stichting
mathematisch
centrum

MC

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE ZC 84/71 MEI

O. BOTTEMA

ENIGE ONGELIJKHEDEN IN EEN DRIEHOEK

VOORDRACHT IN DE SERIE "ELEMENTAIRE ONDERWERPEN VANUIT HOGER STANDPUNT BELICHT"

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Enige ongelijkheden in een driehoek.

1. Een driehoek is door drie gegevens bepaald en dus in het algemeen ook door de straal R van de omgeschreven cirkel, de straal r van de ingeschreven cirkel en de omtrek 2s. Het is wel duidelijk dat niet elk drietal positieve getallen T, r en s een (reële) driehoek zal opleveren. Wij weten al twee eeuwen dat in elke driehoek geldt $R \geq 2r$. Verder zal bij geschikte R en r (waardoor zoals bekend is ook de afstand van de middelpunten der betrokken cirkels vast ligt) voor s een boven- en een ondergrens bepaald zijn. Wij trachten een noodzakelijke en voldoende voorwaarde af te leiden waar R, r en s aan moeten voldoen opdat de driehoek bestaat.

2. De grootheden R, r en s zijn symmetrische functies van de zijden a, b en c van de driehoek. Omgekeerd gaat men gemakkelijk na dat de drie elementaire symmetrische veeltermen a+b+c, bc+ca+ab en abc in R, r en s kunnen worden uitgedrukt. Men kan dus een vergelijking van de derde graad opstellen met van R, r en s afhankelijke coëfficiënten, waarvan a, b, c, de wortels zijn. De voorwaarde luidt dan dat deze vergelijking drie positieve wortels heeft, waarvan elke kleiner is dan de som der beide andere. Daar de laatste restrictie de berekening moeizaam maakt kan men beter een vergelijking opstellen met $u_1 = -a+b+c$, $u_2 = a-b+c$ en $u_3 = a+b-c$ tot wortels. De enige conditie is dan dat deze wortels positief zijn; immers dan is $2a = u_2+u_3 > 0$, $2b > 0$, $2c > 0$, terwijl aan de driehoeksongelijkheid zonder meer is voldaan.

3. Dit programma uitvoerend heeft men dadelijk

$$u_1 + u_2 + u_3 = 2s \tag{3.1}$$

Is F de oppervlakte van de driehoek dan is $F = rs$, $4FR = abc$, $8F^2 = su_1u_2u_3$, zodat

$$u_1u_2u_3 = 8sr^2 \tag{3.2}$$

Minder eenvoudig schijnt de berekening van de overgebleven coëfficiënt té moeten verlopen. Zijn r_a, r_b, r_c de stralen der aangeschreven cirkels dan is $r_a = F/(s-a)$, enz., waaruit volgt

$$r_a + r_b + r_c - r = 4R \tag{3.3}$$

Nu is $r = (s-b)\text{tg}\,\tfrac{1}{2}\beta$, $r_a = (s-c)\cot\tfrac{1}{2}\beta$ en dus $rr_a = (s-b)(s-c)$, en bij gevolg

$$\begin{aligned} r(4R+r) &= (s-b)(s-c) + (s-c)(s-a) + (s-a)(s-b) \\ &= bc + ca + ab - s^2, \end{aligned} \tag{3.4}$$

zodat

$$\begin{aligned} u_2u_3 + u_3u_1 + u_1u_2 &= \{a^2-(b-c)^2\} + \{b^2-(c-a)^2\} + \{c^2-(a-b)^2\} \\ &= -(a^2+b^2+c^2) + 2(bc+ca+ab) \\ &= -(a+b+c)^2 + 4(bc+ca+ab) \\ &= 4r(4R+r) \end{aligned} \tag{3.5}$$

De gevraagde vergelijking luidt dus

$$u^3 - 2su^2 + 4r(4R+r)u - 8sr^2 = 0 \tag{3.6}$$

Men vindt haar b.v. bij A. Laisant, Géométrie du triangle, (Paris 1896), p.112. Daar geen wortel negatief kan zijn luidt de (enige) voorwaarde voor R,r en s: de wortels van (3.6) zijn reëel.
Door de substitutie $u = 2v + \frac{2}{3}s$ gaat (3.6) over in een vergelijking waarin de tweede term ontbreekt:

$$v^3 + pv + q = 0, \tag{3.7}$$

waarbij

$$p = \frac{1}{3}(12Rr+3r^2-s^2), \quad q = \frac{2}{27}s(18Rr-9r^2-s^2) \tag{3.8}$$

De vergelijking (3.7) heeft reële wortels als $4p^3 + 27q \leq 0$.
Daaruit volgt de conditie voor R, r en s:

$$(12Rr+3r^2-s^2)^3 + s^2(18Rr-9r^2-s^2)^2 \leq 0 \tag{3.9}$$

Werkt men haar uit, dan vallen de termen s^6 en Rrs^4 weg. Het linkerlid bevat de factor $27r^2$ en de noodzakelijke en voldoende voorwaarde waaraan de positieve getallen R, r en s moeten voldoen opdat de driehoek bestaat,

$$(r^2+s^2)^2 + 12Rr^3 - 20Rrs^2 + 48R^2r^2 - 4R^2s^2 + 64R^3r \leq 0 \quad (3.10)$$

