STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

ZWA 1966-4

(Syllabus van een interne voordracht)

Een toepassing van de theorie der Banach-algebra's in de klassieke Fourier-analyse

door

J. van de Lune

November 1966

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February, 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O.) and the Central Organization for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Een toepassing van de theorie der Banach-algebra's in de klassieke Fourier-analyse

0. Inleiding

Het doel van deze voordracht is, met behulp van de theorie der maximale idealen in Banach-algebra's, een modern bewijs te geven van de volgende stelling van N. Wiener:

Is de funktie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ te ontwikkelen in een absoluut convergente Fourier-reeks

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{int} \qquad (\alpha_n \in \mathbb{C};\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n| < \infty),$$

en is $f(t) \neq 0$ voor elke $t \in \mathbb{R}$, dan kan ook de funktie $\frac{1}{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (met $\frac{1}{f}(t) = \frac{1}{f(t)}$) worden ontwikkeld in een absoluut convergente Fourier-reeks

$$\frac{1}{f(t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \beta_n e^{int} \qquad (\beta_n \in \mathbb{C};\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\beta_n| < \infty).$$

1. Definitie 1.1. De verzameling X heet een algebra (over het lichaam $\mathbb{C}$) indien

(i) X een lineaire ruimte is (over $\mathbb{C}$),
(ii) X een ring is, met de vectoroptelling als opteloperatie,
(iii) voor elke $\alpha \in \mathbb{C}$ en alle $x,y \in X$ geldt

$$\alpha(x \cdot y) = (\alpha x) \cdot y = x \cdot (\alpha y).$$

Definitie 1.2. De algebra X heet een genormeerde algebra indien

(i) X, als lineaire ruimte over $\mathbb{C}$, genormeerd is; d.w.z. op X is een reëelwaardige funktie $||x||$ gedefiniëerd met de volgende eigenschappen

$$||x|| = 0 \iff x = 0$$
$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$
$$||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x|| \qquad (\alpha \in \mathbb{C};\ x \in X),$$

(ii) $$||x \cdot y|| \leq ||x|| \cdot ||y||.$$

Definitie 1.3. De genormeerde algebra X heet een Banach-algebra indien X, als genormeerde lineaire ruimte over $\mathbb{C}$, volledig is; d.w.z. bij elke rij $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ in X, met de eigenschap

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\ N \in \mathbb{N})(n,m > N \Longrightarrow ||x_n - x_m|| < \varepsilon),$$

bestaat een $x_0 \in X$, zodanig dat

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\ N \in \mathbb{N})(n > N \Longrightarrow ||x_n - x_0|| < \varepsilon).$$

Anders gezegd: Een Banach-algebra X is een genormeerde algebra, waarin elke Cauchy-rij convergeert (naar een punt van X).

Stelling 1.1. In een genormeerde algebra zijn de optelling, de ring-vermenigvuldiging en de scalaire vermenigvuldiging continue operaties.

Bewijs:

(i) $$||(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)|| = ||(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)|| \leq$$

$$\leq ||x_1 - x_2|| + ||y_1 - y_2|| < \varepsilon$$

zodra $||x_1 - x_2|| < \frac{\varepsilon}{2}$ en $||y_1 - y_2|| < \frac{\varepsilon}{2}$; we hebben hier dus zelfs uniforme continuïteit.

(ii) $$||x \cdot y - x_0 \cdot y_0|| = ||x \cdot y - x \cdot y_0 + x \cdot y_0 - x_0 \cdot y_0|| =$$

$$= ||x(y - y_0) + (x - x_0) \cdot y_0|| \leq ||x|| \cdot ||y - y_0|| +$$

$$+ ||x - x_0|| \cdot ||y_0|| < \varepsilon$$

zodra $||x - x_0|| < \dfrac{\varepsilon}{2(||y_0|| + 1)}$

en $||y - y_0|| < \dfrac{\varepsilon}{2||x_0|| + \dfrac{\varepsilon}{||y_0|| + 1}}$.

(iii) $$||\alpha x - \alpha_0 x_0|| = ||\alpha x - \alpha x_0 + \alpha x_0 - \alpha_0 x_0|| \leq$$

$$\leq |\alpha|\ ||x - x_0|| + |\alpha - \alpha_0|\ ||x_0|| < \varepsilon$$

zodra $|\alpha - \alpha_0| < \dfrac{\varepsilon}{2(||x_0|| + 1)}$

en $|x - x_0| < \dfrac{\varepsilon}{2|\alpha_0| + \dfrac{\varepsilon}{||x_0|| + 1}}$.

