ \nu_i^! | U_i \cap X_\mu \longmapsto \dfrac{a_i^t n_i}{a_i^{t_i}} \\ \nu\otimes\mu^{\otimes t} | U_i \cap X_\mu \longmapsto \dfrac{a_i^t n_i}{a_i^{t_i}} \end{cases}$$

zodat voor elke i geldt:

$$\nu_i^! | X_\mu \cap U_i = \nu\otimes\mu^{\otimes t} | X_\mu \cap U_i \ .$$

Nu geldt, als $U_{ij} := U_i \cap U_j$:

$$\nu_i^! | X_\mu \cap U_{ij} = (\nu | U_{ij} \cap X_\mu)\otimes(\mu^{\otimes t} | U_{ij} \cap X_\mu) = \nu_j^! | X_\mu \cap U_{ij}$$

en, omdat X een schema is, is U_{ij} affien, en dus kompakt. Noteer:

$$\nu_{i,j}^! := \nu_i^! | U_{ij} - \nu_j^! | U_{ij} \ .$$

Dan is

$$\nu_{i,j}^! | U_{ij} \cap X_\mu = 0$$

zodat volgens opm. (5.73) er een $m \in \mathbb{N}$ bestaat, zodat

$$\nu'_{i,j}\otimes\mu^{\otimes m}|U_{ij} = 0 \ .$$

Derhalve is

$$\nu'_i\otimes\mu^{\otimes m}|U_{ij} = \nu'_j\otimes\mu^{\otimes m}|U_{ij}$$

zodat er een

$$\nu'\in\mathcal{N}\otimes\mathcal{M}^{\otimes(m+t)}(X)$$

bestaat met

$$\forall i.\ \nu'|U_i = \nu'_i\otimes\mu^{\otimes m}|U_i \ .$$

Dan is ook

$$\forall i.\ \nu'|U_i\cap X_\mu = \nu\otimes\mu^{\otimes(m+t)}|X_\mu\cap U_i$$

waaruit weer volgt:

$$\nu\otimes\mu^{\otimes(m+t)}|X_\mu = \nu'|X_\mu$$

zodat de opmerking bewezen is.

Opmerking 5.75: Zij $(X,\mathcal{O}_X)$ een kompakt schema, $\mathcal{M}$ een inverteerbaar en $\mathcal{N}$ een quasi-coherent $\mathcal{O}_X$-moduul. Zij voorts

$$\mu\in\mathcal{M}^{\otimes n}(X)$$

en definieer:

$$X_\mu := \{x\in X|\mu(x) \neq 0\} \ .$$

Noteer verder:

$$\begin{cases} A := \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}^{\otimes n}(X) \\ N := \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{N}\otimes\mathcal{M}^{\otimes n}(X) \ . \end{cases}$$

Dan is op natuurlijke wijze $\mathbb{N}$ een gegradeerd A-moduul. Kies nu $\nu \in \mathcal{N}(X_\mu)$. Dan is - omdat ook $\mathcal{M}^{\otimes n}$ invertibel is - er een $k \in \mathbb{N}$ zodat

$$\nu \otimes \mu^{\otimes k} | X_\mu$$

is voort te zetten tot een snede

$$\nu' \in \mathcal{N} \otimes \mathcal{M}^{\otimes kn}(X) = N_{nk}$$

(Cf. Opm. (5.74)). Definieer nu:

$$\begin{cases} \theta : \mathcal{N}(X_\mu) \longrightarrow N_{(\mu)} \\ \qquad \nu \longmapsto \dfrac{\nu'}{\mu^{\otimes k}} \end{cases}$$

(i) Als $\nu = 0$, dan is ook

$$\nu \otimes \mu^{\otimes k} | X_\mu = 0$$

en derhalve per definitie ook $\nu' | X_\mu = 0$. Dan is er volgens opm. (5.73) een $1 \in \mathbb{N}$, zodat

$$\nu' \otimes \mu^{\otimes 1} = 0$$

en dit is aequivalent met

$$\frac{\nu'}{\mu^{\otimes m}} = 0$$

zodat θ een goed gedefinieerde afbeelding is.

(ii) <u>θ is injectief</u>: Zij

$$\frac{\nu'}{\mu^{\otimes m}} = 0$$

Dan is er een $1 \in \mathbb{N}$ zodat

$$\nu' \otimes \mu^{\otimes 1} = 0 \ .$$

In het bijzonder is dan

$$\nu'\otimes\mu^{\otimes l}|X_\mu = \nu\otimes\mu^{\otimes(l+k)}|X_\mu = 0 \; .$$

Beschouw het isomorfisme

$$\mathcal{N}\otimes\mathcal{M}^{\otimes(l+k)n}(X_\mu) \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}(X_\mu)$$

$$\nu\otimes\mu^{\otimes(l+k)}|X_\mu \longmapsto \nu . a^{l+k}$$

(waarbij a gegeven wordt door

$$\mathcal{M}^{\otimes n}(X_\mu) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(X_\mu)$$

$$\mu|X_\mu \longmapsto a$$

(Cf. Opm. (5.72) (ii) en bedenk dat $\mathcal{M}^{\otimes n}$ inverteerbaar is). Volgens Opm. (5.72) (ii) is $a|U$ een eenheid in de ring $\mathcal{O}_X|U$ voor elke geschikt gekozen open affiene omgeving U van een willekeurig punt $x \in X_\mu$, zodat uit

$$\nu\otimes\mu^{\otimes(l+k)}|X_\mu = 0$$

eerst volgt:

$$\nu . a^{l+k} = 0$$

en dus ook

$$\nu . a^{l+k}|U = 0$$

wat weergeeft: $\nu = 0$, waarmee de injectiviteit van θ is bewezen.

(iii) <u>θ is surjectief</u>: Kies namelijk een element

$$\frac{\nu'}{\mu^{\otimes k}} \in N_{(\mu)}$$

Dan is

$$\nu' \in \mathcal{N} \otimes \mathcal{M}^{\otimes kn}(X) = N_{kn}$$

zodat ook

$$\nu'|X_\mu \in \mathcal{N} \otimes \mathcal{M}^{\otimes kn}(X_\mu) \ .$$

Met behulp van het isomorphisme

$$\begin{cases} \Psi: \mathcal{M}^{\otimes n}|X_\mu \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X|X_\mu \\ \qquad \mu|X_\mu \longmapsto 1 \end{cases}$$

verkrijgen we een isomorphisme

$$1 \otimes \Psi^{\otimes k}(X_\mu): \mathcal{N} \otimes \mathcal{M}^{\otimes nk}(X_\mu) \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}(X_\mu) \ .$$

Definieer:

$$\nu'' := 1 \otimes \Psi^{\otimes k}(X_\mu)(\nu'|X_\mu) \ .$$

Omdat ook

$$1 \otimes \Psi^{\otimes k}(X_\mu)(\nu'' \otimes \mu^{\otimes k}|X_\mu) = \nu''$$

volgt dan:

$$\nu'|X_\mu = \nu'' \otimes \mu^{\otimes k}|X_\mu$$

zodat

$$\theta(\nu'') = \frac{\nu'}{\mu^{\otimes k}}$$

waarmee de surjectiviteit van θ is geverifieerd.

Samenvattend: <u>Als $(X, \mathcal{O}_X)$ een kompakt schema is, en $\mathcal{M}$ een inverteerbaar en $\mathcal{N}$ een quasi-coherent $\mathcal{O}_X$-moduul is, en als $\mu \in \mathcal{M}(X)$ en</u>

$$X_\mu := \{x \in X | \mu(x) \neq 0\} \ ,$$

<u>als we verder noteren</u>:

$$A := \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}^{\otimes n}(X) \quad ; \quad N := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{N} \otimes \mathcal{M}^{\otimes n}(X)$$

<u>dan bestaat er een kanoniek isomorphisme</u>

$$\theta : \mathcal{N}(X_\mu) \xrightarrow{\sim} N_{(\mu)} .$$

<u>Bewijs van propositie 5.69</u>:

Als S_+ wordt voortgebracht door $s_1, \ldots, s_t \in S_1$, dan is

$$X = \bigcup_{i=1}^{t} D_+(s_i)$$

en dus is X een kompakt schema. β werd bepaald door de morphismen (als $s \in S_d$, $d > 0$)

$$\beta(D_+(s)) : \Gamma_*(\mathcal{N})_{(s)} \longrightarrow \mathcal{N}(D_+(s))$$

die we als volgt verkregen: Kies

$$\frac{z}{s^n} \in \Gamma_*(\mathcal{N})_{(s)} .$$

Dan is $z \in \Gamma_*(\mathcal{N})_{nd} = \mathcal{N}(nd)(X)$. Ook is

$$\frac{1}{s^n} \in S(-nd)_{(s)} = \mathcal{O}_X(-nd)(D_+(s))$$

zodat we hebben:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} [\mathcal{N}(nd) \otimes \mathcal{O}_X(-nd)](D_+(s)) & \longrightarrow & \mathcal{N}(D_+(s)) \\ (z|D_+(s)) \otimes \frac{1}{s^n} & \longmapsto & \beta(D_+(s))(\frac{z}{s^n}) \end{array} \right.$$

(Per definitie van $\beta(D_+(s))$). Merk voorts op dat de struktuur van gegradeerd S-moduul van $\Gamma_*(\mathcal{N})$ wordt geïnduceerd door het kanonieke morphisme van gegradeerde ringen

$$\alpha : S \longrightarrow \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$$

(Cf. Opm. (5.63)). Ook geldt:

$$D_+(s) = \{x \in X | \alpha(s)(x) \neq 0\} .$$

(Cf. Opm. (5.65)), zodat we $\beta(D_+(s))$ kunnen opvatten als een morphisme

$$\Gamma_*(\mathcal{N})_{(\alpha(s))} \longrightarrow (X_{\alpha(s)}) .$$

We laten nu zien dat dit morphisme overéénkomt met het in opm. (5.75) gedefinieerde isomorphisme

$$\theta^{-1} : \Gamma_*(\mathcal{N})_{(\alpha(s))} \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}(X_{\alpha(s)}) .$$

Kies namelijk: $z' := \beta(D_+(s))(\frac{z}{s^n}) \in \mathcal{N}(D_+(s))$. Dan is

$$z | D_+(s) = z' \otimes s^n$$

zoals eenvoudig is te controleren. z is dus een globale snede van $\mathcal{N}(nd)(X)$ die een voortzetting is van

$$z' \otimes s^n \in \mathcal{N}(nd)(D_+(s)) .$$

Dan is per definitie

$$\theta(z') = \frac{z}{s^n}$$

waarmee alles bewezen is.

<u>Gevolg (5.76)</u>: <u>Zij</u> S <u>een gegradeerde ring, waarbij</u> S_+ <u>door eindig veel elementen van</u> S_1 <u>wordt voortgebracht. Zij</u> M <u>een gegradeerd S-moduul. Het door het in</u> Opm. (5.62) <u>gedefinieerde morphisme van gegradeerde S-modulen</u>

$$\alpha : M \longrightarrow \Gamma_*(\tilde{M})$$

geïnduceerde $\mathcal{O}_X$-moduul-morphisme (als $(X, \mathcal{O}_X) = \mathrm{Proj}(S)$)

$$\tilde{\alpha} : \tilde{M} \longrightarrow \widetilde{\Gamma_*(\tilde{M})}$$

is dan een isomorphisme.

Bewijs: Een direkt gevolg van lemma (5.68) en propositie (5.69).

Opmerking 5.77: Zij S een gegradeerde ring, zodat S_+ wordt voortgebracht door S_1. Noteer: $(X, \mathcal{O}_X) = \mathrm{Proj}(S)$. Laten M en N twee gegradeerde S-modulen zijn, zodat $\tilde{N}$ een sub- $\mathcal{O}_X$-moduul is van $\tilde{M}$. We hebben dan een $\mathcal{O}_X$-moduul-morphisme

$$\Phi : \tilde{N} \longrightarrow \tilde{M}$$

dat injectief is in de staken. Als $s \in S_1$, dan hebben we isomorphismen van $S_{(s)}$-modulen

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_s : N(n)_{(s)} \xrightarrow{\sim} N_{(s)} \\ \qquad\quad \dfrac{\nu}{s^t} \longmapsto \dfrac{\nu}{s^{t+n}} \end{array} \right.$$

en analoog:

$$\theta'_s : M(n)_{(s)} \xrightarrow{\sim} M_{(s)} \; .$$

Beschouw nu voor $n \in \mathbb{Z}$ het morphisme

$$\Gamma_*(\tilde{N})_n = \tilde{N} \otimes \widetilde{S(n)}(X) \xrightarrow[(\Phi \otimes 1)(X)]{} \tilde{M} \otimes \widetilde{S(n)}(X) = \Gamma_*(\tilde{M})_n$$

Omdat

$$X = \bigcup_{s \in S_1} D_+(s)$$

is $(\Phi\otimes 1)(X)$ injectief als voor elke $s \in S_1$ geldt dat $(\Phi\otimes 1)(D_+(s))$ injectief is. Kies een $s \in S_1$ en beschouw het diagram

$$\begin{array}{ccccccc} N(n)_{(s)} & = & \widetilde{N}\otimes\widetilde{S(n)}(D_+(s)) & \xrightarrow{(\Phi\otimes 1)(D_+(s))} & \widetilde{M}\otimes\widetilde{S(n)}(D_+(s)) & = & M(n)_{(s)} \\ {\scriptstyle\theta_s}\downarrow\wr & & & & & & \wr\downarrow{\scriptstyle\theta'_s} \\ N_{(s)} & = & \widetilde{N}(D_+(s)) & \xrightarrow{\Phi(D_+(s))} & \widetilde{M}(D_+(s)) & = & M_{(s)} \end{array}$$

Dit diagram commuteert en $\Phi(D_+(s))$ is injectief, zodat ook $(\Phi\otimes 1)(D_+(s))$ injectief is. Derhalve is voor elke $n \in \mathbb{Z}$

$$(\Phi\otimes 1)(X):\ \Gamma_*(\widetilde{N})_n \longrightarrow \Gamma_*(\widetilde{M})_n$$

injectief, zodat $\Gamma_*(\widetilde{N})$ op natuurlijke manier een gegradeerd sub-moduul is van $\Gamma_*(\widetilde{M})$.

Neem nu bovendien aan dat S_+ door eindig veel elementen van S_1 wordt voortgebracht en zij $\mathcal{N}$ een quasi-coherent sub-$\mathcal{O}_X$-moduul van $\widetilde{M}$. Dan is volgens prop. (5.69)

$$\mathcal{N} \simeq \widetilde{\Gamma_*(\mathcal{N})}$$

zodat volgens het voorgaande $\Gamma_*(\mathcal{N})$ op kanonieke manier een gegradeerd sub-S-moduul is van $\Gamma_*(\widetilde{M})$, waarbij de injectie

$$\Gamma_*(\mathcal{N}) \hookrightarrow \Gamma_*(\widetilde{M})$$

gegeven wordt door

$$\Gamma_*(\mathcal{N})_n = \mathcal{N}\otimes\widetilde{S(n)}(X) \xrightarrow{(\Phi\otimes 1)(X)} \widetilde{M}\otimes\widetilde{S(n)}(X) = \Gamma_*(\widetilde{M})_n$$

als in dit geval Φ de inbedding $\mathcal{N} \longrightarrow \widetilde{M}$ is.

Propositie 5.78: *Zij S een gegradeerde ring, zodat S_+ wordt voortgebracht door eindig veel elementen van S_1. Zij $(X,\mathcal{O}_X) = \mathrm{Proj}(S)$*

<u>en</u> M <u>een gegradeerd S-moduul, terwijl</u> $\mathcal{N}$ <u>een quasi-coherent sub-</u>$\mathcal{O}_X$<u>-moduul van</u> $\tilde{M}$ <u>is, en</u>

$$N := \alpha^{-1}(\Gamma_*(\mathcal{N})) \ .$$

<u>Dan is er een kanoniek isomorphisme</u>

$$\tilde{N} \simeq \mathcal{N} \ .$$

<u>Bewijs</u>: Beschouw het kanonieke morphisme

$$\alpha\colon M \longrightarrow \Gamma_*(\tilde{M})$$

en het geïnduceerde isomorphisme

$$\tilde{\alpha}\colon \tilde{M} \xrightarrow[\sim]{} \widetilde{\Gamma_*(\tilde{M})} \ .$$

Omdat de functor $M \longrightarrow \tilde{M}$ exakt is, geldt:

$$\widetilde{\alpha(M)} = \widetilde{\mathrm{Im}(\alpha)} = \mathrm{Im}(\tilde{\alpha}) = \widetilde{\Gamma_*(\tilde{M})} \simeq \tilde{M} \ .$$

Kies nu

$$\mathcal{Q} := \alpha(M) \cap \Gamma_*(\mathcal{N}) \ .$$

Ga na dat hieruit volgt:

$$\tilde{\mathcal{Q}} = \widetilde{\alpha(M)} \cap \widetilde{\Gamma_*(\mathcal{N})}$$

zodat

$$\tilde{\mathcal{Q}} = \widetilde{\Gamma_*(\mathcal{N})} \simeq \mathcal{N}$$

verder geldt ook:

$$\tilde{N} \simeq \widetilde{\alpha(N)} = \tilde{\mathcal{Q}} \simeq \mathcal{N}.$$

<ins>N.B.</ins>: Merk op, dat als $i: N \hookrightarrow M$ de inbedding van N in M is, het diagram

$$\begin{tikzcd} \tilde{N} \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, hook, "\tilde{i}"'] & & \mathcal{N} \arrow[dl, hook'] \\ & \tilde{M} & \end{tikzcd}$$

commuteert.

<ins>Definitie 5.79</ins>: Zij $(X,\mathcal{O}_X)$ een geringde ruimte. Een <ins>$\mathcal{O}_X$-ideaal</ins> is een sub-$\mathcal{O}_X$-moduul van $\mathcal{O}_X$.

<ins>Opmerking 5.80</ins>: Zij $(X,\mathcal{O}_X)$ een preschema en $\mathcal{J}$ een quasi-coherent $\mathcal{O}_X$-ideaal. Noteer:

$$Y := \{x \in X \mid \mathcal{O}_X/\mathcal{J}\,(x) \neq 0\}\ .$$

(i) <ins>Dan is</ins> Y <ins>een gesloten deelverzameling van</ins> X.

<ins>Bew.(i)</ins>: Kies een open affiene deelverzameling U van X. Zeg: U = Spec(A). Dan is

$$\mathcal{J}|U = \tilde{\underline{i}}$$

voor een zeker ideaal $\underline{i} \subset A$, en voor elke $x_{\underline{p}} \in U$ ($\underline{p} \subset A$) geldt:

$$\mathcal{O}_X/\mathcal{J}\,(x) = \mathcal{O}_X(x)/\mathcal{J}(x) = A_{\underline{p}}/\underline{i}_{\underline{p}}$$

Dus hebben we:

$$x_{\underline{p}} \in Y \cap U \iff \underline{i}_{\underline{p}} \neq A_{\underline{p}} \iff \underline{i} \subset \underline{p}$$

(Ga na). Met andere woorden:

$$Y \cap U = V(\underline{i})$$

en is dus gesloten in U. Omdat we een open affiene overdekking (U) van X kunnen kiezen is Y gesloten in X.

(ii) <u>Als</u> $Y \xhookrightarrow[i]{} X$ <u>de</u> <u>inbedding</u> <u>van</u> Y <u>in</u> X <u>is</u>, <u>en</u> <u>als</u>

$$\mathcal{O}_Y := i^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$$

<u>dan</u> <u>is</u> $(Y, \mathcal{O}_Y)$ <u>een</u> <u>gesloten</u> <u>deel-preschema</u> <u>van</u> $(X, \mathcal{O}_X)$.