4. Om een indruk te krijgen van de verzameling der getallen-tripels R, r, s, die aan 3.10 voldoen, merken wij op dat het linkerlid een uiteraard homogene veelterm is, zodat het alleen op de onderlinge verhoudingen van R, r en s aankomt. Wij voeren de uitdrukkingen $x = \frac{r}{R}$ en $y = \frac{s}{r}$ in en interpreteren x en y als rechthoekige coördinaten in een beeldvlak OXY. De ongelijkheid wordt dan

$$k \equiv (x^2+y^2)^2 + 12x^3 - 20xy^2 + 48x^2 - 4y^2 + 64x \leq 0 \qquad (4.1)$$

en de gevraagde verzameling is dus die der punten (x_1y) uit het eerste kwadrant, die aan (4.1) voldoen. Zij bestaat uit de punten òp de kromme K met vergelijking k = 0 èn de punten aan een nader te bepalen kant van K, terwijl de punten aan de andere kant niet met een driehoek corrsponderen. De gedaante van K en haar ligging in het OXY-vlak zullen nader moeten worden bepaald. Uit (4.1) blijkt dat K een Kromme van de vierde graad is. Zij ligt in een begrensd deel van het vlak want haar snijpunten met de oneigenlijke rechte l zijn imaginair (K raakt aan l in de isotrope punten). Verder gaat K door de oorsprong O; zij is symmetrisch t.o.v. de X-as.
Een nadere discussie zou zich kunnen richten op een onderzoek naar eventuele dubbelpunten van K, terwijl voor een schets van haar gedaante dankbaar de omstandiheid gebruikt kan worden dat k = 0 een vierkantsvergelijking in y^2 is. Wij zien van een discussie van (4.1) af omdat langs een andere weg eenvoudiger uitsluitsel kan worden verkregen.

5. Als in 3.9 het gelijkteken geldt dan is $4p^3 + 27q^2 = 0$ en de kubische vergelijking (3.6) heeft twee gelijke wortels, waaruit volgt dat de driehoek gelijkbenig is. De conclusie luidt: punten die in het beeld-

vlak op K liggen corresponderen met gelijkbenige driehoeken. Als in driehoek ABC geldt AC = BC = a, AB = c, BAC = ϕ, dan is c = 2a cos ϕ, $h_c = a \sin\phi$, $F = a^2 \sin\phi \cos\phi$, $s = a(1+\cos\phi)$, $r = a \sin\phi \cos\phi/(1+\cos\phi)$, $R = a/2 \sin\phi$ en dus

$$x = 2\cos\phi\,(1-\cos\phi), \quad y = 2\sin\phi\,(1+\cos\phi) \tag{5.1}$$

en daarmee hebben wij voor K een voorstelling verkregen waarbij de coördinaten van haar punten functies zijn van de parameter ϕ. Door eliminatie van ϕ uit (5.1) zal men de vergelijking k = 0 uit (4.1) terugvinden. De gehele kromme wordt afgebeeld op $0 \leq \phi < 2\pi$, voor punten van K die met driehoeken corresponderen geldt $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ en dus in (5.1) inderdaad $x > 0$, $y > 0$.
Voor $\mathrm{tg}\frac{1}{2}\phi = t$ gaat (5.1) over in

$$x = 4\,\frac{t^2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, \quad y = \frac{8t}{(1+t^2)^2} \tag{5.2}$$

K is dus een rationale kromme van de vierde graad. Zo'n kromme heeft altijk drie dubbelpunten. Een eenvoudige berekening leert dat aan $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$ voldaan wordt door de parameterwaarden $t_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ en $t_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$. Zij wijzen keerpunten aan en wel de punten $A_1 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3})$ en $A_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{3})$.
Het derde dubbelpunt moet wegens de symmetrie op de x-as liggen; de vergelijking y = 0 heeft de wortel t = 0 en de drievoudige wortel $t = \infty$. Met de laatste correspondeert dus opnieuw een keerpunt en wel $A_3 = (-4,0)$. K is een kromme van de vierde graad met drie keerpunten. Bovendien is $A_2A_3 = A_3A_1 = A_1A_2 = 3\sqrt{3}$; de keerpunten zijn de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek. De slotconclusie luidt:
K is de hypocycloïde van Steiner. Deze ontstaat zoals bekend als baan van een punt van een cirkel (bij ons met straal 1) indien deze rolt binnen een cirkel met een straal die drie maal zo groot is; zij is ook bekend als de omhullende van de Simson Wallace rechten van een willekeurige driehoek.