Definitie 1.4. In een algebra X met eenheidselement e geven we de verzameling van alle eenheden (= inverteerbare elementen) aan met de letter U:

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid \text{er bestaat in } X \text{ een } x^{-1} \text{ zodanig dat } x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e\}.$$

Stelling 1.2. Zij X een Banach-algebra met eenheidselement e; is $||x - e|| < 1$, dan is $x \in U$, terwijl

$$x^{-1} = e + \sum_{n=1}^{\infty} (e - x)^n.$$

Bewijs:

We tonen eerst aan dat genoemde reeks convergeert. Zij $||x - e|| = k < 1$; de rij

$$S_N = e + \sum_{n=1}^{N} (e - x)^n \text{ is een Cauchy-rij in } X$$

wegens: $$||S_{N+p} - S_N|| = ||\sum_{n=N+1}^{N+p} (e - x)^n|| \leqq \sum_{n=N+1}^{N+p} ||(e - x)^n|| \leqq$$

$$\leqq \sum_{n=N+1}^{N+p} k^n \leqq \sum_{n=N+1}^{\infty} k^n = \frac{k^{N+1}}{1-k} \to 0 \text{ als } N \to \infty.$$

Omdat X volledig is convergeert S_N dus naar een punt $x^* = e + \sum_{n=1}^{\infty} (e-x)^n \in X$.
Men gaat nu gemakkelijk na dat

$$x \circ x^* = \{e - (e - x)\}\{e + \sum_{n=1}^{\infty} (e - x)^n\} = e$$

en $$x^* \circ x = e, \text{ zodat } x^{-1} = e + \sum_{n=1}^{\infty} (e - x)^n.$$

Opmerking. Een nodige en voldoende voorwaarde voor de convergentie van de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ is: $\lim_{n\to\infty} ||x^n||^{\frac{1}{n}} < 1$ (deze limiet bestaat voor elke $x \in X$).
Op grond hiervan kunnen we stelling 1.2 verscherpen tot:

$$\lim_{n\to\infty} ||(x - e)^n||^{\frac{1}{n}} < 1 \implies x \in U.$$

<u>Stelling 1.3</u>. Zij X een Banach-algebra met eenheidselement e.
Is $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ en $||x|| < |\lambda|$ dan is $x - \lambda e \in U$ met

$$(\lambda e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x^n \quad (x^0 \overset{\text{def}}{=} e).$$

Bewijs:
Het is gemakkelijk in te zien dat, als a een eenheid is, ook $-a$ en αa ($\alpha \in \mathbb{C}; \alpha \neq 0$) eenheden zijn. Het is dus voldoende aan te tonen dat $e - \lambda^{-1}x$ een eenheid is; dit volgt evenwel met behulp van stelling 1.2 onmiddellijk uit

$$||e - (e - \lambda^{-1}x)|| = |\lambda^{-1}| \cdot ||x|| = \frac{||x||}{\lambda} < 1.$$

Nu geldt dus

$$(\lambda e - x)^{-1} = \lambda^{-1}(e - \lambda^{-1}x)^{-1} = \lambda^{-1}\{e + \sum_{n=1}^{\infty} (e - (e - \lambda^{-1}x))^n\} =$$

$$= \lambda^{-1}\{e + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} x^n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x^n.$$

<u>Stelling 1.4</u>. In een genormeerde algebra X met eenheidselement e is U een open verzameling.

Bewijs:
Zij x_0 een willekeurig punt uit U en beschouw alle $x \in X$ met $||x - x_0|| < \dfrac{1}{||x_0^{-1}||}$; we zullen aantonen dat deze bol om x_0 geheel tot U behoort.

$$||x \cdot x_0^{-1} - e|| = ||x \cdot x_0^{-1} - x_0 \cdot x_0^{-1}|| = ||(x - x_0) \cdot x_0^{-1}|| \leq$$

$$\leq ||x - x_0|| \cdot ||x_0^{-1}|| < 1 \implies x \cdot x_0^{-1} \in U.$$

Aangezien de eenheden in een ring een groep vormen en ook $x_0 \in U$, is ook $(x \cdot x_0^{-1}) \cdot x_0 = x \in U$. Met x_0 behoort dus de (open) bol $||x - x_0|| < \dfrac{1}{||x_0^{-1}||}$ tot U, zodat U een open verzameling is.

Stelling 1.5. Is X een Banach-algebra met eenheidselement e dan is de afbeelding $f: U \to U$ met $f(x) = x^{-1}$ continu.