<u>Bew.(ii)</u>: Kies U open, affien in X. Zeg: U = Spec(A). Dan is

$$V := U \cap Y = V(\underline{i}) = \mathrm{Spec}(A/\underline{i})$$

als $\mathcal{I}|U = \tilde{\underline{i}}$. Zij $\mathcal{O}_V$ de struktuurschoof van $\mathrm{Spec}(A/\underline{i})$. Dan is er een kanoniek morphisme van affiene schema's

$$(V, \mathcal{O}_V) \xrightarrow[(\phi,\Phi)]{} (U, \mathcal{O}_X|U)$$

dat geïnduceerd wordt door het kanonieke ring-morphisme

$$A \longrightarrow A/\underline{i}\ .$$

Ga na dat we een factorisatie

$$\begin{tikzcd}
(V, \mathcal{O}_V) \arrow[rr, "(\phi,\Phi)"'] \arrow[dr, dashed, "(\psi,\Psi)"'] & & (U, \mathcal{O}_X|U) \\
& (U, \mathcal{O}_X/\mathcal{I}|U) \arrow[ur, "\text{kan.}"'] &
\end{tikzcd}$$

hebben, waarbij $\psi = i|V$. Dan hebben we een door Ψ geïnduceerd morphisme

$$\Psi^*: \psi^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}) \longrightarrow \mathcal{O}_V\ .$$

Staaksgewijs wordt dit morphisme gegeven door:

$$\psi^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{F})(y_{\underline{p}}) \simeq \mathcal{O}_X/\mathcal{F}(y_{\underline{p}}) = A_{\underline{p}}/\underline{i}_{\underline{p}} \simeq (A/\underline{i})_{\underline{p}} = \mathcal{O}_V(y_{\underline{p}})$$

(waarbij $\underline{p}$ een priemideaal van A is, en $y_{\underline{p}} \in V$, (dus $\underline{i} \subset \underline{p}$)). Derhalve vinden we:

$$\begin{aligned} \mathrm{Spec}(A/\underline{i}) &= (V, \mathcal{O}_V) \simeq (V, \psi^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{F})) = (V, i^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{F})|V) = \\ &= (V, \mathcal{O}_Y|V) \end{aligned}$$

waarmee de opmerking (ii) bewezen is.

Definitie 5.81: Het in voorgaande opmerking geconstrueerde gesloten deelpreschema $(Y, \mathcal{O}_Y)$ van $(X, \mathcal{O}_X)$ heet het door $\mathcal{F}$ geïnduceerde deelpreschema van $(X, \mathcal{O}_X)$.

Propositie 5.82: Zij S een gegradeerde ring, zodat S_+ wordt voortgebracht door eindig veel elementen uit S_1. Dan bestaat er bij ieder quasi-coherent $\mathcal{O}_X$-ideaal $\mathcal{F}$ een gegradeerd S-ideaal $\underline{i}$, zodat het door $\mathcal{F}$ geïnduceerde deelpreschema $(Y, \mathcal{O}_Y)$ van $(X, \mathcal{O}_X)$ isomorf is met $\mathrm{Proj}(S/\underline{i})$, terwijl, als

$$\pi: S \longrightarrow S/\underline{i}$$

het kanonieke morphisme is, het diagram

$$\begin{tikzcd} (Y, \mathcal{O}_Y) \arrow[r, hook, "\text{kan.}"] \arrow[d, "\wr"] & (X, \mathcal{O}_X) \arrow[d, equal] \\ \mathrm{Proj}(S/\underline{i}) \arrow[r, hook, "\mathrm{Proj}(\pi)"'] & \mathrm{Proj}(S) \end{tikzcd}$$

commuteert.

<u>Bewijs</u>: Merk allereerst op dat $\mathrm{Proj}(\pi)$ op $\mathrm{Proj}(S/\underline{i})$ gedefinieerd is (Prop. (5.39)). Beschouw voorts het in opm. (5.63) gedefinieerde kanonieke morphisme van gegradeerde ringen

$$\alpha\colon S \longrightarrow \Gamma_*(\mathcal{O}_X) .$$

Dan is volgens prop. (5.78), als

$$\underline{i} := \alpha^{-1}\,\Gamma_*(\mathcal{J}) ,$$

$$\tilde{\underline{i}} \simeq \mathcal{J}$$

terwijl met dit isomorphisme het diagram

$$\begin{tikzcd} \tilde{\underline{i}} \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, hook, "\text{kan.}"'] & & \mathcal{J} \arrow[dl, hook', "\text{kan.}"] \\ & \mathcal{O}_X & \end{tikzcd}$$

commuteert. Dan is uiteraard het door $\tilde{\underline{i}}$ geïnduceerde deelpreschema X' van X isomorf met Y, terwijl het diagram

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, hook] & & Y \arrow[dl, hook'] \\ & X & \end{tikzcd}$$

commuteert. Nu is, als $s \in S_d$ $(d > 0)$, X' lokaal bepaald door:

$$(X' \cap D_+(s), \mathcal{O}_{X'}|X' \cap D_+(s)) \simeq \mathrm{Spec}(A/\underline{j})$$

waarbij

$$A = \mathcal{O}_X(D_+(s)) = S_{(s)}$$

en

$$\tilde{\underline{j}} = \tilde{\underline{i}} | D_+(s)$$

zodat

$$\underline{j} = \underline{i}_{(s)} \ .$$

Nu is voor elk tweetal homogene elementen s en t uit S_+ het diagram

$$\begin{tikzcd}
(S/\underline{i})_{(\bar{s})} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & S_{(s)} \arrow[d] & \underline{i}_{(s)} \\
(S/\underline{i})_{(\overline{st})} \arrow[r, "\sim"] & S_{(st)} & \underline{i}_{(st)}
\end{tikzcd}$$

commutatief, zodat Proj(S') = X', waaruit de propositie volgt.

<u>Opmerking 5.83</u> Zij nu $(Y, \mathcal{O}_Y)$ een preschema, en zij $\mathcal{S}$ een gegradeerde $\mathcal{O}_Y$-algebra, gegeven door

$$\begin{cases} \Phi : \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{S} \\ \mathcal{S} = \sum\limits_{n \geq 0} \mathcal{S}_n \end{cases}$$

Neem bovendien aan dat $\mathcal{S}$ quasi-coherent is. Dan zijn ook alle homogene componenten $\mathcal{S}_n$ quasi-coherent. Kies nu een open affiene deelverzameling U van Y en definieer:

$$A := \mathcal{O}_Y(U) \ ; \ S := \mathcal{S}(U) \ ; \ S_n := \mathcal{S}_n(U) \quad (n \geq 0) \ .$$

Dan volgt met behulp van stelling (4.33):

$$\mathcal{S}|U = \tilde{S} \quad ; \quad \mathcal{S}_n|U = \tilde{S}_n$$

en wegens

$$\tilde{S} = \mathcal{S}|U = (\sum \mathcal{S}_n|U) = \sum(\mathcal{S}_n|U) = \sum \tilde{S}_n = \widetilde{\sum S_n}$$

vinden we:

$$S = \sum_{n\geq 0} S_n \ .$$

Ook is S een gegradeerde A-algebra, waarbij deze algebra-struktuur wordt gegeven door

$$\begin{cases} A \longrightarrow S \\ a \longmapsto \Phi(U)(a) \end{cases}$$

Noteer nu:

$$X_U := \mathrm{Proj}(S) \ .$$

We kunnen zo aan elke open affiene deelverzameling U van Y een schema X_U toevoegen. Beschouw nog een tweede open affiene deelverzameling V van Y met $V \subset U$, en definieer weer:

$$B := \mathcal{O}_Y(V) \ ; \ T := \mathcal{S}(V) \ ; \ T_n := \mathcal{S}_n(V) \quad (n \geq 0)$$

Volgens stelling (4.33) is het morphisme

$$\begin{cases} S \otimes_A B \longrightarrow T \\ \sum_i^{<\infty} s_i \otimes b_i \longmapsto \sum_i^{<\infty} b_i.(s_i|V) \end{cases}$$

een isomorphisme, zodat

$$S \otimes_A B \simeq T \ .$$

We hebben nu de volgende situatie verkregen: A en B zijn twee ringen met een ring-morphisme

$$A = \mathcal{O}_Y(U) \xrightarrow{\text{restr.}} \mathcal{O}_Y(V) = B \ .$$

Voorts hebben we een gegradeerde A-algebra S. Volgens prop. (5.32) geldt dan:

$$\mathrm{Proj}(S\otimes_A B) = \mathrm{Proj}(S)\prod_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(B) = X_U \Pi_U V \ .$$

In diagram-vorm heeft dit gevezeld produkt de gedaante

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Proj}(S\otimes_A B) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Proj}(S) \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(B) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(A) \end{tikzcd}$$

De bovenste horizontale pijl wordt geïnduceerd door het morphisme van gegradeerde ringen

$$\begin{cases} S \xrightarrow{\phi} S\otimes_A B \\ s \longmapsto s\otimes 1 \end{cases}$$

De B-algebra-struktuur op T werd gegeven door:

$$\begin{cases} B \longrightarrow T \\ b \longmapsto \Phi(V)(b) \end{cases}$$

en de B-algebra-struktuur op $S\otimes_A B$ door

$$\begin{cases} B \longrightarrow S\otimes_A B \\ b \longmapsto 1\otimes b \end{cases}$$

Omdat het diagram

$$
\begin{tikzcd}
S\otimes_A B \arrow[dd, "\wr"'] & \\
 & B \arrow[ul] \arrow[dl] \\
T &
\end{tikzcd}
$$

commuteert (N1: $1\otimes b \longmapsto b.(1|V) = \Phi(V)(b)$) hebben we het gevezelde produkt

$$
\begin{tikzcd}
X_V = \mathrm{Proj}(T) \arrow[r, "(\sigma_{V,U},\Sigma_{V,U})"] \arrow[d, "(f_V,F_V)"] & \mathrm{Proj}(S) = X_U \arrow[d, "(f_U,F_U)"] \\
V = \mathrm{Spec}(B) \arrow[r, "\text{kan.}"'] & \mathrm{Spec}(A) = U
\end{tikzcd}
\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)
$$

waarbij de bovenste pijl geïnduceerd wordt door

$$
\left\{
\begin{array}{l}
S \xrightarrow{\phi} S\otimes_A B \longrightarrow T \\[1em]
s \longmapsto s\otimes 1 \longmapsto s|V
\end{array}
\right.
$$

dus door de restrictie

$$S = \mathcal{S}(U) \longrightarrow \mathcal{S}(V) = T .$$

Laat nu V' een derde open affiene deelverzameling zijn van Y, zodat

$$V' \subset V \subset U$$

Noteer:

$$B' := \mathcal{O}_Y(V') \quad ; \quad T' := \mathcal{S}(V') .$$

We hebben dan het volgende diagram:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Proj}(T') \arrow[r] \arrow[d] \arrow[rr, bend left] & \mathrm{Proj}(T) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Proj}(S) \arrow[d] \\
\mathrm{Spec}(B') \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & \mathrm{Spec}(B) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(A)
\end{tikzcd}$$ ....(ii)

Dit diagram commuteert, omdat alle horizontale pijlen geïnduceerd worden door restrictie-morphismen in de schoven $\mathcal{S}$ resp. $\mathcal{O}_Y$. (Cf. diagram (i)).

Beschouw nog eens diagram (i). V is een open deelverzameling van U, zodat we het door Proj(S) geïnduceerde preschema

$$f_U^{-1}(V) = (f_V^{-1}(V), \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}(S)}|f_U^{-1}(V))$$

kunnen beschouwen. We hebben dan een gevezeld produkt

$$\begin{tikzcd}
f_U^{-1}(V) \arrow[r, hook, "\text{kan.}"] \arrow[d, "{(f_U,F_U)}"'] & \mathrm{Proj}(S) \arrow[d, "{(f_U,F_U)}"] \\
\mathrm{Spec}(B) \arrow[r, "\text{kan.}"] & \mathrm{Spec}(A)
\end{tikzcd}$$

(Hierbij is (f_U,F_U) het morphisme dat Proj(S) de struktuur geeft van een Spec(A)-schema. (Cf. prop. (5.25)). Wegens de uniciteit van het gevezeld produkt is er dan een isomorphisme

$$\mathrm{Proj}(T) \xrightarrow[(\tau_{V,U},T_{V,U})]{\sim} f_U^{-1}(V)$$

dat Proj(T) identificeert met een open deelpreschema van Proj(S), waarbij het diagram

$$\begin{tikzcd}
 & f_U^{-1}(V) \arrow[dr, "\text{kan.}"] & \\
\mathrm{Proj}(T) \arrow[ur, "{(\tau_{V,U},T_{V,U})}", "\sim"'] \arrow[rr, "{(\sigma_{V,U},\Sigma_{V,U})}"'] & & \mathrm{Proj}(S)
\end{tikzcd}$$ ....(iii)

commuteert. ($(\sigma_{V,U},\Sigma_{V,U})$ is dus een open immersie). Ook geldt, zoals we al hadden gezien:

$$(\sigma_{V,U},\Sigma_{V,U})\circ(\sigma_{V',V},\Sigma_{V',V}) = (\sigma_{V',U},\Sigma_{V',U}) \ .$$

Propositie 5.84: Zij $(Y,\mathcal{O}_Y)$ een preschema. Dan bestaat er voor elke quasi-coherente gegradeerde $\mathcal{O}_Y$-algebra (met positieve gradering) $\mathcal{S}$ een Y-preschema $(X,\mathcal{O}_X)$, dat op een Y-isomorphisme na uniek bepaald is, met de volgende eigenschap: Als

$$(f,F)\colon (X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y,\mathcal{O}_Y)$$

het struktuur-morphisme is dat de Y-struktuur op X bepaalt, dan bestaat er voor iedere open affiene deelverzameling U van Y een isomorphisme

$$(f^{-1}U,\mathcal{O}_X|f^{-1}U) \xrightarrow[(\gamma_U,\Gamma_U)]{\sim} \mathrm{Proj}(\mathcal{S}(U))$$

zodat, indien V een twee open affiene deelverzameling is van Y met $V\subset U$, het diagram

$$\begin{array}{ccc}
f^{-1}U & \xrightarrow[(\gamma_U,\Gamma_U)]{\sim} & \mathrm{Proj}(\mathcal{S}(U)) \\
{\scriptstyle \text{kan.}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle (\sigma_{V,U},\Sigma_{V,U})} \\
f^{-1}V & \xrightarrow[(\gamma_V,\Gamma_V)]{\sim} & \mathrm{Proj}(\mathcal{S}(V))
\end{array}$$

commuteert. (Voor de definitie van de rechterpijl, zie opm. (5.83)).

Bewijs: Het gevraagde preschema $(X,\mathcal{O}_X)$ verkrijgen we door de schema's $X_U := \mathrm{Proj}(\mathcal{S}(U))$ aan elkaar te plakken. Kies twee open affiene deelverzamelingen U en V van Y en definieer:

$$A := \mathcal{O}_Y(U) \; ; \; B := \mathcal{O}_Y(V) \; ; \; S := \mathcal{S}(U) \; ; \quad T := \mathcal{S}(V) \; .$$

We hebben dan de morphismen

$$\begin{array}{ccc} X_V = \mathrm{Proj}(T) & & X_U = \mathrm{Proj}(S) \\ \Big\downarrow (f_V, F_V) & ; & \Big\downarrow (f_U, F_U) \\ V \;=\; \mathrm{Spec}(B) & & U \;=\; \mathrm{Spec}(A) \end{array}$$

(Cf. prop. (5.25)). We construeren nu een isomorphisme tussen de geïnduceerde preschema's, gedefinieerd boven $U \cap V$:

$$f_U^{-1}(U \cap V) \xrightarrow{\sim} f_V^{-1}(U \cap V)$$

als volgt: Kies een open affiene deelverzameling $V' \subset V \cap U$ en definieer:

$$B' := \mathcal{O}_Y(V') \quad ; \quad T' := \mathcal{S}(V') \; .$$

Dan hebben we volgens opm. (5.83) (i), (iii) het commutatieve diagram

$$\begin{tikzcd} f_V^{-1}(V') \arrow[d, "(f_V{,}F_V)"'] & \mathrm{Proj}(T') \arrow[l, "\sim", "(\tau_{V',V}{,}T_{V',V})"'] \arrow[r, "\sim", "(\tau_{V',U}{,}T_{V',U})"'] \arrow[d, "(f_{V'}{,}F_{V'})"'] & f^{-1}(V') \arrow[d, "(f_U{,}F_U)"] \\ \mathrm{Spec}(B) & \mathrm{Spec}(B') \arrow[l, "\text{kan.}"'] \arrow[r, "\text{kan.}"'] & \mathrm{Spec}(A) \end{tikzcd}$$

zodat we kunnen definiëren:

$$(\tau_{V'}, T_{V'}) := (\tau_{V',V}, T_{V',V}) \circ (\tau_{V',U}, T_{V',U})^{-1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

Ook geldt, als $V'' \subset V' \subset V \cap U$, V'' affien en open, en als

$$B'' := \mathcal{O}_Y(V'') \quad ; \quad T'' := \mathcal{S}(V'')$$

dat het diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Proj}(T'') \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "(\sigma_{V'',V'},\Sigma_{V'',V'})"] & f_U^{-1}(V'') \arrow[r, "\text{kan.}"] \arrow[d, "\text{kan.}"] & \mathrm{Proj}(S) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Proj}(T') \arrow[r, "\sim"] & f_U^{-1}(V') \arrow[r, "\text{kan.}"'] & \mathrm{Proj}(S)
\end{tikzcd}$$

commuteert. (Vgl. opm. (5.83), (ii) en (iii)). Dus hebben we het commutatieve diagram

$$\begin{tikzcd}
f_V^{-1}(V'') \arrow[d, "\text{kan.}"'] & \mathrm{Proj}(T'') \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "(\sigma_{V'',V'},\Sigma_{V'',V'})"'] & f_U^{-1}(V'') \arrow[d, "\text{kan.}"'] \\
f_V^{-1}(V') & \mathrm{Proj}(T') \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"] & f_U^{-1}(V')
\end{tikzcd}$$

waaruit volgt:

$$(\tau_{V'},T_{V'})|f_U^{-1}(V'') = (\tau_{V''},T_{V''}) \qquad \text{................(ii)}$$

Overdek nu $U \cap V$ met open affiene deelverzamelingen V' van Y met $V' \subset U \cap V$. Voor elk zo'n V' hebben we dan volgens (i) een isomorphisme

$$(\tau_{V'},T_{V'}): f_U^{-1}(V') \xrightarrow{\sim} f_V^{-1}(V')$$

em (ii) garandeert, dat we deze isomorfismen kunnen "plakken" tot een isomorphisme

$$(t_{U,V},\theta_{U,V}): f_U^{-1}(U \cap V) \xrightarrow{\sim} f_V^{-1}(U \cap V)$$

Ook is direkt uit de definitie duidelijk dat

$$(t_{U,V},\theta_{U,V})^{-1} = (t_{V,U},\theta_{V,U}) \; .$$

(De eerste plakvoorwaarde). Zij nu W nog een open affiene deelverzameling van Y. We hebben dan een diagram

$$\begin{tikzcd} f_U^{-1}(U\cap V\cap W) \arrow[rr, "{(t_{U,V},\theta^W_{U,V})}"] \arrow[dr, "{(t_{U,W},\theta^V_{U,W})}"'] & & f_V^{-1}(U\cap V\cap W) \arrow[dl, "{(t_{V,W},\theta^U_{V,W})}"] \\ & f_W^{-1}(U\cap V\cap W) & \end{tikzcd}$$

De commutativiteit van dit diagram is de tweede plakvoorwaarde. (De morphismen

$$(t_{U,V},\theta^W_{U,V})$$

worden verkregen door $(t_{U,V},\theta_{U,V})$ te "beperken".) Deze commutativiteit kunnen we controleren op een open affiene deelverzameling $V'\subset U\cap V\cap W$. We moeten dan nagaan of het diagram

$$\begin{tikzcd} f_U^{-1}(V') \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\wr"'] & & f_V^{-1}(V') \arrow[dl, "\wr"] \\ & f_W^{-1}(V') & \end{tikzcd}$$

commuteert. D.w.z.: Er moet gelden:

$$[(\tau_{V',W},T_{V',W})\circ(\tau_{V',V},T_{V',V})^{-1}]\circ[(\tau_{V',V},T_{V',V})\circ(\tau_{V',U},T_{V',U})^{-1}] =$$

$$= [(\tau_{V',W},T_{V',W})\circ(\tau_{V',U},T_{V',U})^{-1}]$$

en dit is klaarblijkelijk het geval. We hebben dus een geplakt preschema $(X,\mathcal{O}_X)$ verkregen. Het struktuur-morphisme

$$\begin{tikzcd} (X,\mathcal{O}_X) \arrow[d, "{(f,F)}"] \\ (Y,\mathcal{O}_Y) \end{tikzcd}$$

verkrijgen we, door de morphismen

$$\begin{tikzcd} X_U = \mathrm{Proj}(S) \arrow[d, "{(f_U,F_U)}"] \\ U = \mathrm{Spec}(A) \end{tikzcd}$$

"aan elkaar te plakken". Dat dit mogelijk is, ziet men als volgt: Kies weer $V' \subset U \cap V$, V' open en affien. Noteer weer:

$$A := \mathcal{O}_Y(U) \;;\; B := \mathcal{O}_Y(V) \;;\; B' := \mathcal{O}_Y(V') \;;\; S := \mathcal{S}(U) \;;\; T := \mathcal{S}(V) \;;$$

$$T' := \mathcal{S}(V') \;.$$

We moeten laten zien dat het diagram

$$\begin{tikzcd} f_U^{-1}(V') \arrow[rr, "{(\tau_{V',V},T_{V',V})\circ(\tau_{V',U},T_{V',U})^{-1}}", "\sim"'] \arrow[dr, "{(f_U,F_U)}"'] & & f_V^{-1}(V) \arrow[dl, "{(f_V,F_V)}"] \\ & V' & \end{tikzcd}$$

commuteert. Volgens opm. (5.83) (i) commuteert het diagram

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Proj}(T) \arrow[d, "{(f_V,F_V)}"] & f_V^{-1}(V') \arrow[l, "\text{kan.}"'] & \mathrm{Proj}(T') \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "{(f_{V'},F_{V'})}"] & f_U^{-1}(V') \arrow[r, "\text{kan.}"] & \mathrm{Proj}(S) \arrow[d, "{(f_U,F_U)}"'] \\ V \arrow[rr, "\text{kan.}"'] & & V' \arrow[rr, "\text{kan.}"'] & & U \end{tikzcd}$$

waaruit het te bewijzene volgt.