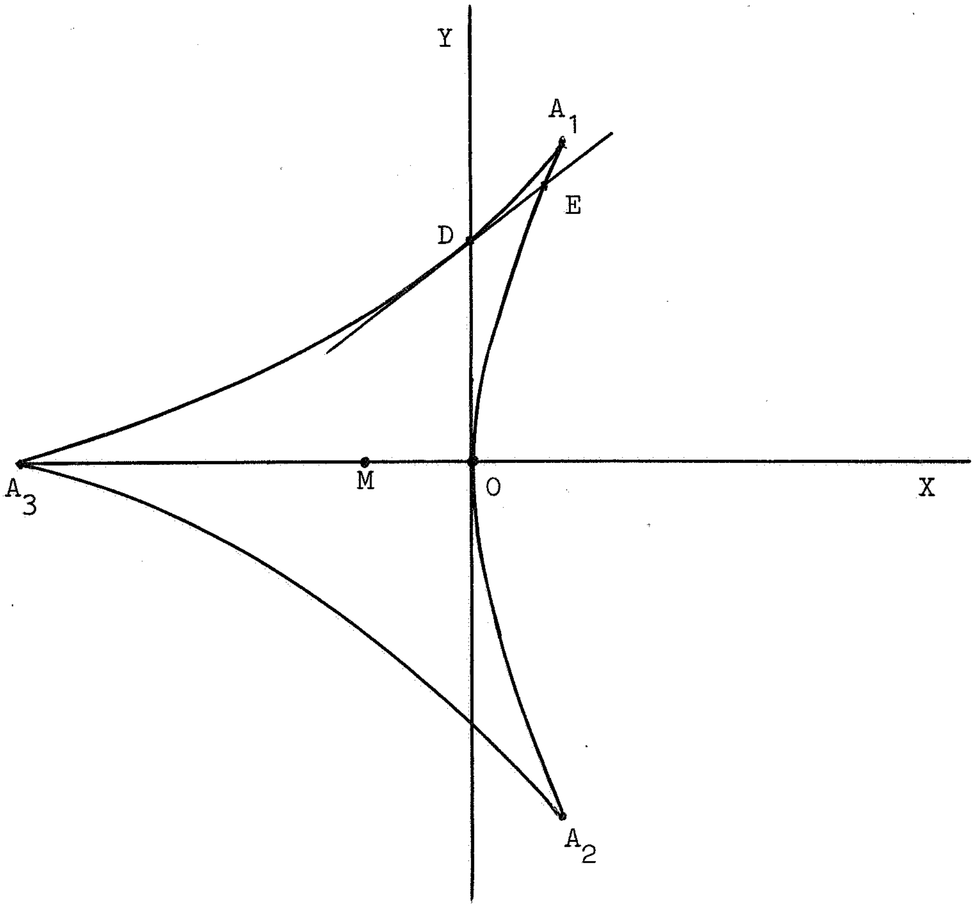

fig. 1

K is in fig. 1 geschetst; haar middelpunt is $M = (-1,0)$, door M gaan de drie keerraaklijnen. Alleen het stuk OA_1D $(0 < t < 1)$ is voor ons van betekenis. Met A_1 correspondeert de gelijkzijdige driehoek $(\frac{r}{R} = \frac{1}{2}, \frac{s}{R} = \frac{3}{2}\sqrt{3})$, voor de eindpunten O en $D = (0,2)$ is de driehoek ontaard. De punten tussen A_1 en O (resp. tussen A_1 en D) zijn beeldpunten van gelijkbenige driehoeken met een tophoek groter (resp. kleiner) dan $\frac{\pi}{3}$. De ongelijkheden 3.9 resp. 4.1 gelden voor punten op of <u>binnen</u> de hypocycloïde. Daaruit volgt tenslotte dat de verzameling der getallentripels R, r, s afgebeeld wordt op het gebied G begrensd door de bogen A_1O en A_1D en door de lijn OD. Uit de geschetste situatie volgen gemakkelijk enige <u>lineaire</u> ongelijkheden voor R, r en s. Daar A_1 het meest rechtse punt van G is heeft men voor elk beeldpunt $x \leq \frac{1}{2}$; dus is $R \geq 2r$, de klassieke betrekking van Euler. Daar A_1 het hoogste punt van G is geldt $y \leq \frac{3}{2}\sqrt{3}$ of wel $s \leq \frac{3}{2}\sqrt{3}\,R$, G ligt geheel boven of op de

rechte OA_1 met de vergelijking $y = 3\sqrt{3}\,x$, waaruit volgt $s \geq 3\sqrt{3}r$, evenals de vorige een bekende ongelijkheid. Tenslotte volgt uit het feit dat G zich niet boven DA_1, met de vergelijking $(3\sqrt{3}-4)x-y+2 = 0$ uitstrekt dat $s \leq (3\sqrt{3}-4)r+2R$, een betrekking die enige jaren geleden door W.J. Blundon werd afgeleid [Canad. Math. Bull. 8 (1965), 615-626; Amer. Math. Monthly 73 (1966), Problem E 1935, 1122].
Zoals men weet is in een scherphoekige, een rechthoekige en een stomphoekige driehoek $s-z-2R$ resp. positief, nul en negatief. Daaruit volgt dat door D de rechte $x-y+2 = 0$ gaat die in G de beeldpunten van scherphoekige en van stomphoekige driehoeken scheidt; het punt $E(\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1)$ correspondeert met de rechthoekige gelijkbenige driehoek.