Hiermee is $(X, \mathcal{O}_X)$ van de gewenste $(Y, \mathcal{O}_Y)$-struktuur voorzien. We moeten nu nog de eigenschap uit de propositie bewijzen. Kies hiertoe wederom twee open affiene deelverzamelingen U en V van Y en zij

$$A := \mathcal{O}_Y(U) \ ; \ B := \mathcal{O}_Y(V) \ ; \ S := \mathcal{S}(U) \ ; \ T := \mathcal{S}(V) \ .$$

We kunnen aannemen dat $f_U^{-1}(U) = f^{-1}(U)$. Dan commuteert het diagram

$$\begin{array}{ccc} f_U^{-1}(V) & \xrightarrow[\sim]{(\tau_{V,U},T_{V,U})^{-1}} & \mathrm{Proj}(T) \\ \Big\downarrow \text{kan.} & & \Big\downarrow (\sigma_{V,U},\Sigma_{V,U}) \\ f_U^{-1}(U) & \xrightarrow[\text{id.}]{} & \mathrm{Proj}(S) \end{array}$$

Op deze wijze vinden we - na identificatie - de commutatieve diagrammen

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(V) & \xrightarrow[(\gamma_V,\Gamma_V)]{\sim} & \mathrm{Proj}(T) \\ \text{kan.}\Big\downarrow & & \Big\downarrow (\sigma_{V,U},\Sigma_{V,U}) \\ f^{-1}(U) & \xrightarrow[(\gamma_U,\Gamma_U)]{\sim} & \mathrm{Proj}(S) \end{array}$$

Men ga zelf na dat het aan de eisen van propositie (5.84) voldoende preschema $(X, \mathcal{O}_X)$ op een Y-isomorphisme na uniek bepaald is.

<u>Definitie 5.85</u>: Het in de vorige propositie bepaalde Y-preschema

$$(X,\mathcal{O}_X) \xrightarrow[(f,F)]{} (Y,\mathcal{O}_Y)$$

noteren we met Proj(S). Proj(S) heet <u>het homogene spectrum van de quasi-coherente positief gegradeerde $\mathcal{O}_Y$-algebra $\mathcal{S}$</u>.

<u>Opmerking 5.86</u>: Zij (ϕ,Φ): $X \longrightarrow Y$ een morphisme van preschema's. Kies een open affiene overdekking $(V_i)_i$ van Y. Neem aan dat elke $\phi^{-1}(V_i)$ te overdekken is met een eindig aantal open affiene deelverzamelingen

$$\phi^{-1}(V_i) = U_{i,1} \cup \ldots \cup U_{i,n_i} .$$

(ϕ,Φ) induceert dan morphismen

$$U_{ij} \longrightarrow V_j \; .$$

Deze induceren op hun beurt weer ring-morphismen

$$\mathcal{O}_X(U_{ij}) \longleftarrow \mathcal{O}_Y(V_j)$$

zodat elke $\mathcal{O}_X(U_{ij})$ op kanonieke manier een $\mathcal{O}_Y(V_j)$-algebra is.

Definitie 5.87: Zij (ϕ,Φ): $X \longrightarrow Y$ een morphisme van preschema's. Zij V een open affiene deelverzameling van Y. Laat $\phi^{-1}(V)$ een eindige overdekking hebben van open affiene stukken U_i $(i = 1,\dots,n)$, zodat elke $\mathcal{O}_X(U_i)$ een $\mathcal{O}_Y(V)$-algebra is van eindig type. Dan zeggen we dat V voldoet aan de eigenschap (P).

Definitie 5.88: Zij (ϕ,Φ): $X \longrightarrow Y$ een morphisme van preschema's. Als er een open affiene overdekking $(V_\alpha)_\alpha$ van Y bestaat zodat elke V_α voldoet aan de eigenschap (P) dat heet (ϕ,Φ) een morphisme van eindig type.

Definitie 5.89: In de omstandigheden van de voorgaande definitie heet X een Y-preschema van eindig type.

Lemma 5.90: Zij (ϕ,Φ): $(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y,\mathcal{O}_Y)$ een morphisme van preschema's. Zij W een open affiene deelverzameling van Y. (Zeg: $W = \mathrm{Spec}(B)$). Zij verder $b \in B$, en beschouw $D(b) \subset W$. Dan heeft $D(b)$ de eigenschap (P) als W aan (P) voldoet.

Bewijs: We kunnen $\phi^{-1}W$ met eindig veel open affiene deelverzamelingen U_j van X overdekken, zodat elke $\mathcal{O}_X(U_j)$ een $\mathcal{O}_Y(W)$-algebra is van eindig type. (ϕ,Φ) induceert voor elke j het morphisme

$$(U_j, \mathcal{O}_X|U_j) \longrightarrow (W, \mathcal{O}_Y|W) \; .$$

Hiermee correspondeert het ring-morphisme

$$\mathcal{O}_X(U_j) \xleftarrow{f_j} \mathcal{O}_Y(W) = B$$

dat op $\mathcal{O}_X(U_j)$ de B-algebra-struktuur geeft. Kies nu $b \in B$. Dan is $D(b) \subset W$, en er geldt, zoals gemakkelijk is na te gaan:

$$\phi^{-1}(D(b)) \cap U_j = D(f_j b)$$

Het commutatieve diagram

$$\begin{tikzcd} U_j \arrow[r] & W \\ D(f_j b) \arrow[u, hook] \arrow[r] & D(b) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

induceert een commutatief diagram van ringen

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X(U_j) \arrow[d] & B \arrow[l, "f_j"'] \arrow[d] \\ (\mathcal{O}_X(U_j))_{f_j b} & B_b \arrow[l, "f_j'"'] \end{tikzcd}$$

waarbij f_j' gegeven is door

$$f_j'\left(\frac{c}{b^n}\right) = \frac{f_j(c)}{f_j(b)^n} .$$

Ook is f_j' het ring-morphisme dat op $\mathcal{O}_X(D(f_j b))$ de $\mathcal{O}_Y(D(b))$-algebra-struktuur induceert. Nu is

$$(\mathcal{O}_X(U_j))_{f_j b} = (\mathcal{O}_X(U_j))\left[\frac{1}{f_j b}\right]$$

$\mathcal{O}_X(U_j)$ is een B-algebra van eindig type, dus ook is

$$(\mathcal{O}_X(U_j))\left[\frac{1}{f_j b}\right]$$

een B-algebra van eindig type is, en dus zeker van eindig type als algebra over B_b.

Propositie 5.91: Zij (ϕ,Φ): $X \longrightarrow Y$ een morphisme van eindig type. Dan heeft elke open affiene deelverzameling W van Y de eigenschap (P).

Bewijs: Er bestaat een open affiene overdekking $(V_\alpha)_\alpha$ van Y, zodat elke V_α voldoet aan de eigenschap (P). Zij nu W een open affiene deelverzameling van Y. Omdat W kompakt is, kunnen we W overdekken met een eindig aantal deelverzamelingen van het type $D(b_i)$, waarbij voor elke i b_i een element is uit één der ringen $\mathcal{O}_Y(V_\alpha)$. Omdat ook elke $D(b_i)$ kompakt is, en bevat in W, kunnen we voor elke i een eindig aantal deelverzamelingen $D(b_{ij})$ vinden, met $b_{ij} \in \mathcal{O}_Y(W)$, zodat

$$D(b_i) = \bigcup_j^{<\infty} D(b_{ij}) \ .$$

Omdat het restrictie-morphisme

$$f_i : \mathcal{O}_Y(W) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(D(b_i))$$

geïnduceerd wordt door $D(b_i) \hookrightarrow W$, en ook geldt: $D(b_{ij}) \subset D(b_i)$, volgt:

$$D(b_{ij}) = D(f_i b_{ij}) \ .$$

Omdat $D(f_i b_{ij}) \subset D(b_i) \subset V_\alpha$ voor een zekere α, met $b_i \in \mathcal{O}_Y(V_\alpha)$ is er een $c_{ij} \in \mathcal{O}_Y(V_\alpha)$ zodat $D(f_i b_{ij}) = D(c_{ij})$. Volgens het voorgaande lemma volgt dan dat

$$D(b_{ij}) = D(f_i b_{ij}) = D(c_{ij})$$

voldoet aan de eigenschap (P). Omdat

$$W = \bigcup_{i,j}^{<\infty} D(b_{ij})$$

en elke $\phi^{-1}(D(b_{ij}))$ de eindige vereninging is van open affiene stukken $(U_{ijk})_k$ van X, zodat $\mathcal{O}_X(U_{ijk})$ een $\mathcal{O}_Y(D(b_{ij}))$-algebra is van eindig type, en omdat

$$\mathcal{O}_Y(D(b_{ij})) = (\mathcal{O}_Y(W))[\frac{1}{b_{ij}}] ,$$

is elke $\mathcal{O}_X(U_{ijk})$ een $\mathcal{O}_Y(W)$-algebra van eindig type.

Propositie 5.92: Zij (ϕ,Φ): $X \longrightarrow Y$ een morphisme van affiene schema's met $X = \mathrm{Spec}(A)$ en $Y = \mathrm{Spec}(B)$. (ϕ,Φ) induceert dan een ring-morphisme $f: B \longrightarrow A$. Er geldt: (ϕ,Φ) is van eindig type dan en slechts dan als A een B-algebra is van eindig type.

Bewijs (i): Zij A een B-algebra van eindig type. (Met de algebra-struktuur, geïnduceerd door f). Dan kunnen we Y overdekken met (Y), en, omdat Y voldoet aan eigenschap (P), zijn we klaar.

Bewijs (ii): Zij nu (ϕ,Φ) van eindig type. Omdat Y affien is, kunnen we volgens de voorgaande propositie een eindige open affiene overdekking (U_i) van X vinden, zodat steeds $\mathcal{O}_X(U_i)$ een $\mathcal{O}_Y(Y)$-algebra is van eindig type. $(\mathcal{O}_Y(Y) = B)$. Elke U_i is kompakt. We kunnen dus elke U_i overdekken met eindig veel deelverzamelingen $(D(a_{ij}))_j$ met $a_{ij} \in A$. Het morphisme

$$U_i \hookrightarrow X$$

induceert een ring-morphisme

$$f_i: A \longrightarrow \mathcal{O}_X(U_i)$$

en er geldt, zoals men gemakkelijk nagaat,

$$A_{a_{ij}} = (\mathcal{O}_X(U_i))_{f_i a_{ij}} = (\mathcal{O}_X(U_i))[\frac{1}{f_i a_{ij}}]$$

waaruit volgt dat $A_{a_{ij}}$ een B-algebra is van eindig type. We kunnen dus X overdekken met eindig veel deelverzamelingen van het type $D(a_i)$, zodat A_{a_i} een B-algebra is van eindig type. Dat wil zeggen:

$$A_{a_i} = B\left[\frac{c_1^{(i)}}{\frac{n_1}{a_i}}, \ldots, \frac{c_{k(i)}^{(i)}}{\frac{n_{k(i)}}{a_i}}\right] \qquad \left(\frac{c_j^{(i)}}{\frac{n_j}{a_i}} \in A_{a_i}\right).$$

We kunnen ervoor zorgen dat $n_1 = \ldots = n_{k(i)}$, zodat

$$A_{a_i} = B\left[\frac{d_1^{(i)}}{\frac{N_i}{a_i}}, \ldots, \frac{d_{k(i)}^{(i)}}{\frac{N_i}{a_i}}\right] \qquad \left(\frac{d_j^{(i)}}{\frac{N_i}{a_i}} \in A_{a_i}\right).$$

Omdat er eindig veel indices i voorkomen kunnen we $N := \max(N_i)$ kiezen, en schrijven:

$$A_{a_i} = B\left[\frac{e_1^{(i)}}{a_i^N}, \ldots, \frac{e_{k(i)}^{(i)}}{a_i^N}\right] \qquad \left(\frac{e_j^{(i)}}{a_i^N} \in A_{a_i}\right).$$

Omdat $X = \bigcup D(a_i)$ kunnen we elementen $\alpha_i \in A$ vinden, zodat

$$1 = \sum_i \alpha_i a_i .$$

Beschouw nu:

$$F := \left[\bigcup_i \{e_1^{(i)}, \ldots, e_{k(i)}^{(i)}\}\right] \cup \{a_i\}_i \cup \{\alpha_i\}_i$$

en noteer: $A' := B[F]$. Dan is $A' = A$, want kies $a \in A$. Voor elke i hebben we dan:

$$\frac{a}{1} \in A_{a_i} = B\left[\frac{e_1^{(i)}}{a_i^N}, \ldots, \frac{e_{k(i)}^{(i)}}{a_i^N}\right]$$

dus bestaat er een $\beta_i \in A'$ zodat

$$\frac{a}{1} = \frac{\beta_i}{a_i^{M_i}} \qquad (M_i \in \mathbb{N}) .$$

Omdat er eindig veel indices i zijn, en bovendien elke $a_i \in F$, kunnen we een $M \in \mathbb{N}$ vinden, onafhankelijk van de keuze van i, benevens een $\beta_i' \in A'$, zodat

$$\frac{a}{1} = \frac{\beta_i'}{a_i^M} \in A_{a_i} .$$

Er bestaat dus een $m \in \mathbb{N}$, eveneens onafhankelijk van de keuze van i, zodat

$$\forall i.\ a_i^m\left[a a_i^M - \beta_i'\right] = 0 .$$

$$\therefore \quad \forall i. \quad a a_i^{M+m} \in A'$$

dus, als er t indices i zijn,

$$a\left(\sum_{i=1}^{t} \alpha_i a_i\right)^{(M+m)t} \in A'$$

zodat $a \in A'$. We hebben dus gevonden: $A = A'$.

Opmerking 5.93: Zij E een eigenschap van morphismen van preschema's. Beschouw de volgende uitspraken:

(i) Elke gesloten immersie voldoet aan E.

(ii) Als (f,F) en (g,G) aan E voldoen, dan ook $(f,F)\circ(g,G)$.

(iii) Als $(f,F)\colon X \longrightarrow X'$ en $(g,G)\colon Y \longrightarrow Y'$ twee S-morphismen zijn die beide aan E voldoen, dan voldoet ook

$$(f,F)\Pi(g,G): X\Pi_S Y \longrightarrow X'\Pi_S Y'$$

aan E.

(iv) Als $(f,F): X \longrightarrow Y$ een S-morphisme is dat voldoet aan E, en $S' \longrightarrow S$ is een morphisme van preschema's, dan voldoet ook het geïnduceerde morphisme

$$(f,F)\Pi\text{id.}: X\Pi_S S' \longrightarrow Y\Pi_S S'$$

aan E.

(v) Als $(f,F): X \longrightarrow Y$ en $(g,G): Y \longrightarrow Z$ morphismen zijn van preschema's, en (g,G) is gescheiden, terwijl $(g,G)\circ(f,F)$ de eigenschap E heeft, dan heeft ook (f,F) de eigenschap E.

Neem eens aan dat (i) en (ii) gelden. Dan is in dat geval (iii) aequivalent met (iv) en volgt (v) uit (i), (ii) en (iii) of (iv).

<u>Bewijs</u>: Eerste bewijzen we: (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv). Zij (iv) waar. Beschouw het commutatieve diagram

$$\begin{tikzcd} X\Pi_S Y \arrow[rr, "(f,F)\Pi(g,G)"] \arrow[dr, "\text{id}\Pi(g,G)"'] & & X'\Pi_S Y' \\ & X\Pi_S Y' \arrow[ur, "(f,F)\Pi\text{id.}"'] & \end{tikzcd}$$

Als (f,F) en (g,G) aan E voldoen, dan voldoen volgens (iv) ook $\text{id}\Pi(g,G)$ en $(f,F)\Pi\text{id}$ aan E, dus volgens (iv) ook $(f,F)\Pi(g,G)$. Zij nu (iii) waar. De identiteit op S' is een gesloten immersie, en voldoet volgens (i) aan E. Dus voldoet volgens (iii) ook $(f,F)\Pi\text{id}$ aan E.

We bewijzen nu dat (v) uit (i), (ii) en (iv) volgt: Stel dat $(g,G)\circ(f,F)$ voldoet aan E. Beschouw het commutatieve diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "{(f,F)}"] \arrow[d, "id."'] & Y \arrow[d, "{(g,G)}"] \\ X \arrow[r, "{(g,G)\circ(f,F)}"'] & Z \end{tikzcd}$$

We hebben dus een uniek bepaald morphisme

$$(\gamma,\Gamma): X \longrightarrow X\Pi_Z Y$$

zodat, als (p_2,P_2) de projectie van $X\Pi_Z Y$ is op Y,

$$(f,F) = \left[X \xrightarrow[(\gamma,\Gamma)]{} X\Pi_Z Y \xrightarrow[\text{proj.}]{} Y\right] .$$

Ook geldt:

$$(p_2,P_2) = \left[X\Pi_Z Y \xrightarrow[(g,G)\circ(f,F)\Pi\text{id.}]{} Z\Pi_Z Y \xrightarrow{\sim} Y\right] .$$

Bovendien hebben we het commutatieve diagram (Ga na, zie ook opm. (3.41) (ii)):

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "{(\gamma,\Gamma)}"'] & X\Pi_Y Y \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & Y\Pi_{(Y\Pi_Z Y)}(X\Pi_Z Y) \arrow[d, "{(\delta,\Delta)\Pi\text{id}}"] \\ & X\Pi_Z Y \arrow[r, "\sim"] & (Y\Pi_Z Y)\Pi_{(Y\Pi_Z Y)}(X\Pi_Z Y) \end{tikzcd}$$

Omdat (g,G): $Y \longrightarrow Z$ een gescheiden morphisme is, is de diagonaal (δ,Δ) een gesloten immersie, en heeft dus eigenschap E. Evenzo voldoet de identiteit op $X\Pi_Z Y$ aan E, zodat volgens het bovenstaand diagram ook (γ,Γ) aan E voldoet.
Evenzo voldoet $(g,G)\circ(f,F)\Pi\text{id}$, en dus ook (p_2,P_2) aan E, waaruit volgt dat $(f,F) = (\text{proj})\circ(\gamma,\Gamma)$ aan E voldoet.

<u>Propositie 5.94: De volgende drie uitspraken gelden:</u>

(i) <u>Elke gesloten immersie is van eindig type.</u>

(ii) <u>De compositie van twee morphismen van eindig type is weer van eindig type.</u>

(iii) <u>Als $(f,F): X \longrightarrow Y$ een S-morphisme van eindig type is, en $S' \longrightarrow S$ is een morphisme van preschema's, dan is</u>

$$(f,F)\amalg id: X\amalg_S S' \longrightarrow Y\amalg_S S'$$

<u>van eindig type.</u>

<u>Bewijs (i)</u>: Beschouw een gesloten deelpreschema $(X,\mathcal{O}_X)$ van een preschema $(Y,\mathcal{O}_Y)$. Volgens prop. (5.91) kunnen we volstaan met te bewijzen dat het kanonieke morphisme $X \longrightarrow Y$ van eindig type is in het geval Y een affien schema is. Dan is X ook affien, en, als $Y = \mathrm{Spec}(B)$ is er een ideaal $\underline{b} \subset B$ zodat

$$X = \mathrm{Spec}(B/\underline{b})$$

$B/\underline{b}$ is een B-algebra van eindig type. Pas nu prop. (5.92) toe.

<u>Bewijs (ii)</u>: Beschouw twee morphismen van eindig type:

$$(f,F): X \longrightarrow Y \quad ; \quad (g,G): Y \longrightarrow Z .$$

Zij U een open affiene deelverzameling van Z. Dan heeft volgens prop. (5.91) $g^{-1}(U)$ een eindige open overdekking van affiene deelverzamelingen V, zodat $\mathcal{O}_Y(V)$ een $\mathcal{O}_Z(U)$-algebra is van eindig type. Voor elke van deze V's is $f^{-1}V$ weer te overdekken met eindig veel open deelverzamelingen W, zodat de $\mathcal{O}_X(W)$'s algebra's van eindig type zijn over $\mathcal{O}_Y(V)$, en dus over $\mathcal{O}_Z(U)$. Hieruit volgt (ii).

<u>Bewijs (iii)</u>: (f,F) is een morphisme van S-preschema's van eindig type. We moeten bewijzen dat het morphisme

$$(f,F)\Pi_S \mathrm{id}\colon X\Pi_S S' \longrightarrow Y\Pi_S S'$$

van eindig type is. (Noteer: $(\phi,\Phi)\colon S' \longrightarrow S$). Omdat het diagram

$$\begin{tikzcd}
X\Pi_S S' \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "(f,F)\Pi_S \mathrm{id}"'] & X\Pi_Y(Y\Pi_S S') \arrow[d, "(f,F)\Pi_Y \mathrm{id}"] \\
Y\Pi_S S' \arrow[r, "\sim"] & Y\Pi_Y(Y\Pi_S S')
\end{tikzcd}$$

commuteert, is het voldoende om te bewijzen dat het morphisme

$$(f,F)\Pi_Y \mathrm{id}\colon X\Pi_Y(Y\Pi_S S') \longrightarrow Y\Pi_Y(Y\Pi_S S')$$

van eindig type is. Dat wil zeggen dat we kunnen volstaan met te bewijzen, dat, als $(f,F)\colon X \longrightarrow Y$ van eindig type is, en $(\phi,\Phi)\colon S'' \longrightarrow Y$ een morphisme van preschema's, dan ook

$$(f,F)\Pi_Y \mathrm{id}\colon X\Pi_Y S'' \longrightarrow Y\Pi_Y S'' \xrightarrow{\sim} S''$$

een morphisme is van eindig type. Beschouw nu het gevezelde produkt

$$\begin{tikzcd}
X\Pi_Y S'' \arrow[r, "(q,Q)"] \arrow[d, "(p,P)"'] & S'' \arrow[d, "(\phi,\Phi)"] \\
X \arrow[r, "(f,F)"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Zij V een open affiene deelverzameling van Y. Dan is $f^{-1}(V)$ te overdekken met eindig veel open affiene deelverzamelingen W_i, zodat $\mathcal{O}_X(W_i)$ een algebra is van eindig type over $\mathcal{O}_Y(V)$ (Prop. (5.91)). Zij nu V' een open affiene deelverzameling van S'' zodat $V' \subset \phi^{-1}V$; Omdat $f \circ p = \phi \circ q$, is $q^{-1}(V')$ bevat in de vereniging der $p^{-1}(W)$'s. Ook geldt:

$$p^{-1}(W_i) \cap q^{-1}(V') = W_i \Pi_Y V' = \mathrm{Spec}\left[\mathcal{O}_X(W_i) \otimes_{\mathcal{O}_Y(V)} \mathcal{O}_{S''}(V')\right] .$$

(Ga na). Nu is $\mathcal{O}_X(W_i)$ van eindig type over $\mathcal{O}_Y(V)$. Dus is

$$\mathcal{O}_X(W_i)\otimes_{\mathcal{O}_Y(V)}\mathcal{O}_{S''}(V')$$

een $\mathcal{O}_{S''}(V')$-algebra van eindig type. Samenvattend: Overdek Y met open affiene stukken V. Overdek elke $\phi^{-1}(V)$ met open affiene stukken V'. Deze V''s vormen dan een open affiene overdekking van S". Overdek elke $f^{-1}(V)$ met een eindig aantal open affiene deelverzamelingen W_i, zodat elke $\mathcal{O}_X(W)$ van eindig type is over $\mathcal{O}_Y(V)$. We hebben dan een eindige open overdekking van elementen van de vorm

$$(W_i \Pi_V V')_i = (p^{-1}(W_i)\cap q^{-1}(V'))_i$$

van $q^{-1}(V')$, zodat

$$\mathcal{O}_{X\Pi_Y S''}(W_i \Pi_V V')$$

van eindig type is als $\mathcal{O}_{S''}(V')$-algebra. Dus is (q,Q) van eindig type. Wegens

$$\left[X\Pi_Y S'' \xrightarrow[(q,Q)]{} S'' \xrightarrow{\sim} Y\Pi_S S''\right] = (f,F)\Pi_Y \mathrm{id}$$

is dan ook $(f,F)\Pi_Y\mathrm{id}$ van eindig type. (q.e.d.)

<u>Gevolg 5.95</u>: (i) <u>Als</u> $(f,F): X \longrightarrow X'$ <u>en</u> $(g,G): Y \longrightarrow Y'$ <u>twee S-morphismen zijn van eindig type, dan is ook</u>

$$(f,F)\Pi(g,G): X\Pi_S Y \longrightarrow X'\Pi_S Y'$$

<u>van eindig type</u>.

(ii) <u>Als</u> $(g,G)\circ(f,F)$ <u>van eindig type is, en</u> (g,G) <u>is gescheiden, dan is</u> (f,F) <u>van eindig type</u>.

<u>Bewijs</u>: Dit volgt uit opm. (5.93) en prop. (5.94).

Definitie 5.96: Een morphisme van preschema's $(f,F)\colon X \longrightarrow Y$ heet open (resp. gesloten) als voor elke open (resp. gesloten) deelverzameling U van X $f(U)$ een open (resp. gesloten) deelverzameling is van Y.

Definitie 5.97: Een morphisme van preschema's $(f,F)\colon X \longrightarrow Y$ heet proper als voldaan is aan de volgende voorwaarden:

(i) (f,F) is gescheiden.

(ii) (f,F) is van eindig type.

(iii) Voor elk Y-preschema Y' is de projectie

$$X\Pi_Y Y' \longrightarrow Y'$$

een gesloten morphisme.

Definitie 5.98: In de omstandigheden van voorgaande definitie heet X een proper Y-preschema.

Opmerking 5.99: Elk proper morphisme is gesloten.

Propositie 5.100: De volgende drie beweringen gelden:

(i) Elke gesloten immersie is proper.

(ii) De compositie van twee propere morphismen is proper.

(iii) Als $(f,F)\colon X \longrightarrow Y$ een proper S-morphisme is, en S' is een S-preschema, dan is

$$(f,F)\Pi\mathrm{id}\colon X\Pi_S S' \longrightarrow Y\Pi_S S'$$

weer proper.

Bewijs (i): Elke gesloten immersie is van eindig type, en ook gescheiden. Zij nu $(f,F)\colon X \longrightarrow Y$ een gesloten immersie. Dan is volgens prop. (3.39) ook voor elk Y-preschema Y'

$$(f,F)\Pi\mathrm{id}\colon X\Pi_Y Y' \longrightarrow Y\Pi_Y Y'$$

een gesloten immersie, en de samenstelling

$$\left[X\Pi_Y Y' \xrightarrow[(f,F)\Pi\mathrm{id}]{} Y\Pi_Y Y' \xrightarrow{\sim} Y'\right] = \left[X\Pi_Y Y' \xrightarrow[\mathrm{proj.}]{} Y'\right]$$

derhalve ook. Dit is dus zeker een gesloten morphisme.

Bewijs (ii): Laten $(f,F)\colon X \longrightarrow Y$ en $(g,G)\colon Y \longrightarrow Z$ twee propere morphismen zijn. Dan zijn (f,F) en (g,G) gescheiden, en van eindig type, zodat volgens prop. (3.43) en prop. (5.94) ook hun samenstelling gescheiden en van eindig type is.
Zij nu $Z' \longrightarrow Z$ een willekeurig Z-preschema. Dan geldt:

$$\left[X\Pi_Z Z' \xrightarrow[\mathrm{proj}]{} Z'\right] =$$

$$= \left[X\Pi_Z Z' \xrightarrow{\sim} X\Pi_Y(Y\Pi_Z Z') \xrightarrow[\mathrm{proj.}]{} Y\Pi_Z Z' \xrightarrow[\mathrm{proj.}]{} Z'\right] .$$

Omdat de samenstelling van twee gesloten morphismen weer gesloten is, geldt (ii).

Alvorens (iii) te bewijzen, verifiëren we eerst het volgende lemma:

Lemma 5.101: Als $(f,F)\colon X \longrightarrow Y$ een gescheiden S-morphisme is, en S' een S-preschema, dan is

$$(f,F)\Pi\mathrm{id}\colon X\Pi_S S' \longrightarrow Y\Pi_S S'$$

een gescheiden morphisme.

Bewijs: Het diagram

$$\begin{tikzcd}
(X\Pi_S S')\Pi_{(Y\Pi_S S')}(X\Pi_S S') \arrow[r, "\sim"] & (X\Pi_Y X)\Pi_Y(Y\Pi_S S') \\
X\Pi_S S' \arrow[u, "\mathrm{diag.}"'] \arrow[r, "\sim"] & X\Pi_Y(Y\Pi_S S') \arrow[u, "\mathrm{diag.}\Pi\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

commuteert. (Ga na). Omdat de rechter vertikale pijl als produkt van twee gesloten immersies volgens prop. (3.39) weer een gesloten immersie is, is ook de linker vertikale pijl een gesloten immersie.

<u>Bewijs van prop. 5.100 (iii)</u>: $(f,F)\colon X \longrightarrow Y$ zij een proper S-morphisme en S' een S-preschema. Dan is volgens (5.94)

$$(f,F)\Pi id\colon X\Pi_S S' \longrightarrow Y\Pi_S S'$$

van eindig type en volgens lemma (5.101) ook gescheiden. Als

$$Z \longrightarrow Y\Pi_S S'$$

een willekeurig morphisme is, dan geldt:

$$\left[(X\Pi_S S')\Pi_{(Y\Pi_S S')}Z \xrightarrow{\sim} (X\Pi_Y(Y\Pi_S S'))\Pi_{(Y\Pi_S S')}Z \xrightarrow{\sim} X\Pi_Y Z \xrightarrow[\text{proj.}]{} Z\right] =$$

$$= \left[(X\Pi_S S')\Pi_{(Y\Pi_S S')}Z \xrightarrow[\text{proj.}]{} Z\right] .$$

Nu is $X\Pi_Y Z \longrightarrow Z$ een gesloten morphisme, dus evenzo

$$(X\Pi_S S')\Pi_{(Y\Pi_S S')}Z \xrightarrow[\text{proj.}]{} Z$$

zodat (iii) bewezen is.

<u>Gevolg 5.102</u>: (i) <u>Als</u> $(f,F)\colon X \longrightarrow Y$ <u>en</u> $(g,G)\colon X' \longrightarrow Y'$ <u>twee propere morphismen zijn, dan is ook</u>

$$(f,F)\Pi(g,G)\colon X\Pi_S Y \longrightarrow X'\Pi_S Y'$$

<u>een proper morphisme</u>.

(ii) <u>Als</u> $(f,F)\colon X \longrightarrow Y$ <u>en</u> $(g,G)\colon Y \longrightarrow Z$ <u>twee morphismen zijn, zodat</u> $(g,G)\circ(f,F)$ <u>een proper morphisme is, en als bovendien</u> (g,G) <u>gescheiden is, dan is</u> (f,F) <u>proper</u>.

Bewijs: Een direkt gevolg van (5.93) en (5.102).

Propositie 5.103: Zij Y een preschema en $\mathcal{S}$ een quasi-coherente positief gegradeerde $\mathcal{O}_Y$-algebra. Dan is het in (5.85) gedefinieerde homogene spectrum van $\mathcal{S}$ over Y:

$$(f,F)\colon \operatorname{Proj}(\mathcal{S}) \longrightarrow Y$$

een schema over Y.

Bewijs: Kies een open affiene overdekking $(U_i)_i$ van Y. De door (f,F) geïnduceerde morphismen

$$\operatorname{Proj}(\mathcal{S}(U_i)) = f^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i$$

zijn volgens prop. (5.24) gescheiden. Dus is volgens prop. (3.46) ook (f,F) een gescheiden morphisme.

Gevolg 5.104: Zij X een proper Y-preschema, en zij $\mathcal{S}$ een positief gegradeerde quasi-coherente $\mathcal{O}_Y$-algebra. Dan is elk Y-morphisme

$$(\phi,\Phi)\colon X \longrightarrow \operatorname{Proj}(\mathcal{S})$$

een proper morphisme.

Bewijs: Beschouw het commutatieve diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "(\phi,\Phi)"] \arrow[dr, "(g,G)"'] & & \operatorname{Proj}(\mathcal{S}) \arrow[dl, "(f,F)"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

waarin (f,F) en (g,G) de betreffende struktuur-morphismen zijn. Volgens prop. (5.103) is (f,F) gescheiden. Ook is $(f,F)\circ(\phi,\Phi) = (g,G)$ proper. Dus is ook (ϕ,Φ) proper.

Opmerking 5.105: Zij nu $(Y,\mathcal{O}_Y)$ een preschema en $\mathcal{S}$ een positief gegradeerde quasi-coherente $\mathcal{O}_Y$-algebra. Als U een open affiene deelverzameling is van Y, dan is met de gradering

$$\mathcal{S}(U) = \sum \mathcal{S}_n(U)$$

$\mathcal{S}(U)$ een gegradeerde $\mathcal{O}_Y(U)$-algebra (Cf. Stell. 4.33). Noteer nu:

$$S := \mathcal{S}(U) \ ; \quad S_n := \mathcal{S}_n(U) \ ; \quad A := \mathcal{O}_Y(U)$$

en neem aan dat $\mathcal{S}_+$ wordt voortgebracht door $\mathcal{S}_1$. (Cf. de opmerkingen, voorafgaande aan prop. (4.84)). Dan wordt, in de zin van opm. (5.33)), S_+ voortgebracht door S_1. Want, als $y \in U$, dan wordt $\mathcal{S}_+(y)$ voortgebracht door $\mathcal{S}_1(y)$. Kies nu

$$\sigma \in \mathcal{S}_+(U)$$

en zij $\sigma_y \in \mathcal{S}_+(y)$ het door σ geïnduceerde staak-element. Dan is

$$\sigma_y = s_0^{(1)} t_1^{(1)} \ldots t_{n_1}^{(1)} + \ldots + s_0^{(k)} t_1^{(k)} \ldots t_{n_k}^{(k)}$$

met $s_0^{(i)} \in \mathcal{S}_0(y)$ en $t_j^{(i)} \in \mathcal{S}_1(y)$. Omdat we eindig veel elementen $s_0^{(i)}$ en $t_j^{(i)}$ hebben, kunnen we een $a \in A$ vinden met $y \in D(a)$, benevens elementen $\sigma_0^{(i)}$, $\tau_j^{(i)}$ in respectievelijk $\mathcal{S}_0(D(a))$ en $\mathcal{S}_1(D(a))$ zodat

$$\sigma|D(a) = \sigma_0^{(1)} \tau_1^{(1)} \ldots \tau_{n_1}^{(1)} + \ldots + \sigma_0^{(k)} \tau_1^{(k)} \ldots \tau_{n_k}^{(k)} \quad .$$

Nu is - als we $\mathcal{S}_+(U)$, $\mathcal{S}_0(U)$ en $\mathcal{S}_1(U)$ als A-modulen opvatten -

$$\mathcal{S}_0(D(a)) = (S_0)_a \quad ; \quad \mathcal{S}_1(D(a)) = (S_1)_a \quad ; \quad \mathcal{S}_+(D(a)) = (S_+)_a$$

We kunnen dan elementen $\tilde{\sigma}_0^{(i)}$ en $\tilde{\tau}_j^{(i)}$ in resp. S_0 en S_1 vinden, alsmede een natuurlijk getal M zodat

$$\frac{\sigma}{1} = \frac{\tilde{\sigma}_0^{(1)}\tilde{\tau}_1^{(1)}\ldots\tilde{\tau}_{n_1}^{(1)} + \ldots + \tilde{\sigma}_0^{(k)}\tilde{\tau}_1^{(k)}\ldots\tilde{\tau}_{n_k}^{(k)}}{a^M} \in S_a$$

(door eventueel de factoren $\sigma_0^{(i)}$ te vermenigvuldigen met machten van $\xi(a)$ als

$$\xi \colon A \longrightarrow S$$

de A-algebra-struktuur van S is. ($\xi = \Phi(U)$ als Φ de $\mathcal{O}_Y$-algebra-struktuur van $\mathcal{S}$ is)). We vinden dus een relatie

$$\xi(a^N).\sigma = \xi(a^T)\left[\tilde{\sigma}_0^{(1)}\tilde{\tau}_1^{(1)}\ldots\tilde{\tau}_{n_1}^{(1)} + \ldots + \tilde{\sigma}_0^{(k)}\tilde{\tau}_1^{(k)}\ldots\tilde{\tau}_{n_k}^{(k)}\right] \quad \ldots\ldots\text{(i)}$$

Kies nu een eindige overdekking $(D(a_i))_{i=1}^r$ van U, zodat we voor elke a_i een uitdrukking hebben van het type (i). Zeg:

$$\xi(a_i)^{N_i}.\sigma = \xi(a_i)^{T_i}.P_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(ii)}$$

waarbij P_i een eindige som is van termen van de vorm

$$\tilde{\sigma}_0^{(i)}\tilde{\tau}_1^{(i)}\ldots\tilde{\tau}_{n_i}^{(i)}$$

met $\tilde{\sigma}_0^{(i)} \in S_0$ en $\tilde{\tau}_j^{(i)} \in S_1$. Omdat $(D(a_i))_i$ een overdekking is van $U = \mathrm{Spec}(A)$ hebben we elementen $\alpha_i \in A$ zodat

$$1 = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_i$$

Kies nu $N := \max\{N_i\}$. Dan is

$$\sigma = \left[\sum \xi(\alpha_i).\xi(a_i)\right]^{Nr}.\sigma$$

en de rechterterm is volgens (ii) een eindige som van termen van de vorm

$$u_0 v_1 \ldots v_n$$

met $u_0 \in S_0$ en $v_i \in S_1$, zodat de opmerking bewezen is. Ga zelf na dat, als $\mathcal{S}_1$ een $\mathcal{S}_0$-moduul van eindig type is, ook S_1 een eindig voortgebracht S_0-moduul is.

<u>Definitie 5.106</u>: Zij X een Y-preschema. Als er een quasi-coherente positief gegradeerde $\mathcal{O}_Y$-algebra $\mathcal{S}$ bestaat, zodat $\mathrm{Proj}(\mathcal{S})$ Y-isomorf is met X, terwijl bovendien geldt:

(i) $\mathcal{S}_+$ is voortgebracht door $\mathcal{S}_1$.

(ii) $\mathcal{S}_1$ is een $\mathcal{S}_0$-moduul van eindig type.

(iii) Het kanonieke morphisme

$$\mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{S}_0$$

is van eindig type

dan heet X een <u>projectief Y-schema</u>.

<u>Definitie 5.107</u>: Als (ϕ,Φ): $X \longrightarrow Y$ het struktuur-morphisme is van een projectief Y-schema X, dan heet (ϕ,Φ) een <u>projectief morphisme</u>.

<u>Propositie 5.108</u>: <u>Een projectief morphisme is van eindig type</u>.

<u>Bewijs</u>: Zij $(Y,\mathcal{O}_Y)$ een preschema en $\mathcal{S}$ een quasi-coherente positief gegradeerde $\mathcal{O}_Y$-algebra die bovendien voldoet aan de voorwaarden (i), (ii) en (iii) van def. (5.106). Zij

$$\begin{array}{c} \mathrm{Proj}(\mathcal{S}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle (f,F)} \\ Y \end{array}$$

het struktuur-morphisme. We kunnen $\mathcal{S}$ natuurlijk ook opvatten als een gegradeerde $\mathcal{S}_0$-algebra en vinden dan op natuurlijke manier een factorisatie

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Proj}(\mathcal{S}) \arrow[d, "(g,G)"'] \arrow[dd, bend left, "(f,F)"] \\
(Y,\mathcal{S}_0) \arrow[d] \\
(Y,\mathcal{O}_Y)
\end{tikzcd}$$

Volgens prop. (5.94) (ii) is het dan voldoende te laten zien dat (g,G) een morphisme is van eindig type. Dat wil zeggen: We kunnen aannemen dat $\mathcal{S}_0 = \mathcal{O}_Y$. Kies nu $y \in Y$, en bij dit punt een open affiene omgeving U van y, zodat er een exakte rij

$$\mathcal{S}_0|U^{(n)} \longrightarrow \mathcal{S}_1|U \longrightarrow 0$$

bestaat. Noteer:

$$S := \mathcal{S}(U) \quad ; \quad S_n := \mathcal{S}_n(U) \quad ; \quad A := \mathcal{O}_Y(U) = S_0 \; .$$

Dan is S_1 een eindig voortgebracht A-moduul, zeg:

$$S_1 = Ax_1 + \ldots + Ax_n \qquad (x_i \in S_1)$$

Het struktuur-morphisme (g,G) wordt voor iedere $s \in S_d$ $(d > 0)$ lokaal gegeven door

$$D_+(s) = \mathrm{Spec}(S_{(s)}) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$$

welk morphisme van affiene schema's wordt geïnduceerd door het ring-morphisme

$$\begin{cases} A \longrightarrow S_{(s)} \\ a \longmapsto \dfrac{\xi(a)}{1} \end{cases}$$

als $\xi: A \longrightarrow S$ de A-algebra-struktuur op S is. Nu is

$$\mathrm{Proj}(\mathcal{S})|f^{-1}U = \mathrm{Proj}(S) = \bigcup_{i=1}^{n} D_+(x_i)$$

en

$$D_+(x_i) = \mathrm{Spec}(S_{(x_i)})$$

zodat we volgens prop. (5.92) klaar zijn als we bewezen hebben dat $S_{(x_i)}$ een A-algebra van eindig type is. Beschouw hiertoe het ring-isomorphisme

$$\begin{cases} S_{(x_i)} \xrightarrow{\sim} S/(x_i-1)S \\ \dfrac{s}{x_i^n} \longmapsto s(\mathrm{mod}(x_i-1)S) \end{cases}$$

Het is dus voldoende om te laten zien dat S een A-algebra is van eindig type. Dit volgt met onze aanname $A = S_0$ direkt uit opm. (5.105).

<u>Propositie 5.109</u>: <u>Een projectief morphisme is gescheiden</u>.

<u>Bewijs</u>: Zij $(Y,\mathcal{O}_Y)$ een preschema en $\mathcal{S}$ een positief gegradeerde quasi-coherente $\mathcal{O}_Y$-algebra met struktuur-morphisme

$$\begin{array}{c} \mathrm{Proj}(\mathcal{S}) \\ \downarrow{\scriptstyle (f,F)} \\ Y \end{array}$$

Als U een open affiene deelverzameling van Y is, is $f^{-1}U = \mathrm{Proj}(\mathcal{S}(U))$, en de beperking van (f,F) tot $f^{-1}U$ is volgens prop. (5.25) gescheiden. Pas nu prop. (3.46) toe.

<u>Propositie 5.110</u>: <u>Zij</u> $(\psi,\Psi): Y' \longrightarrow Y$ <u>een morphisme van preschema's en zij</u> $\mathcal{S}$ <u>een quasi-coherente positief gegradeerde</u> $\mathcal{O}_Y$-<u>algebra</u>. <u>Dan is</u>

$$\mathrm{Proj}([\psi]^*\mathcal{S}) = \mathrm{Proj}(\mathcal{S})\amalg_Y Y'$$

<u>Bewijs</u>: $[\psi]^*\mathcal{S}$ is een positief gegradeerde quasi-coherente $\mathcal{O}_{Y'}$-algebra. (Cf. opm. (4.84)). Noteer:

$$\mathcal{S}' := [\psi]^*\mathcal{S}$$

Zij U een open affiene deelverzameling van Y en U' een open affiene deelverzameling van Y', zodat

$$U' \subset \psi^{-1}U \; .$$

Noteer verder:

$$U = \mathrm{Spec}(A) \quad ; \quad U' = \mathrm{Spec}(A') \quad ; \mathcal{S}(U) = S \; .$$

We hebben het door (ψ,Ψ) geïnduceerde morphisme van affiene schema's

$$(\psi_1,\Psi_1): U' \longrightarrow U$$

dat op zijn beurt weer geïnduceerd wordt door een ring-morphisme

$$\alpha: A \longrightarrow A' \; .$$

Nu is S een gegradeerde A-algebra, en er geldt:

$$\mathcal{S}'|U' = [\psi]^*\mathcal{S}|U' = [\psi_1]^*\tilde{S} = \widetilde{S\otimes_A A'} \qquad \text{(Cf. (4.89))}$$

zodat

$$\mathcal{S}'(U') = S\otimes_A A'$$

Volgens prop. (5.32) geldt verder:

$$\mathrm{Proj}(S\otimes_A A') = \mathrm{Proj}(S)\Pi_{\mathrm{Spec}(A)}\mathrm{Spec}(A')$$

zodat we vinden:

$$\mathrm{Proj}(\mathcal{S}'(U')) = \mathrm{Proj}(\mathcal{S}(U))\Pi_U U' \ .$$

We hebben dus voor elk paar U', U dat aan bovenstaande voorwaarden voldoet een gevezeld-produkt-diagram

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Proj}(\mathcal{S}'(U')) \arrow[r, "(p_1, P_1)"'] \arrow[d, "(g_1, G_1)"'] & \mathrm{Proj}(\mathcal{S}(U)) \arrow[d, "(f_1, F_1)"] \\ U' \arrow[r, "(\psi_1, \Psi_1)"'] & U \end{tikzcd} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

Als (g,G) het struktuur-morphisme is van het Y'-schema $\mathrm{Proj}(\mathcal{S}')$, dan is (g_1,G_1) de beperking hiervan tot $g^{-1}(U')$, zodat (i) zich ook laat schrijven als

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Proj}(\mathcal{S}')|g^{-1}(U') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Proj}(\mathcal{S})|f^{-1}(U) \arrow[d] \\ U' \arrow[r] & U \end{tikzcd}$$

((f,F) is het struktuur-morphisme van $\mathrm{Proj}(\mathcal{S})$ over Y). Kies nu open affiene deelverzamelingen U', U'' van Y' en open affiene deelverzamelingen U_1, U_2 van Y. We hebben dan, als $U'\subset U''$ en $U_1 \subset U_2$, de commutatieve diagrammen

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Proj}(\mathcal{S}')|g^{-1}U' \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathrm{Proj}(\mathcal{S}')|g^{-1}U'' \arrow[d] \\ U' \arrow[r, hook] & U \end{tikzcd}$$

en

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Proj}(\mathcal{S})|f^{-1}U_1 \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathrm{Proj}(\mathcal{S})|f^{-1}U_2 \arrow[d] \\
U_1 \arrow[r, hook] & U_2
\end{tikzcd}$$

en dit zijn gevezelde produkten (Cf. diagram (i) van opm. (5.83)). Neem nu bovendien aan dat $U' \subset \psi^{-1}U_1$ en $U'' \subset \psi^{-1}U_2$. Dan hebben we twee diagrammen:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Proj}(\mathcal{S}')|g^{-1}U' \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathrm{Proj}(\mathcal{S}')|g^{-1}U'' \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Proj}(\mathcal{S})|f^{-1}U_2 \arrow[d] \\
U' \arrow[r, hook] & U'' \arrow[r] & U_2
\end{tikzcd}$$

en

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Proj}(\mathcal{S}')|g^{-1}U' \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Proj}(\mathcal{S})|f^{-1}U_1 \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathrm{Proj}(\mathcal{S})|f^{-1}U_2 \arrow[d] \\
U' \arrow[r] & U_1 \arrow[r, hook] & U_2
\end{tikzcd}$$

die beide samengesteld zijn uit gevezelde produkten, zodat zij zelf gevezelde produkten zijn. Wegens de uniciteit van het gevezeld produkt volgt dan de commutativiteit van het diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Proj}(\mathcal{S}')|g^{-1}U' \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{Proj}(\mathcal{S})|f^{-1}U_1 \arrow[d, hook] \\
\mathrm{Proj}(\mathcal{S}')|g^{-1}U'' \arrow[r] & \mathrm{Proj}(\mathcal{S})|f^{-1}U_2
\end{tikzcd}$$

zodat de bij ieder geschikt paar U',U verkregen morphismen (p_1,P_1) uit diagram (i) te plakken zijn tot een morphisme

$$\mathrm{Proj}(\mathcal{S}') \xrightarrow[(p,P)]{} \mathrm{Proj}(\mathcal{S})$$

zodat het diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Proj}(\mathcal{S}') & \xrightarrow{(p,P)} & \mathrm{Proj}(\mathcal{S}) \\ {\scriptstyle (g,G)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (f,F)} \\ Y' & \xrightarrow[(\psi,\Psi)]{} & Y \end{array} \qquad \text{..................(ii)}$$

commuteert. Kies nu een open affiene overdekking (U_α) van Y en daarbij een open affiene overdekking $(U'_{\alpha\beta})$ van Y' zodat steeds $U'_{\alpha\beta} \subset \psi^{-1}U_\alpha$. Dan is volgens het voorgaande het door (ii) geïnduceerde diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Proj}(\mathcal{S}')|U'_{\alpha\beta} & \longrightarrow & \mathrm{Proj}(\mathcal{S})|U_\alpha \\ \downarrow & & \downarrow \\ U'_{\alpha\beta} & \longrightarrow & U_\alpha \end{array} \qquad \text{..................(iii)}$$

een gevezeld produkt. Ook volgt uit de constructie van (p,P) dat

$$p^{-1}\mathrm{Proj}(\mathcal{S})|U_\alpha \cap g^{-1}U'_{\alpha\beta} = \mathrm{Proj}(\mathcal{S}')|U'_{\alpha\beta}$$

zodat, omdat de diagrammen (iii) gevezelde produkten zijn, ook (ii) een gevezeld produkt is. (Cf. de constructie van gevezelde produkten in §3).

<u>Gevolg 5.111</u>: <u>Zij</u> $(\phi,\Phi): X \longrightarrow Y$ <u>een projectief morphisme en zij</u> Y' <u>een Y-preschema. Dan is de projectie</u>

$$X\Pi_Y Y' \longrightarrow Y'$$

<u>ook projectief</u>.

<u>Bewijs</u>: We kunnen aannemen dat $X = \mathrm{Proj}(\mathcal{S})$ voor een quasi-coherente positief gegradeerde $\mathcal{O}_Y$-algebra $\mathcal{S}$, die voldoet aan de voorwaarden (i),

(ii) en (iii) van definitie (5.106). Dan is ook $[\psi]^{*}\mathcal{S}$ een quasi-coherente positief gegradeerde $\mathcal{O}_{Y'}$-algebra die aan deze voorwaarden voldoet. (Hierbij is (ψ,Ψ) het struktuur-morphisme van het Y-preschema Y'). Nu is volgens de voorgaande propositie die projectie.

$$X\Pi_Y Y' \longrightarrow Y'$$

hetzelfde als het struktuur-morphisme

$$X\Pi_Y Y' = \mathrm{Proj}([\psi]^{*}\mathcal{S}) \longrightarrow Y'$$

waarmee (5.111) bewezen is.

Lemma 5.112: Zij T een gegradeerde ring, zodat T_+ door eindig veel elementen van T_1 wordt voortgebracht. Dan geldt:

$$\mathrm{Proj}(T) = \emptyset \Longleftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0.\ T_n = 0 .$$

Bewijs (i): Stel voor elke $n \geq n_0$: $T_n = 0$. Kies een homogeen element $0 \neq t \in T_+$. Zeg: $t \in T_d$. Dan is, als we m voldoende groot kiezen,

$$t^m \in T_{dm} = 0 ,$$

dus is t nilpotent. Dan is ook $D_+(t) = \emptyset$. Dus is $\mathrm{Proj}(T) = \emptyset$.

Bewijs (ii): Zij nu $\mathrm{Proj}(T) = \emptyset$ en laat

$$T_1 = T_0 x_1 + \ldots + T_0 x_k$$

$D_+(x_i) = \emptyset$, dus is x_i nilpotent. Als we m voldoende groot kiezen vinden we voor elke $i \in \{1,\ldots,k\}$:

$$x_i^m = 0 .$$

Dan is, omdat T_1 T_+ voortbrengt, $T_n = 0$ als $n \geq mk$.

Lemma 5.113: (Nakayama)
Zij A een lokale ring met maximaal ideaal $\underline{m}$. Zij M een eindig voortgebracht A-moduul met $\underline{m}.M = M$. Dan is $M = 0$.

Bewijs: Stel $M \neq 0$. Kies een minimaal aantal voortbrengenden $m_1,\ldots,m_t$ van M. Wegens $\underline{m}.M = M$ is dan $m_1 \in \underline{m}.M$, zodat we kunnen schrijven:

$$m_1 = \mu_1 m_1 + \ldots + \mu_t m_t \qquad (\mu_i \in \underline{m}) .$$

Nu is $1-\mu_1 \notin \underline{m}$, en is dus een eenheid in de ring A, zodat:

$$m_1 = (1-\mu_1)^{-1}\mu_2 m_2 + \ldots + (1-\mu_1)^{-1}\mu_t m_t ,$$

in tegenspraak met de minimaliteit van t.

Propositie 5.114: Zij $(f,F)\colon X \longrightarrow Y$ een projectief morphisme. Dan is $f(X)$ een gesloten deelverzameling van Y.

Bewijs: We kunnen veronderstellen dat $X = \mathrm{Proj}(\mathcal{S})$, waarbij $\mathcal{S}$ een quasi-coherente positief gegradeerde $\mathcal{O}_Y$-algebra is, die voldoet aan de voorwaarden (i), (ii) en (iii) van definitie (5.106).
Overdek Y met open affiene stukken U_α. Dan geldt steeds:

$$f^{-1}U_\alpha = \mathrm{Proj}(\mathcal{S}(U_\alpha))$$

en als we bewijzen dat $f(\mathrm{Proj}(\mathcal{S}(U_\alpha)))$ gesloten is in U_α, dan zijn we klaar. We mogen dus veronderstellen dat Y affien is. Zeg: $Y = \mathrm{Spec}(A)$. Wegens de quasi-coherentie van $\mathcal{S}$ is dan $\mathcal{S}|Y = \tilde{S}$ vóór een positief gegradeerde A-algebra S, waarbij S_+ wordt voortgebracht door eindig veel elementen van S_1, terwijl S_0 een A-algebra is van eindig type. (Ga na).
Kies nu een punt $y \in Y$ en zij $\underline{m}(y)$ het maximale ideaal van de lokale ring $\mathcal{O}_Y(y)$. Noteer verder:

$$k(y) := \mathcal{O}_Y(y) \big/ \underline{m}(y) .$$

Dan is

$$f^{-1}(y) = \mathrm{Proj}(S)\Pi_Y \mathrm{Spec}(k(y))$$

(Cf. §3a). Nu is volgens propositie (5.32)

$$\mathrm{Proj}(S)\Pi_Y \mathrm{Spec}(k(y)) = \mathrm{Proj}(S\otimes_A k(y)) \ .$$

Met behulp van lemma (5.112) vinden we dan:

$$f^{-1}(y) = \emptyset \iff \mathrm{Proj}(S\otimes_A k(y)) = \emptyset \iff \exists n_0 : \forall n \geq n_0 . S_n\otimes_A k(y)) = 0 \quad \ldots(\mathrm{i})$$

Zij nu $\underline{p}\subset A$ het priemideaal dat correspondeert met y. Kies $n\in\mathbb{N}$ zodat

$$S_n\otimes_A k(y) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{ii})$$

S_n is een eindig voortgebracht S_0-moduul, dus ook een eindig voortgebracht A-moduul, zodat ook $(S_n)_{\underline{p}}$ een eindig voortgebracht $A_{\underline{p}}$-moduul is. Uit (ii) volgt:

$$S_n\otimes_A {A_{\underline{p}}}/{\underline{p}A_{\underline{p}}} = 0$$

zodat

$$\underline{p}.A_{\underline{p}} \, . \, (S_n)_{\underline{p}} = S_n\otimes_A \underline{p}.A_{\underline{p}} = S_n\otimes_A A_{\underline{p}} = (S_n)_{\underline{p}} \quad .$$

Omdat $\underline{p}.A_{\underline{p}}$ het maximale ideaal is van $A_{\underline{p}}$ en $(S_n)_{\underline{p}}$ eindig is voortgebracht volgt hieruit met behulp van lemma (5.113) dat

$$(S_n)_{\underline{p}} = 0 \ .$$

Met (i) volgt hieruit weer:

$$f^{-1}(y_{\underline{p}}) = \emptyset \iff (S_n)_{\underline{p}} = 0 \text{ als } n \geq n_0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(\mathrm{iii})$$

Noteer nu:

$$\underline{a}_m := \{x \in A \mid xS_m = 0\} \qquad (m \in \mathbb{N})$$

Er geldt dan, zoals gemakkelijk is te verifiëren:

$$(S_m)_{\underline{p}} = 0 \iff \underline{a}_m \not\subset \underline{p}$$

zodat we met (iv) vinden:

$$f^{-1}(y_{\underline{p}}) = \emptyset \iff \underline{a}_n \not\subset \underline{p} \quad \text{als } n \geq n_0 \ .$$

Merk verder op dat $\underline{a}_m \subset \underline{a}_{m+1}$. (Ga na, gebruik hierbij dat S_+ door S_1 wordt voortgebracht). Definieer:

$$\underline{a} := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \underline{a}_m \ .$$

Dan is $f(\mathrm{Proj}(S)) = V(\underline{a})$ (met de notatie van §1), want:

$$y_{\underline{p}} \notin f(\mathrm{Proj}(S)) \iff f^{-1}(y_{\underline{p}}) = \emptyset \iff \underline{a}_n \not\subset \underline{p} \text{ als } n \geq n_0 \iff \underline{a} \not\subset \underline{p} \iff$$

$$\iff \underline{p} \notin V(\underline{a})$$

Dus is f(Proj(S) gesloten in Y, zodat de propositie is bewezen.

<u>Lemma 5.115</u>: <u>Zij $(Y, \mathcal{O}_Y)$ een gesloten deelpreschema van $(X, \mathcal{O}_X)$. Dan is er een quasi-coherent $\mathcal{O}_X$-ideaal dat $(Y, \mathcal{O}_Y)$ induceert (in de zin van def. (5.81))</u>.

<u>Bewijs</u>: Beschouw het kanonieke morphisme

$$(\psi, \Psi): (Y, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$$

(ψ is de inbedding van Y in X). Dan induceert dit een morphisme

$$\Psi_*: \mathcal{O}_X \longrightarrow \psi_*\mathcal{O}_Y \quad .$$

Nu is het in opm. (4.62) gedefinieerde morphisme

$$\bar{\theta}(x): \psi_*\mathcal{O}_Y(x) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(x)$$

voor elke $x \in Y$ bijectief (Ga na), terwijl voor elke $x \in Y$ bovendien geldt:

$$\bar{\theta}(x) \circ \Psi_*(x) = \Psi(x) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

(Cf. opm. (4.63)). Voorts volgt uit het feit dat Y een gesloten deelverzameling is van X dat voor elke $x \in X \setminus Y$ geldt:

$$\psi_*\mathcal{O}_Y(x) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$$

Als $x \in Y$, dan is er een open affiene omgeving U van x in X zodat het door (ψ,Ψ) geïnduceerde morphisme van affiene schema's

$$(U \cap Y, \mathcal{O}_Y|U \cap Y) \longrightarrow (U, \mathcal{O}_X|U)$$

afkomstig is van een surjectief ring-morphisme. (Vgl. de definitie van een deel-preschema). Hieruit volgt direkt dat dan ook voor elke $x \in Y$ het staak-morphisme

$$\Psi(x): \mathcal{O}_X(x) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(x)$$

surjectief is (Ga na). Uit (i) en (ii) volgt dan dat Ψ_* surjectief is in de staken, zodat we een exakte rij

$$0 \longrightarrow \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \psi_*\mathcal{O}_Y \longrightarrow 0$$

kunnen construeren. $\mathcal{J}$ is dan een $\mathcal{O}_X$-ideaal, en er geldt:

$$\mathcal{O}_X/\mathcal{J}(x) \neq 0 \iff x \in Y \quad .$$

(Want als $\mathcal{F}(x) = \mathcal{O}_X(x)$ dan is $\psi_*\mathcal{O}_Y(x) = 0$. Als $x \in Y$, dan zou ook $\mathcal{O}_Y(x) = 0$, tegenspraak omdat $(Y, \mathcal{O}_Y)$ een preschema is. (Ga na)). Dus is $(Y, \mathcal{O}_Y)$ het door $\mathcal{F}$ geïnduceerde gesloten deelpreschema van $(X, \mathcal{O}_X)$. Ook is $\mathcal{F}$ quasi-coherent: Kies een open affiene deelverzameling U van X. Als $U \cap Y = \emptyset$, dan is $\psi_*\mathcal{O}_Y|U = 0$, dus $\mathcal{F}|U = \mathcal{O}_X|U = \widetilde{\mathcal{O}_X(U)}$. Als $U \cap Y \neq \emptyset$, dan is $(U \cap Y, \mathcal{O}_Y|U \cap Y)$ een gesloten deelpreschema van het affiene schema $(U, \mathcal{O}_X|U)$, en dus ook affien. Als $U = \mathrm{Spec}(A)$, dan is $U \cap Y = \mathrm{Spec}(A/\underline{i})$ voor een zeker A-ideaal $\underline{i}$. Beschouw nu de rij

$$0 \longrightarrow \tilde{\underline{i}} \longrightarrow \mathcal{O}_X|U \longrightarrow \psi_*\mathcal{O}_Y|U \longrightarrow 0 \ .$$

Het is eenvoudig in de staken te controleren dat deze rij exakt is. Dus $\tilde{\underline{i}} = \mathcal{F}$.

<u>Opmerking 5.116</u>: Zij $(X, \mathcal{O}_X)$ een preschema. Kies een open deelverzameling $U \subset X$ en definieer:

$$\mathcal{N}(U) := \{\text{nilpotente elementen van } \mathcal{O}_X(U)\} \ .$$

Als $V \subset U$ een tweede open deelverzameling is van X, dan voert het restrictie-morphisme $\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(V)$ nilpotenten over in nilpotenten, zodat we restricties $\mathcal{N}(U) \longrightarrow \mathcal{N}(V)$ hebben. Hiermee verkrijgen we een preschoof $\mathcal{N}(-)$ die na verschoving een $\mathcal{O}_X$-ideaal $\mathcal{N}_X$ levert.

<u>Definitie 5.117</u>: Het in voorgaande opmerking ingevoerde $\mathcal{O}_X$-ideaal $\mathcal{N}_X$ heet het <u>nil-radikaal van $\mathcal{O}_X$</u>.

Merk op dat $\mathcal{N}_X(U)$ wordt gegeven door die elementen $n \in \mathcal{O}_X(U)$, waarvoor geldt dat voor iedere $x \in U$ het door n geïnduceerde element $n_x \in \mathcal{O}_X(x)$ nilpotent is. Ga ook na dat $\mathcal{N}_X$ quasi-coherent is.

<u>Definitie 5.118</u>: Een ring A heet <u>gereduceerd</u> als het nilradikaal van A het nulideaal is. (A bevat geen nilpotenten).

<u>Definitie 5.119</u>: Een preschema $(X, \mathcal{O}_X)$ heet <u>gereduceerd</u> als het nil-radikaal $\mathcal{N}_X$ nul is.

<u>Opmerking 5.120</u>: <u>$(X, \mathcal{O}_X) = \mathrm{Spec}\, A$ is gereduceerd dan en slechts dan als A gereduceerd is.</u>

<u>Bewijs</u>: Ga na.

<u>Opmerking 5.121</u>: <u>Een preschema is gereduceerd dan en slechts dan als elke staak geen nilpotenten bevat.</u>

<u>Bewijs</u>: Ga na.

<u>Lemma 5.122</u>: <u>Zij $(X, \mathcal{O}_X)$ een preschema en zij $\mathcal{N}_X$ het nilradikaal van $\mathcal{O}_X$. Dan is het door $\mathcal{N}_X$ geïnduceerde deelpreschema van $(X, \mathcal{O}_X)$ het enige gereduceerde deelpreschema met X als onderliggende topologische ruimte.</u>

<u>Bewijs</u>: Voor elke $x \in X$ is uiteraard $\mathcal{N}_X(x) \neq \mathcal{O}_X(x)$, zodat het door $\mathcal{N}_X$ geïnduceerde deelpreschema van X gegeven wordt door

$$(X, \mathcal{O}_X / \mathcal{N}_X) \quad .$$

Bovendien is dit een gereduceerd deelpreschema van X. Zij nu $(X, \mathcal{O}'_X)$ een deelpreschema van $(X, \mathcal{O}_X)$. We kunnen dan opmerken, dat, als

$$\Psi : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}'_X$$

het kanonieke morphisme is, dit surjectief is in de staken (Dit volgt uit de definitie van een deelpreschema). We kunnen dus een exakte rij

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\Psi'} \mathcal{O}'_X \longrightarrow 0$$

vormen, waarbij $\mathcal{F}$ een quasi-coherent $\mathcal{O}_X$-ideaal is. (Vgl. het bewijs van lemma (5.115)). Kies nu een open affiene deelverzameling U van X. Zij $\mathcal{O}_X(U) = A$; $\mathcal{F}(U) = \underline{i}$ (een ideaal van A). Dan is $\mathcal{O}'_X(U) = A/\underline{i}$. Omdat voor elke $x_{\underline{p}} \in U = \mathrm{Spec}(A)$ geldt

$$\mathcal{O}'_X(x) = A_{\underline{p}} / \underline{i}_{\underline{p}} \neq 0$$

geldt ook dat $\underline{i} \subset \underline{p}$ voor elk priemideaal $\underline{p} \subset A$. (Ga na), zodat $\underline{i}$ bevat is in het nil-radikaal van A. Met andere woorden:

$$\underline{i} \subset \mathcal{N}_X(U)$$

zodat we voor elke open affiene deelverzameling U van X vinden:

$$\mathcal{F}|U = \widetilde{\underline{i}} \subset \widetilde{\mathcal{N}_X(U)} = \mathcal{N}_X|U$$

wat zeggen wil dat $\mathcal{F}$ een sub-$\mathcal{O}_X$-ideaal van $\mathcal{N}_X$ is. Als we nu aannemen dat $(X, \mathcal{O}'_X)$ gereduceerd is, maar niet gelijk aan het door $\mathcal{N}_X$ geïnduceerde deelpreschema van $(X, \mathcal{O}_X)$, dan is er minstens één $x \in X$ te vinden zodat

$$\mathcal{F}(x) \subsetneq \mathcal{N}_X(x) \quad .$$

Dan is de staak

$$\mathcal{O}'_X(x) = \mathcal{O}_X(x) / \mathcal{F}(x)$$

niet gereduceerd, tegenspraak. Dus

$$(X, \mathcal{O}'_X) = (X, \mathcal{O}_X / \mathcal{N}_X) \ .$$

<u>Lemma 5.123</u>: <u>Zij $(X, \mathcal{O}_X)$ een preschema en zij Y een gesloten deelverzameling van X. Dan bestaat er een gesloten deelpreschema $(Y, \mathcal{O}_Y)$ van $(X, \mathcal{O}_X)$.</u>

Bewijs: (i) Neem eerst aan dat X affien is. Zeg: $(X,\mathcal{O}_X) = \mathrm{Spec}(A)$. Dan is er een ideaal $\underline{i} \subset A$ met $Y = V(\underline{i})$, en bovendien mogen we veronderstellen: $\underline{i} = \sqrt{\underline{i}}$ (Cf. §1). Dan is $A/\underline{i}$ een gereduceerde ring en hebben we een gereduceerd gesloten deelpreschema

$$(Y,\mathcal{O}_Y) := \mathrm{Spec}(A/\underline{i})$$

(ii) Laat nu de eis dat X affien is, vallen. Kies een open affiene overdekking (U_i) van X. Zij U zo'n overdekkingselement, met $U = \mathrm{Spec}(A)$. Omdat $Y \cap U$ gesloten is in U, kunnen we volgens (i) een gesloten deelpreschema $(Y \cap U, \mathcal{O}_{Y\cap U})$ van $(U,\mathcal{O}_X|U)$ vinden dat bovendien gereduceerd is. Zij nu V een tweede overdekkingselement met $V \subset U$. Analoog als voor U vinden we een gereduceerd gesloten deelpreschema $(Y\cap V, \mathcal{O}_{Y\cap V})$ van $(V,\mathcal{O}_X|V)$. Ook hebben we het gesloten deelpreschema $(Y\cap V, \mathcal{O}_{Y\cap U}|Y\cap V)$ van $(V,\mathcal{O}_X|V)$, dat eveneens gereduceerd is. (De staken zijn immers gereduceerd.) Dus is volgens lemma (5.122)

$$(Y\cap V, \mathcal{O}_{Y\cap V}) = (Y\cap V, \mathcal{O}_{Y\cap U}|Y\cap V)$$

zodat we de bij elke U_i geconstrueerde gereduceerde gesloten deelpreschema's

$$(Y\cap U_i, \mathcal{O}_{Y\cap U_i})$$

van $(U_i, \mathcal{O}_X|U_i)$, plakken tot een gesloten deelpreschema $(Y,\mathcal{O}_Y)$ van $(X,\mathcal{O}_X)$.

Propositie 5.124: Als $(X,\mathcal{O}_X)$ een preschema is, en Y is een gesloten deelverzameling van X, dan is er een quasi-coherent $\mathcal{O}_X$-ideaal $\mathcal{F}$ dat een gesloten deelpreschema van X induceert, waarvan de onderliggende topologische ruimte Y is.

Bewijs: Een direkt gevolg van lemma (5.115) en lemma (5.123).

<u>Stelling 5.125</u>: <u>Elk projectief morphisme is proper</u>.

<u>Bewijs</u>: Zij $(Y, \mathcal{O}_Y)$ een preschema en zij $\mathcal{S}$ een quasi-coherente positief gegradeerde $\mathcal{O}_Y$-algebra die voldoet aan de voorwaarden (i), (ii) en (iii) van definitie (5.106). Zij bovendien

$$\begin{array}{c} \mathrm{Proj}(\mathcal{S}) \\ \downarrow{\scriptstyle (f,F)} \\ Y \end{array}$$

het struktuur-morphisme. Dan is volgens prop. (5.108) (f,F) van eindig type, en volgens prop. (5.109) ook gescheiden. We moeten dus nog bewijzen dat voor elk Y-preschema Y' de projectie

$$\mathrm{Proj}(\mathcal{S})\Pi_Y Y' \longrightarrow Y'$$

een gesloten morphisme is. Omdat volgens gevolg (5.11) deze projectie een projectief morphisme is, is het dus voldoende om te bewijzen dat elk projectief morphisme gesloten is. Dat wil zeggen: We kunnen volstaan met te bewijzen dat (f,F) een gesloten morphisme is.
Noteer: $(X, \mathcal{O}_X) = \mathrm{Proj}(\mathcal{S})$. Zij V een gesloten deelverzameling van X. Kies een open (affiene) overdekking (U_i) van Y. Om te bewijzen dat (f,F) een gesloten morphisme is, is het voldoende om deze eigenschap te controleren voor de door (f,F) geïnduceerde morphismen

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Proj}(\mathcal{S}(U_i)) = & (f^{-1}U_i, \mathcal{O}_X|f^{-1}U_i) \\ & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_Y(U_i)) = & (U_i, \mathcal{O}_Y|U_i) \end{array}$$

Met andere woorden: We kunnen volstaan met het geval, waarin Y affien is, te controleren.
Zij derhalve S een gegradeerde A-algebra, zodat S_+ wordt voortgebracht

door eindig veel elementen van S_1 en zodat S_0 een A-algebra is van eindig type. Beschouw het struktuur-morphisme

$$\begin{array}{c} \mathrm{Proj}(S) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle (g,G)} \\ \mathrm{Spec}(A) \end{array}$$

en noteer: $(X,\mathcal{O}_X) = \mathrm{Proj}(S)$. Zij V een gesloten deelverzameling van X. Dan is er volgens prop. (5.124) een quasi-coherent $\mathcal{O}_X$-ideaal $\mathcal{F}$ dat een gesloten deelpreschema $(V,\mathcal{O}_V)$ van $(X,\mathcal{O}_X)$ induceert. Dan is er volgens prop. (5.82) een gegradeerd ideaal $\underline{i}$ van S, zodat $(V,\mathcal{O}_V) \simeq \mathrm{Proj}(S/\underline{i})$, en zodat, als

$$\pi\colon S \longrightarrow S/\underline{i}$$

het kanonieke morphisme is, het diagram

$$\begin{array}{ccc} (V,\mathcal{O}_V) & \hookrightarrow & (X,\mathcal{O}_X) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \wr} & & \Big\| \\ \mathrm{Proj}(S/\underline{i}) & \xrightarrow[\mathrm{Proj}(\pi)]{} & \mathrm{Proj}(S) \end{array}$$

commuteert. Nu is $S/\underline{i}$ op kanonieke manier een gegradeerde A-algebra, en is $\mathrm{Proj}(S/\underline{i})$ een projectief Spec(A)-schema, waarvan het struktuur-morphisme door (g,G) wordt geïnduceerd (Ga na). Derhalve is het voldoende om te bewijzen dat, als $(f,F)\colon X \longrightarrow Y$ een projectief morphisme is, f(X) een gesloten deelverzameling is van Y, en dit volgt direkt met behulp van prop. (5.114).

§A. Appendix

Propositie A.1: (Lemma van Zorn)
Zij $(S,\prec)$ een partieel geordende verzameling. Als bij elke met $\prec$ lineair geordende deelverzameling T van S een element $t_0 \in S$ bestaat zodat $\forall t \in T.\ t \prec t_0$, dan is er een maximaal element $s_0 \in S$.

Bewijs: Zij bijvoorbeeld [K], pag. 33.

Gevolg A.2: Elk ideaal $\underline{a} \neq R$ van een ring R (commutatief, met eenheidselement) is bevat in een maximaal ideaal.

Bewijs: Pas het lemma van Zorn toe op het met de inclusie-relätie partiëel geordende systeem

$$\mathcal{V} := \{\underline{b} \mid \underline{b} \text{ ideaal van } R \text{ en } \underline{a} \subset \underline{b}\} \ .$$

Definitie A.3: Een commutatieve ring met eenheidselement R heet noethers als elke stijgende rij idealen

$$\underline{a}_1 \subsetneqq \underline{a}_2 \subsetneqq \cdots$$

na eindig veel echte inclusies afbreekt.

Propositie A.4: Voor een commutatieve ring met eenheidselement zijn de volgende drie uitspraken aequivalent:

(i) R is noethers.

(ii) Elke niet-lege verzameling idealen bevat een maximaal element.

(iii) Elk ideaal $\underline{a}$ van R is eindig voortgebracht.

Bewijs: Cf. [ZS], Ch. IV, §1.

Propositie A.5: Als R een noetherse ring is, dan is ook voor elke $n \in \mathbb{N}$ de polynoom-ring $R[X_1, \ldots, X_n]$ noethers.

Bewijs: Cf. [ZS], Ch. IV, §1.

Definitie A.6: Een ideaal $\underline{q}$ in een ring R heet primair als voor elk tweetal elementen $a, b \in R$ met $ab \in \underline{q}$ geldt:

$$a \notin \underline{q} \Longrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}.\ b^n \in \underline{q}\ .$$

Opmerking A.7: Als $\underline{q}$ een primair ideaal is, dan is $\sqrt{\underline{q}}$ een priem-ideaal.

Bewijs: Ga na.

Stelling A.8: Zij $\underline{a}$ een ideaal van de noetherse ring R. Dan bestaan er eindig veel primaire idealen $\underline{q}_1, \ldots, \underline{q}_t$ zodat

$$\underline{a} = \bigcap_{i=1}^{t} \underline{q}_i\ .$$

Kiest men dit stelsel $\{\underline{q}_i\}$ minimaal, dan geldt

$$i \neq j \Longrightarrow \sqrt{\underline{q}_i} \neq \sqrt{\underline{q}_j}$$

terwijl bovendien het stelsel priemidealen $\{\sqrt{\underline{q}_i}\}$ van zo'n minimaal stelsel éénduidig door $\underline{a}$ bepaald is.

Bewijs: Cf. [Wa] (II) §108 e.v.

Ga de meetkundige betekenis van deze stelling na!

Opmerking A.9: Als A een noetherse ring is, en M een eindig voortgebracht A-moduul, dan is elk sub-A-moduul van M ook eindig voortgebracht.

Bewijs: Cf. [CE], I, §7.

Tot slot enige opmerkingen over projectieve en injectieve limieten. We zullen hierbij begrippen zoals categorie, functor (co- en contravariant), functor-morphisme, duale categorie bekend veronderstellen. (Cf. bijvoorbeeld [Mi]).

Opmerking A.10: Zij $(I,\prec)$ een partieel geordend systeem. We kunnen dit systeem als volgt als categorie opvatten:

Objecten: De elementen van I.

Morphismen: (i) Als $\alpha,\beta \in I$ en $\alpha \prec \beta$, dan is er precies één morphisme $\phi^{\alpha}_{\beta}: \alpha \longmapsto \beta$.

(ii) Als $\alpha,\beta \in I$ en niet $\alpha \prec \beta$, dan is er geen morphisme van α naar β.

(iii) Als $\alpha,\beta,\gamma \in I$ en $\alpha \prec \beta \prec \gamma$, dan is $\phi^{\beta}_{\gamma} \circ \phi^{\alpha}_{\beta} = \phi^{\alpha}_{\gamma}$.

Uit (iii) volgt dat voor elke $\alpha \in I$ ϕ^{α}_{α} de identiteit is. Als we $(I,\prec)$ opvatten als categorie, dan noteren we:

$$\underline{(I,\prec)}$$

Definitie A.11: Een projectief systeem in een categorie $\underline{C}$ is een contravariante functor

$$\underline{(I,\prec)} \longrightarrow \underline{C}$$

voor enig partieel geordend systeem $(I,\prec)$.

Definitie A.12: Een injectief systeem in een categorie $\underline{C}$ is een covariante functor

$$\underline{(I,\prec)} \longrightarrow \underline{C}$$

voor enig partieel geordend systeem $(I,\prec)$.

Er bestaat slechts een louter formeel verschil tussen de definitie van een projectief systeem en die van een injectief systeem.

Zij nu

$$\theta: \underline{(I,\prec)} \longrightarrow \underline{Ens}$$

een projectief systeem in Ens. Dan hebben we voor iedere $i \in I$ een verzameling $X_i := \theta(i)$ en voor iedere $i,j \in I$ met $i \succ j$ een morphisme

$$\psi^i_j: X_i \longrightarrow X_j$$

gegeven door $\psi^i_j := \theta(\phi^j_i)$ (met de notaties van opm (A.10)). Er geldt dus, als $i \succ j \succ k$:

$$\psi^j_k \, \psi^i_j = \psi^i_k \quad .$$

Beschouw nu het cartesisch produkt $\prod_{i \in I} X_i$, tezamen met de kanonieke projecties

$$\{\tau_\alpha : \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow X_\alpha\}_{\alpha \in I} \ .$$

Definieer als volgt een deelverzameling van ΠX_i:

$$X := \{(x_i)_i \in \Pi X_i \mid \text{als } i \succ j, \text{ dan } \psi^i_j(x_i) = x_j\}$$

en voor elke $\alpha \in I$ een morphisme

$$\pi_\alpha := [X \hookrightarrow \Pi X_i \xrightarrow{\tau_\alpha} X_\alpha] \ .$$

Definitie A.13: Het paar $(X, \{\pi_\alpha\}_{\alpha \in I})$ heet de projectieve limiet in Ens van het projectieve systeem $\{X_i, \psi^i_j\}$. Notatie:

$$\varprojlim_I X_i := (X, \{\pi_\alpha\}) \ .$$

(Deze notatie is slordig!).

<u>Opmerking A.14</u>: (Met de notaties uit de voorgaande definitie). Zij Y een verzameling, en laat voor elke $\alpha \in I$ een afbeelding

$$\eta_\alpha : Y \longrightarrow X_\alpha$$

gegeven zijn, zodat, steeds als $\alpha \succ \beta$, het diagram

$$\begin{tikzcd}
 & X_\alpha \arrow[dd, "\psi^\alpha_\beta"] \\
Y \arrow[ur, "\eta_\alpha"] \arrow[dr, "\eta_\alpha"'] & \\
 & X_\beta
\end{tikzcd}$$

commuteert. Dan is er <u>precies één</u> afbeelding

$$\eta : Y \longrightarrow X$$

zodat voor elke $\alpha \in I$ het diagram

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dd, "\pi_\alpha"] \\
Y \arrow[ur, "\eta"] \arrow[dr, "\eta_\alpha"'] & \\
 & X_\alpha
\end{tikzcd}$$

commuteert. (Ga na).

<u>Opmerking A.15</u>: Als we twee projectieve systemen

$$\theta : \underline{(I,\prec)} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}} \quad ; \quad \theta' : \underline{(I,\prec)} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}}$$

bij hetzelfde partieel geordende systeem $(I,\prec)$ hebben, en als we noteren:

$$X_i := \theta(i) \quad ; \quad X_i' := \theta'(i) \quad ; \quad \psi^i_j := \theta(\phi^j_i) \quad ; \quad \rho^i_j := \theta'(\phi^j_i)$$

(als $i \succ j$) en als bovendien voor elke $i \in I$ er een afbeelding

$$a_i : X_i \longrightarrow X_i'$$

gegeven is zodat voor $i,j \in I$ met $i \succ j$ het diagram

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "a_i"] \arrow[d, "\psi^i_j"'] & X_i' \arrow[d, "\rho^i_j"] \\ X_j \arrow[r, "a_j"'] & X_j' \end{tikzcd}$$

commuteert, dan is er op kanonieke manier een door het stel $\{a_i\}$ bepaalde afbeelding

$$\varprojlim_I X_i \xrightarrow{a} \varprojlim_I X_i'$$

zodat, als

$$\pi_\alpha : \varprojlim_I X_i \longrightarrow X_\alpha \quad ; \quad \pi_\alpha' : \varprojlim_I X_i' \longrightarrow X_\alpha'$$

de kanonieke projecties zijn, voor elke $\alpha \in I$ het diagram

$$\begin{tikzcd} \varprojlim_I X_i \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\pi_\alpha"'] & \varprojlim_I X_i' \arrow[d, "\pi_\alpha'"] \\ X_\alpha \arrow[r, "a_\alpha"] & X_\alpha' \end{tikzcd}$$

commuteert. (Ga na). Bovendien, als elke a_α een isomorphisme is, is ook a een isomorphisme, Laten nu $\underline{C}$ en $\underline{D}$ twee categorieën zijn. Dan noteren we

$$\underline{\mathrm{Hom}}[\underline{C},\underline{D}]$$

voor de categorie, die we verkrijgen door als objecten te nemen de covariante functoren van $\underline{C}$ naar $\underline{D}$ en als morphismen de functor-morphismen. De verzameling van functor-morphismen van een object F naar een object G uit deze categorie geven we aan met

$$[F,G] .$$

We noteren verder

$$\underline{\mathrm{Hom}}[\underline{C}^0,\underline{D}]$$

voor de categorie van contra-variante functoren van $\underline{C}$ naar $\underline{D}$ en hun functor-morphismen. Ook nu geven we de verzameling van functor-morphismen van een contra-variante functor F naar een contra-variante functor G uit deze categorie aan met

$$[F,G] .$$

Opmerking A.16: Zij nu

$$F \in \underline{\mathrm{Hom}}[\underline{C},\underline{\mathrm{Ens}}] .$$

Als A een object is uit $\underline{C}$, dan definiëren we een covariante functor

$$H^A: \underline{C} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}}$$

met

$$\begin{cases} H^A(X) := \underline{C}(A,X) & \text{als } X \in \underline{C} \\ H^A(\phi)(\xi) := \phi \circ \xi & \text{als } \phi \in \underline{C}(X,Y) \text{ en } \xi \in H^A(X) . \end{cases}$$

(Deze functoren we ook wel met $\underline{C}(A,-)$;) Beschouw nu

$$\Phi \in [H^A, F] \ .$$

Dan hebben we een element $\eta \in F(A)$, gedefinieerd door:

$$\begin{cases} \Phi(A) : H^A(A) \longrightarrow F(A) \\ \qquad\qquad \mathrm{id} \longmapsto \eta \end{cases}$$

Omgekeerd, als $\eta \in F(A)$, dan is er bij η een $\Phi_\eta \in [H^A, F]$ te definiëren:
Zij namelijk $X \in \underline{C}$. Definieer:

$$\begin{cases} \Phi_\eta(X) : H^A(X) \longrightarrow F(X) \\ \qquad\qquad \xi \longmapsto F(\xi)(\eta) \end{cases}$$

Omdat, als $\alpha \in \underline{C}(X,Y)$, het diagram

$$\begin{tikzcd} H^A(X) \arrow[r, "\Phi_\eta(X)"] \arrow[d, "H^A(\alpha)"'] & F(X) \arrow[d, "F(\alpha)"] \\ H^A(Y) \arrow[r, "\Phi_\eta(Y)"'] & F(Y) \end{tikzcd}$$

commuteert (ga na), is Φ_η een functor-morphisme.

<u>Propositie A.17</u>: <u>(Yoneda-lemma). Er is een bijectie</u>

$$\begin{cases} [H^A, F] \rightleftarrows F(A) \\ \quad \Phi \longmapsto \Phi(A)(\mathrm{id}) \\ \quad \Phi_\eta \longleftarrow\!\shortmid \eta \end{cases}$$

(<u>met de notaties uit de vorige opmerking</u>).

Bewijs: We moeten laten zien dat beide gegeven afbeeldingen elkaars inversen zijn, en dat is direkt te controleren.

Definitie A.18: Zij $F \in \underline{Hom}[\underline{C},\underline{Ens}]$ en zij $A \in \underline{C}$. Dan zeggen we dat, als $\eta \in F(A)$, het paar (A,η) de covariante functor F represen-teert, als het in opm. (A.16) bij η geconstrueerde functor-morphisme Φ_η een isomorphisme is. In dat geval heet F representeerbaar.

Opmerking A.19: Zij $F \in \underline{Hom}[\underline{C},\underline{Ens}]$, en $A,A' \in \underline{C}$ met $\eta \in F(A)$ en $\eta' \in F(A')$, en laten (A,η) en (A',η') beide de functor F representeren. Dan is er een isomorphisme $\lambda: A \xrightarrow{\sim} A'$, zodat bovendien $\lambda(\eta) = \eta'$.

Bewijs: λ wordt als volgt verkregen:

$$\begin{cases} H^{A'}(A') \xrightarrow[\sim]{\Phi_{\eta'}(A')} F(A') \xrightarrow[\sim]{\Phi_\eta^{-1}(A')} H^A(A') \\ \quad \mathrm{id} \longmapsto \lambda \end{cases}$$

(Ga na).

Zij nu $G \in \underline{Hom}[\underline{C}^0,\underline{Ens}]$ en zij A een object van $\underline{C}$. We hebben een bij A te construeren contra-variante functor H_A, gegeven door:

$$\begin{cases} H_A(X) := \underline{C}(X,A) \in \underline{Ens} & \text{als } X \in \underline{C} \\ H_A(\phi)(\xi) := \xi \circ \phi & \text{als } \phi \in \underline{C}(X,Y) \text{ en } \xi \in H_A(Y) \end{cases}$$

H_A wordt ook wel genoteerd met $\underline{C}(-,A)$. Bij elk functor-morphisme

$$\Phi \in [H_A,G]$$

vinden we een element $\Phi(A)(\mathrm{id}) \in G(A)$, en omgekeerd kunnen we bij elke $\eta \in G(A)$ weer een functor-morphisme $\Phi_\eta \in [H_A,G]$ definiëren door te nemen:

$$\begin{cases} \Phi_\eta(X): H_A(X) \longrightarrow G(X) \\ \qquad\qquad\quad \xi \longmapsto G(\xi)(\eta) \end{cases}$$

(Ga na).

<u>Propositie A.20</u>: (<u>Duale Yoneda-lemma</u>). <u>Er is een bijectie</u>

$$\begin{cases} [H_A,G] \rightleftarrows G(A) \\ \quad \Phi \longmapsto \Phi(A)(id) \\ \quad \Phi_\eta \longleftarrow\!\shortmid \eta \end{cases}$$

<u>Bewijs</u>: Ga na.

<u>Definitie A.21</u>: Als $G \in \underline{Hom}[\underline{C}^0,\underline{Ens}]$ en $A \in \underline{C}$, $\eta \in G(A)$, dan <u>representeert het paar (A,η) de contravariante functor G</u> als het bij η geconstrueerde functor-morphisme $\Phi_\eta \in [H_A,G]$ een isomorphisme is. Ook nu heet G in dat geval <u>representeerbaar</u>.

<u>Opmerking A.22</u>: Als $G \in \underline{Hom}[\underline{C}^0,\underline{Ens}]$; $A,A' \in \underline{C}$; $\eta \in G(A)$, $\eta' \in G(A')$, en als (A,η) en (A',η') beide G representeren, dan is er een isomorphisme $\lambda: A \xrightarrow{\sim} A'$ zodat $\lambda(\eta) = \eta'$.

<u>Bewijs</u>: Ga na.

<u>Opmerking A.23</u>: Zij $\underline{C}$ een categorie en $(I,\prec)$ een partieel geordend systeem. Zij

$$\theta: \underline{(I,\prec)} \longrightarrow \underline{C}$$

een projectief systeem. Zij steeds $X_i := \theta(i)$ en $\psi_j^i = \theta(\phi_i^j)$. Kies nu $Y \in \underline{C}$. Voor elke $i \in I$ hebben we dan een verzameling $\underline{C}(Y,X_i) \in \underline{Ens}$. Als $i,j \in I$ met $i \succ j$, dan hebben we bovendien afbeeldingen

$$\begin{cases} \kappa^i_j(Y) : \underline{C}(Y,X_i) \longrightarrow \underline{C}(Y,X_j) \\ \qquad\qquad\qquad \alpha \longmapsto \psi^i_j \circ \alpha \end{cases}$$

Bovendien geldt, als $i \succ j \succ k$, dat

$$\kappa^j_k(Y) \circ \kappa^i_j(Y) = \kappa^i_k(Y)$$

zodat we een projectief systeem

$$\{\underline{C}(Y,X_i),\ \kappa^i_j(Y)\}$$

in <u>Ens</u> vinden. We hebben derhalve een projectieve limiet in <u>Ens</u>:

$$\varprojlim \underline{C}(Y,X_i)$$

en we kunnen aan elke $Y \in \underline{C}$ zo'n verzameling toevoegen. Zij nu $\beta \in \underline{C}(Y_1,Y_2)$ Dan hebben we voor elke $i \in I$ een afbeelding

$$\begin{cases} \underline{C}(Y_1,X_i) \xleftarrow{\ \beta^*_i\ } \underline{C}(Y_2,X_i) \\ \qquad \alpha \circ \beta \longleftarrow\!\shortmid\ \alpha \end{cases}$$

en voor elke $i,j \in I$ met $i \succ j$ commuteert het diagram

$$\begin{tikzcd} \underline{C}(Y_1,X_i) \arrow[d, "\kappa^i_j(Y_1)"'] & \underline{C}(Y_2,X_i) \arrow[l, "\beta^*_i"'] \arrow[d, "\kappa^i_j(Y_2)"] \\ \underline{C}(Y_1,X_j) & \underline{C}(Y_2,X_j) \arrow[l, "\beta^*_j"] \end{tikzcd}$$

Volgens opm. (A.15) bepalen de afbeeldingen β^*_i op kanonieke manier een morphisme

$$\varprojlim_I \underline{C}(Y_1,X_i) \xleftarrow{\beta^*} \varprojlim_I \underline{C}(Y_2,X_i) .$$

We hebben zo een contra-variante functor

$$\varprojlim_I \underline{C}(-,X_i) \in [\underline{C}^0,\underline{Ens}]$$

ingevoerd.

<u>Definitie A.24</u>: Als $\underline{C}$ een categorie is, en de hiervoor gedefinieerde contra-variante functor

$$\varprojlim_I \underline{C}(-,X_i) \in [\underline{C}^0,\underline{Ens}]$$

is representeerbaar, en wordt gerepresenteerd door het paar

$$(X,(p_i)_i)$$

met $X \in \underline{C}$ en $(p_i)_i \in \varprojlim_I \underline{C}(X,X_i)$, dan heet $(X,(p_i)_i)$ de <u>projectieve limiet</u> in $\underline{C}$ van het projectieve systeem

$$\{X_i,\psi_j^i\}$$

, ook (slordig!) genoteerd met

$$\varprojlim_I X_i .$$

<u>Opmerking A.25</u>: <u>Er bestaat een functorieel isomorphisme</u>

$$\varprojlim_I \underline{C}(Y,X_i) \xleftarrow{\sim} \underline{C}(Y,\varprojlim_I X_i)$$

$$(p_i\ \xi)_i \longleftarrow\!\shortmid\ \xi$$

<u>Bewijs</u>: Ga na.

<u>Opgave</u>: Vertaal de vorige opmerking tot een propositie, analoog aan opm. (A.14).

<u>Opmerking A.26</u>: Als $(X,\{p_i\}_i)$ en $(X',\{p_i'\}_i)$ beide projectieve limiet zijn van het zelfde projectieve systeem, dan bestaat er een isomorphisme $X \xrightarrow{\sim} X'$ zodat het diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "p_i"'] & & X \arrow[dl, "p_i'"] \\ & X_i & \end{tikzcd}$$

commuteert voor elke $i \in I$. (Cf. opm. (A.22)).

We kunnen, door de voorgaande definitie van een projectieve limiet in een categorie $\underline{C}$ te dualiseren, de injectieve limiet in $\underline{C}$ definiëren:
Zij

$$\{X_i, \psi_j^i \mid i,j \in I,\ i \prec j\}$$

een injectief systeem in $\underline{C}$. Kies $Y \in \underline{C}$ en definieer een projectief systeem in $\underline{Ens}$ als volgt: Als $i \in I$, dan hebben we de verzameling

$$\underline{C}(X_i, Y) \in \underline{Ens}$$

en als $i,j \in I$ met $i \prec j$, dan is er een morphisme

$$\begin{cases} \kappa_j^i(Y):\ \underline{C}(X_j, Y) \longrightarrow \underline{C}(X_i, Y) \\ \qquad\qquad\qquad \xi \longmapsto \xi \circ \psi_j^i \end{cases}$$

Dan is

$$\{\underline{C}(X_i, Y),\ \kappa_j^i(Y)\}$$

een projectief systeem in $\underline{\text{Ens}}$, zodat we een projectieve limiet

$$\varprojlim \underline{C}(X_i, Y)$$

hebben voor elke $Y \in \underline{C}$. Als voorts $\beta \in \underline{C}(Y_1, Y_2)$, dan hebben we voor elke $i \in I$ een morphisme

$$\beta_*^{(i)} : \underline{C}(X_i, Y_1) \longrightarrow \underline{C}(X_i, Y_2)$$

$$\xi \longmapsto \beta \circ \xi$$

en het is direkt te verifiëren dat de diagrammen

$$\begin{tikzcd}
\underline{C}(X_i, Y_1) \arrow[r, "\beta_*^{(i)}"] & \underline{C}(X_i, Y_2) \\
\underline{C}(X_j, Y_1) \arrow[u, "\kappa_i^j(Y_1)"] \arrow[r, "\beta_*^{(j)}"] & \underline{C}(X_j, Y_2) \arrow[u, "\kappa_i^j(Y_2)"']
\end{tikzcd}$$

commuteren, zodat er volgens opm. (A.15) een kanoniek morphisme

$$\varprojlim_I \underline{C}(X_i, Y_1) \xrightarrow{\beta_*} \varprojlim_I \underline{C}(X_j, Y_2)$$

bestaat. Hiermee hebben we een covariante functor

$$\varprojlim_I \underline{C}(X_i, -) \in [\underline{C}, \underline{\text{Ens}}]$$

gevonden.

<u>Definitie A.27</u>: Als deze functor representeerbaar is, en het paar $(X, \{q_i\}_i)$ met $X \in \underline{C}$ en

$$\{q_i\}_i \in \varprojlim_I \underline{C}(X_i, X)$$

representeert hem, dan heet dit paar de <u>injectieve limiet</u> in $\underline{C}$ van het injectieve systeem

$$\{X_i, \psi_j^i\} \;,$$

ook (slordig) genoteerd met

$$\varinjlim_I X_i \quad .$$

<u>Opmerking A.28</u>: Er bestaat een functorieel (in Y) isomorphisme

$$\begin{cases} \varprojlim_I \underline{C}(X_i, Y) \xleftarrow{\sim} \underline{C}(\varinjlim_I X_i, Y) \\[1ex] \qquad \{\xi \circ q_i\}_i \longleftarrow\!\shortmid\; \xi \end{cases}$$

en als $(X,(q_i)_i)$ en $(X',(q_i')_i)$ beide injectieve limiet zijn van hetzelfde systeem, dan is er een isomorphisme $X \xrightarrow{\sim} X'$ zodat het diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\sim"] & & X' \\ & X_i \arrow[ul, "q_i"] \arrow[ur, "q_i'"'] & \end{tikzcd}$$

commuteert.

Enige bijzondere gevallen:

(i) <u>I = {1,2}, geen orde-relaties</u>: Dan, als $\{X_i\}$ een bijbehorend projectief systeem is, wordt de projectieve limiet (zo deze bestaat) gegeven door een diagram

$$X_1 \xleftarrow{p_1} X \xrightarrow{p_2} X_2$$

met de eigenschap dat elk diagram

$$X_1 \xleftarrow{\xi_1} Y \xrightarrow{\xi_2} X_2$$

op precies één manier kan worden afgemaakt tot een commutatief diagram

$$\begin{tikzcd} X_1 & X \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & X_2 \\ & Y \arrow[ul, "\xi_2"] \arrow[u, "\xi"] \arrow[ur, "\xi_1"'] & \end{tikzcd}$$

(X,p_1,p_2) heet het <u>produkt</u> van X_1 en X_2. Analoog voor elke verzameling I zonder orderelaties.
Als nu $\{X'_i\}$ een bij I behorend injectief systeem is heet de injectieve limiet $\{X',q_1,q_2\}$ de <u>som</u> van X_1 en X_2, en wordt (zo hij bestaat) gekarakteriseerd door diagrammen die duaal zijn aan die voor het produkt.

<u>Voorbeeld</u>: Als de categorie <u>Ab</u> is, dan is $X = X_1 \oplus X_2$, met de kanonieke projecties $p_i: X \longrightarrow X_i$ $(i = 1,2)$. Ook is $X' = X'_1 \oplus X'_2$ met de morphismen

$$\left\{\begin{array}{l} q_1: X'_1 \longrightarrow X'_1 \oplus X'_2 \\ \quad a \longmapsto a \oplus 0 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{l} q_2: X'_2 \longrightarrow X' \oplus X'_2 \\ \quad b \longmapsto 0 \oplus b \end{array}\right.$$

Een analoge situatie hebben we in elke moduul-categorie $\underline{M}_R$. In <u>CRg</u> hebben we voor het produkt een analoge situatie als in <u>Ab</u>. Voor de som echter niet. (q_1 en q_2 zouden het eenheidselement niet in het eenheidselement $(1,1)$ van X' overvoeren). Toch bestaat in <u>CRg</u> wel de som: (X',q_1,q_2) wordt daar gegeven door

$$\left\{\begin{array}{ccccc} X'_1 & \xrightarrow{q_1} & X'_1 \otimes_{\mathbb{Z}} X'_2 & \longleftarrow & X'_2 \\ a & \longmapsto & a \otimes 1 & & \\ & & 1 \otimes b & \longleftarrow\!\shortmid & b \end{array}\right.$$

In de categorie van commutatieve A-algebra's met eenheidselement $\underline{\text{CAlg}}_A$ wordt X' gegeven door $X_1'\otimes_A X_2'$.

(ii) <u>I:= {1,2,3} met de orderelaties $2 \prec 1$ en $2 \prec 3$</u>: Zij $\{X_1', X_2', X_3';\ \alpha_1\colon X_2' \longrightarrow X_1';\ \alpha_3\colon X_2' \longrightarrow X_3'\}$ een bij I behorend injectief systeem in een categorie $\underline{C}$. Dan wordt de injectieve limiet $\{X'; q_1, q_2, q_3\}$, zo deze bestaat, bepaald door de volgende eigenschap: Als $Y \in \underline{C}$ en het diagram

$$\begin{tikzcd} X_2' \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & X_3' \arrow[d, "\xi_3'"] \\ X_1' \arrow[r, "\xi_1'"'] & Y \end{tikzcd}$$

commuteert, dan is er precies één $\xi'\colon X' \longrightarrow Y$ zodat het diagram

$$\begin{tikzcd} X_2' \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & X_3' \arrow[d, "q_3"] \arrow[ddr, bend left, "\xi_3'"] & \\ X_1' \arrow[r, "q_1"'] \arrow[drr, bend right, "\xi_1'"'] & X' \arrow[dr, "\xi"] & \\ & & Y \end{tikzcd}$$

commuteert. (Ga na; merk ook op: $q_2 = q_3 \circ \alpha_3 = q_1 \circ \alpha_1$). Deze injectieve limiet heet de <u>gevezelde som</u> van X_1' en X_3' over X_2' en wordt genoteerd met

$$X_1' \sum_{X_2'} X_3'$$

<u>Voorbeeld</u>: Als $\underline{C} = \underline{\text{CRg}}$, dan zijn X_3' en X_1' twee X_2'-algebra's, dan voldoet de ring

$$X' = X_1' \otimes_{X_2'} X_3'$$

waarbij q_1, q_2, q_3 gegeven zijn door:

$$\left\{\begin{array}{l} X_1' \xrightarrow{q_1} X_1' \otimes_{X_2'} X_3' \\ x_1 \longmapsto x_1 \otimes 1 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{l} X_3' \xrightarrow{q_3} X_1' \otimes_{X_2'} X_3' \\ x_3 \longmapsto 1 \otimes x_3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} X_2' \xrightarrow{q_2} X_1' \otimes_{X_2'} X_3' \\ x_2 \longmapsto \alpha_1(x_2) \otimes 1 = 1 \otimes \alpha_3(x_2) \end{array}\right.$$

Als $\underline{C} = \underline{Ab}$, dan verkrijgen we (X', q_1, q_2, q_3) als volgt: Zij $X'' := X_1' \oplus X_2' \oplus X_3'$. Zij N de ondergroep van X", voortgebracht door de elementen van de vorm

$$(\alpha_1(x_2), -x_2, 0) \quad \text{en} \quad (0, -x_2, \alpha_3(x_2)) \ .$$

Dan is $X' = {}^{X''}/N$ en q_1, q_2, q_3 zijn de betreffende kanonieke morphismen. (Ga na). Zij nu

$$\{X_1, X_2, X_3;\ \beta_1 : X_1 \longrightarrow X_2;\ \beta_3 : X_3 \longrightarrow X_2\}$$

een bij I behorend projectief systeem in de categorie $\underline{C}$. Dan wordt de projectieve limiet bepaald door de universele eigenschap, duaal aan die van de gevezelde som, zoals hiervoor aangegeven, en heet het <u>gevezeld produkt</u> van X_1 en X_3 over X_2. (zo deze projectieve limiet bestaat).

<u>Voorbeeld</u>: Als $\underline{C} = \underline{CRg}$, dan is dit gevezeld produkt (dat in het algemeen met

$$X_1 \Pi_{X_2} X_3$$

wordt aangegeven) de deelverzameling van $X_1 \oplus X_3$, gevormd door de elementen van de vorm (x_1,x_3) waarvoor geldt: $\beta_1(x_1) = \beta_3(x_3)$. (Ga na). Analoog voor Ab, Gr, Ens.

Definitie A.29: Zij $\underline{C}$ een categorie. Een object $pt \in \underline{C}$ heet punt-object als er voor elk object $Y \in \underline{C}$ precies één morphisme $Y \longrightarrow pt$ bestaat.

Definitie A.30: Een object $cpt \in C$ heet een copunt-object als er voor elk object $Y \in \underline{C}$ precies één morphisme $cpt \longrightarrow Y$ bestaat.

(Bijvoorbeeld: $\mathbb{Z} \in$ CRg; $\phi \in$ Ens).

Opmerking: pt en cpt zijn (zo zij bestaan) op een isomorphisme na éénduidig bepaald. Ga na dat men pt en cpt ook met behulp van representeerbare functoren kan definiëren.

Definitie A.31: Een object $0 \in \underline{C}$ heet een nul-object als 0 zowel punt- als copunt-object is.

Opmerking A.32: Als $\underline{C}$ een categorie is met nul-object en gevezelde produkten, dan is de kern van elk morphisme een gevezeld produkt.

Bewijs: Kies als projectief systeem (als $\alpha: X \longrightarrow Y$ het betreffende morphisme is),

$$(X,Y,0;\ \alpha: X \longrightarrow Y,\ 0 \longrightarrow Y)$$

als 0 het nul-object is van $\underline{C}$. (Ga na)

Opmerking A.33: Door dualisatie van opm. (A.32) volgt dat in een categorie $\underline{C}$ met nul-object en gevezelde sommen, elke cokern een gevezelde som is.

Nu nog enige incidentele opmerkingen.

Opmerking A.34: Zij $\underline{C}$ een categorie en zijn A en B twee objecten uit $\underline{C}$. Dan hebben we:

$$H_A \simeq H_B \Longleftrightarrow A \simeq B.$$

Bewijs: Definieer $\lambda := \Phi(A)(\mathrm{id}) \in \underline{C}(A,B)$ en $\mu := \Phi(B)^{-1}(\mathrm{id}) \in \underline{C}(B,A)$ als

$$\Phi: H_A \xrightarrow{\sim} H_B$$

het functor-isomorphisme is. Uit de commutativiteit van de diagrammen

$$\begin{tikzcd} H_A(B) \arrow[r, "H_A(\lambda)"] \arrow[d, "\Phi(B)"', "\wr"] & H_A(A) \arrow[d, "\Phi(A)", "\wr"'] \\ H_B(B) \arrow[r, "H_B(\lambda)"'] & H_B(A) \end{tikzcd} \quad ; \quad \begin{tikzcd} H_B(A) \arrow[r, "H_B(\mu)"] & H_B(B) \\ H_A(A) \arrow[r, "H_A(\mu)"'] \arrow[u, "\Phi(A)", "\wr"'] & H_A(B) \arrow[u, "\Phi(B)"', "\wr"] \end{tikzcd}$$

volgt dan dat $\lambda \circ \mu = \mathrm{id}$ en $\mu \circ \lambda = \mathrm{id}$.

Opmerking A.35: Zij $\underline{C}$ een categorie met gevezelde produkten en zij $\eta \in \underline{C}(Y,Z)$. We hebben dan een gevezeld produkt

$$\begin{tikzcd} Y \Pi_Z Z \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Z \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ Y \arrow[r, "\eta"'] & Z \end{tikzcd}$$

p_1 is dan een isomorphisme.

Bewijs: Volgens de definitie van een projectieve limiet hebben we een functorieel (in X) isomorphisme

$$\underline{C}(X, Y\Pi_Z Z) \simeq \underline{C}(X,Y)\Pi_{\underline{C}(X,Z)}\underline{C}(X,Z)$$

zodat het volgens opmerking (A.34) voldoende is, te bewijzen dat de projectie

$$\underline{C}(X,Y)\Pi_{\underline{C}(X,Z)}\underline{C}(X,Z) \longrightarrow \underline{C}(X,Y)$$

in Ens een isomorphisme is. Met andere woorden: Het is voldoende om de bewering te bewijzen in het geval $\underline{C} = \underline{\text{Ens}}$. In dat geval wordt de projectie p_1 gegeven door:

$$\begin{cases} Y\Pi_Z Z = \{(y,z) \in Y\Pi Z \mid \eta(y) = z\} \xrightarrow{\sim} Y \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (y,z) \longmapsto y \end{cases}$$

zodat de bewering bewezen is.

Opgave: Bewijs op da manier van de vorige opmerking, dat het in opm. (3.41) vermelde kanonieke morphisme

$$X\Pi_S Y \longrightarrow S\Pi_{S\Pi_T S}(X\Pi_T Y)$$

een isomorphisme is.

Opmerking A.36: Zij $(I,\prec)$ een partieel geordend systeem. Zij $J \subset I$, zodat geldt:

$$\begin{cases} \text{(i)} & \forall i \in I \, \exists j \in J.\ i \prec j \\ \text{(ii)} & \forall j_1, j_2 \in J \, \exists j_0 \in J.\ j_1 \prec j_0 \text{ en } j_2 \prec j_0 \end{cases}$$

Zij voorts $\{X_i, \psi_j^i\}_I$ een bij $(I,\prec)$ behorend injectief systeem in een categorie $\underline{C}$. Dan is ook $\{X_i, \psi_j^i\}_{i,j \in J}$ een injectief systeem. Er geldt:

$$\varinjlim_I X_i \simeq \varinjlim_J X_i \ .$$

<u>Bewijs</u>: We hebben voor elke $i \in J$ een kanoniek morphisme

$$q_i : X_i \longrightarrow \varinjlim_I X_\alpha$$

zodat de diagrammen

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[d, "\psi^i_j"'] \arrow[dr, "q_i"] & \\
& \varinjlim_I X_\alpha \\
X_j \arrow[ur, "q_j"'] &
\end{tikzcd}$$

commuteren. Dan is er een éénduidig bepaald morphisme

$$q : \varinjlim_J X_i \longrightarrow \varinjlim_I X_i$$

dat bepaald wordt door het stel $\{q_i \mid i \in J\}$, en er is een door q geïnduceerd functiorieel (in Y) morphisme

$$\underline{C}(\varinjlim_J X_i, Y) \longleftarrow \underline{C}(\varinjlim_I X_i, Y)$$

(Ga na). Dit induceert, wegens de definitie van een injectieve limiet, een functorieel morphisme

$$\varprojlim_J \underline{C}(X_i, Y) \simeq \underline{C}(\varinjlim_J X_i, Y) \longleftarrow \underline{C}(\varinjlim_I X_i, Y) \simeq \varprojlim_I \underline{C}(X_i, Y)$$

zodat het volgens opm. (A.34) voldoende is, om te bewijzen dat dit morphisme een isomorphisme is. Met andere woorden: Het is voldoende om te bewijzen, dat als $\{Y_i, \psi_i^j\}_I$ een bij $(I, \prec)$ behorend projectief systeem is in <u>Ens</u>, en $\{Y_i, \psi_i^j\}_J$ het bij $(J, \prec)$ behorend deel-systeem hiervan is, het kanonieke morphisme (duaal geconstrueerd als q)

$$\pi : \varprojlim_I Y_i \longrightarrow \varprojlim_J Y_j$$

bijectief is. Welnu:

$$\begin{cases} \varprojlim\limits_{I} Y_i = \{(y_i) \in \prod\limits_{I} Y_i \mid \psi_i^j(y_j) = y_i \quad \text{als } i \prec j\} \\[2ex] \varprojlim\limits_{I} Y_i = \{(y_j) \in \prod\limits_{J} Y_i \mid \psi_i^j(y_j) = y_i \quad \text{als } i \prec j\} \end{cases}$$

π wordt nu expliciet gegeven door:

$$\begin{cases} \pi\colon \varprojlim\limits_{I} Y_i \longrightarrow \varprojlim\limits_{J} Y_j \\[2ex] \qquad (y_i)_{i \in I} \longmapsto (y_i)_{i \in J} \end{cases}$$

(i) <u>π is injectief</u>: Beschouw twee elementen

$$(y_i)_I, (y_i')_I \in \varprojlim_{I} Y_i$$

en neem aan dat voor elke $i \in J$ geldt: $y_i = y_i'$. Kies nu $j \in I$. Dan is er een $i \in J$ te vinden zodat $j \prec i$. Dan is $\psi_j^i(y_i) = y_j$ en $\psi_j^i(y_i') = y_j'$, zodat wegens $y_i = y_i'$ volgt: $y_j = y_j'$.

(ii) <u>π is surjectief</u>: Beschouw een element

$$(y_i)_J \in \varprojlim_{J} Y_i \ .$$

Kies $i \in I$. Dan is er een $j \in J$ zodat $i \prec j$. Definieer nu:

$$y_i' := \psi_i^j(y_j) \ .$$

Dan is voor elke $j \in J$ $\quad y_j' = y_j$, en als $i_1 \succ i_2$ met $i_1, i_2 \in I$, dan geldt, als

$$y_{i_1}' = \psi_{i_1}^{j_1}(y_{j_1}) \quad ; \quad y_{i_2}' = \psi_{i_2}^{j_2}(y_{j_2})$$

met $j_1, j_2 \in J$,

$$\psi^{i_1}_{i_2}(y'_{i_1}) = \psi^{i_1}_{i_2}\,\psi^{j_1}_{i_1}(y_{j_1}) = \psi^{i_1}_{i_2}\,\psi^{j_1}_{i_1}\,\psi^{j_0}_{j_1}(y_{j_0}) =$$

$$= \psi^{j_0}_{i_2}(y_{j_0}) = \psi^{j_2}_{i_2}\,\psi^{j_0}_{j_2}(y_{j_0}) = \psi^{j_2}_{i_2}(y_{j_2}) = y'_{i_2}$$

als $j_0 \in J$ gekozen wordt, zodat $j_0 \succ j_1$ en $j_0 \succ j_2$. Derhalve is

$$(y'_i)_I \in \varprojlim_{I} Y_i$$

en ook $\pi(y'_i)_I = (y_i)_J$.

<u>Opmerking A.37</u>: Laten $(I,\prec)$ en $(J,\prec)$ twee partiëel geordende systemen zijn. Dan is met de orderelatie

$$(i_1,j_1) \prec (i_2,j_2) \iff i_1 \prec i_2 \text{ en } j_1 \prec j_2$$

ook $(I\Pi J,\prec)$ een partieel geordend systeem. (We geven - slordig - in deze drie systemen de orderelatie steeds met $\prec$ aan). Zij nu

$$\theta : \underline{(I\Pi J,\prec)} \longrightarrow \underline{C}$$

een injectief systeem in een categorie met injectieve limieten $\underline{C}$, en noteer:

$$X_{i,j} := \theta(i,j) \quad ; \quad \psi^{i_1,j_1}_{i_2,j_2} := \theta(\phi^{i_1 j_1}_{i_2 j_2}) \quad \text{als } (i_1,j_1) \prec (i_2,j_2) \; .$$

Voor elke $j \in J$ hebben we dan een injectief systeem

$$\{X_{i,j}; \psi^{i_1 j_1}_{i_2 j_2}\}_{i_1 \prec i_2} \qquad \text{bij } (I,\prec) \text{ in } \underline{C} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(i)}$$

Dus is er voor elke $j \in J$ een injectieve limiet van dit systeem (i), aangegeven met

$$X_j := \varinjlim_{I} X_{i,j} \ .$$

Zij nu $j_1, j_2 \in J$ met $j_1 \prec j_2$. Dan hebben we voor elke $i \in I$ een morphisme

$$\psi_{i,j_2}^{i,j_1} : X_{i,j_1} \longrightarrow X_{i,j_2}$$

terwijl, als $i_1 \prec i_2$ met $i_1, i_2 \in I$ het diagram

$$\begin{tikzcd} X_{i_1,j_1} \arrow[r] \arrow[d] & X_{i_1,j_2} \arrow[d] \\ X_{i_2,j_1} \arrow[r] & X_{i_2,j_2} \end{tikzcd}$$

commuteert. We verkrijgen zo een morphisme

$$\psi_{j_2}^{j_1} : X_{j_1} \longrightarrow X_{j_2} \ .$$

(cf. opm. (A.15)), en derhalve een injectief systeem

$$\{X_j, \psi_{j_2}^{j_1}\}_{j_1 \prec j_2}$$

en daarbij een injectieve limiet

$$X := \varinjlim_{J} X_j = \varinjlim_{J} \varinjlim_{I} X_{i,j} \ .$$

<u>Bewering</u>: Er is een kanoniek isomorphisme

$$X \simeq \varinjlim_{I \amalg J} X_{ij} \ .$$

Bewijs: Kies $(i,j) \in I \Pi J$ en beschouw het kanonieke morphisme

$$X_{ij} \longrightarrow \varinjlim_{I} X_{ij} \longrightarrow \varinjlim_{J} \varinjlim_{I} X_{ij} = X \quad .$$

Dan commuteren de diagrammen

$$\begin{tikzcd}
X_{i_1,j_1} \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& X \\
X_{i_2,j_2} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

als $(i_1,j_1) \prec (i_2,j_2)$. Derhalve is er een uniek bepaald kanoniek morphisme

$$\varinjlim_{I\Pi J} X_{i,j} \longrightarrow X$$

en een hierdoor geïnduceerd morphisme, functorieel in Y,

$$\underline{C}(\varinjlim_{I\Pi J} X_{i,j}, Y) \longleftarrow \underline{C}(X,Y) \quad .$$

Dit induceert (Cf. de definitie van een injectieve limiet) een functorieel (in Y) kanoniek morphisme

$$\varprojlim_{I\Pi J} \underline{C}(X_{i,j}, Y) \longleftarrow \varprojlim_{J} \varprojlim_{I} \underline{C}(X_{i,j}, Y) \quad .$$

Volgens opm. (A.34) is het voldoende om te bewijzen dat dit functoriele morphisme een bijectie is. Met andere woorden: We kunnen volstaan met het bewijzen van de volgende bewering:

Als $\{X_{i,j}; \psi^{i_1,j_1}_{i_2,j_2}\}_{(i_1,j_1) \succ (i_2,j_2)}$ een projectief systeem is in Ens bij het partieel geordende systeem $(I\Pi J, \prec)$, dan is het kanonieke morphisme

$$\varprojlim_{I\Pi J} X_{i,j} \longleftarrow \varprojlim_{J} \varprojlim_{I} X_{i,j} \qquad \text{.............(ii)}$$

een isomorphisme. Dit laatste laat zich gemakkelijk expliciet verifiëren. (Ga na).

Opgave: Ga na hoe men de commutativiteit van diagrammen, zoals in opm. (3.41) kan controleren, door te verifiëren dat de overeenkomstige diagrammen in Ens commuteren.

Index

Lijst van symbolen

Spec(R) (top. ruimte)	1.1
D(a)	1.2
$\sqrt{\underline{a}}$	1.8
$V(\underline{a})$	1.1
Spec(f)	1.13
$S^{-1}R$	1.18
$R_{\underline{p}}$	1.19
R_a	1.20
$\underline{X}$ (X is een top. ruimte)	2.1
$\underline{P}[-,\underline{C}]$	2.8
Spec(R) (affien schema)	2.17
$\underline{\underline{\text{Presch}}}$	3.5
$\underline{\underline{\text{Presch}}}_S$	3.14
$S^{-1}M$	4.3
$\tilde{M}$	4.2
$M_{\underline{p}}$	4.4
M_a	4.5
$\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$	4.11
$\mathcal{M}^n$	4.12
$\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}$	4.14
$\overset{n}{\otimes} \mathcal{M}$	4.16
$\sum \mathcal{M}_\alpha$	4.21
$\mathcal{M}^{(I)}$	4.22
$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N})$	4.23
ψ_*	4.61

Literatuur

[M] D. Mumford, Introduction to Algebraic Geometry; (Preliminary version of first 3 Chapters); Harvard University.

[W] A. Weil; Foundations of Algebraic Geometry; Am. Math. Soc., Vol. XXIX, (1946).

[Mu] J.P. Murre; Lectures on an introduction to Grothendieck's theory of the fundamental group; TATA-institute of fundamental research, Bombay, (1967).

[G] A. Grothendieck - J. Dieudonné; Eléments de Géometrie Algébrique, Chap. 0, I, II; Publ. Math. I.H.E.S. Paris.

[F.A.C.] J.-P. Serre; Faisceaux algébriques cohérents; Ann. Math. Vol. 61 No. 2 (1955).

[K] J.L. Kelley; General Topology; van Nostrand, New York.

[ZS] O. Zariski - P. Samuel; Commutative Algebra; van Nostrand, New York.

[Wa] B.L. van der Waerden; Algebra; Springer, Berlin.

[CE] Cartan-Eilenberg; Homological Algebra; Princeton.

[Mi] Mitchell; Theory of Categories, Academic Press, New York.