Bewijs:
Zij $x_0 \in U$; beperken we $x \in U$ tot $||x - x_0|| < \frac{1}{||x_0^{-1}||}$ dan is

$$||x_0^{-1} \circ x - e|| = ||x_0^{-1}(x - x_0)|| \leq ||x_0^{-1}|| \circ ||x - x_0|| < 1$$

zodat

$$(x_0^{-1} \cdot x)^{-1} = x^{-1} \cdot x_0 = e + \sum_{n=1}^{\infty} (e - x_0^{-1} \circ x)^n$$

waaruit volgt dat

$$||x^{-1} \circ x_0 - e|| \leq \sum_{n=1}^{\infty} ||x_0^{-1}||^n \cdot ||x_0 - x||^n =$$

$$= \frac{||x_0^{-1}|| \cdot ||x_0 - x||}{1 - ||x_0^{-1}|| \circ ||x_0 - x||} \to 0 \quad \text{als } ||x_0 - x|| \to 0.$$

Met behulp hiervan is het bewijs gemakkelijk af te ronden:

$$||x^{-1} - x_0^{-1}|| = ||(x^{-1} \cdot x_0 - e)x_0^{-1}|| \leq$$

$$\leq ||x^{-1} \cdot x_0 - e|| \cdot ||x_0^{-1}|| \to 0 \quad \text{als } ||x_0 - x|| \to 0.$$

2. Definitie 2.1. Zij X een algebra met eenheidselement e en zij $x \in X$; onder het spectrum $\sigma(x)$ van x verstaan we de verzameling van alle complexe getallen λ waarvoor $x - \lambda e$ niet inverteerbaar is:

$$\sigma(x) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid x - \lambda e \notin U \}.$$

Bij het bewijs van de stelling dat voor elke $x \in X$ het spectrum $\sigma(x)$ niet leeg is zullen we gebruik maken van de volgende

<u>Stelling 2.1.</u> (Hahn-Banach-Bohnenblust-Sobszyk-Suchomlinov)
Zij X een lineaire ruimte over $\mathbb{C}$ en p een <u>halfnorm</u> op X.
Is X_0 een lineaire deelruimte van X en $f_0: X_0 \to \mathbb{C}$ een lineaire funktionaal op X_0 zodanig dat $|f_0(x)| \leq p(x)$ voor elke $x \in X_0$ dan bestaat er een lineaire funktionaal $f: X \to \mathbb{C}$ zodanig dat

(i) $f(x) = f_0(x)$ voor elke $x \in X_0$

(ii) $|f(x)| \leq p(x)$ voor elke $x \in X$.

Opmerkingen.
$p: X \to \mathbb{R}$ heet een <u>halfnorm</u> op X indien

(i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

(ii) $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$ voor elke $\lambda \in \mathbb{C}$.

Hieruit kan men afleiden dat $p(x) \geq 0$ op geheel X.

De afbeelding $f_0: X_0 \to \mathbb{C}$ heet een <u>lineaire funktionaal</u> op X_0 indien $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ voor alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ en alle $x, y \in X_0$.

Voor het bewijs van deze stelling verwijzen we naar de appendix.

<u>Stelling 2.2.</u> Zij X een genormeerde lineaire ruimte over $\mathbb{C}$, $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$; dan bestaat er een continue lineaire funktionaal f op X zodanig dat $f(x_0) = 1$.

Opmerking.
De lineaire funktionaal f op X heet <u>begrensd</u> indien $|f(x)| \leq K \cdot ||x||$ voor elke $x \in X$ en zekere constante $K \geq 0$. Een lineaire funktionaal f is dan en slechts dan continu als f begrensd is.

Bewijs:
Definiëer de begrensde funktionaal f_0 op het lineaire omhulsel $H\{x_0\}$ van x_0 als volgt

$$f_0(\lambda x_0) = \lambda.$$

Definiëren we p op geheel X als

$$p(x) = \frac{||x||}{||x_0||},$$

dan is aan alle voorwaarden van stelling 2.1 voldaan, zodat we kunnen zeggen dat er op X een lineaire funktionaal f bestaat zodanig dat

(i) $f(x) = f_0(x)$ voor elke $x \in H\{x_0\}$

(ii) $|f(x)| \leq p(x)$ voor elke $x \in X$.

We tonen nog aan dat deze f begrensd (en dus continu) is: voor elke $x \in X$ is

$$|f(x)| \leq p(x) = \frac{||x||}{||x_0||} = \frac{1}{||x_0||} \circ ||x||$$

waaruit volgt dat f begrensd is.
Verder is het duidelijk dat $f(x_0) = 1$.

<u>Definitie 2.2</u>. Zij G een open puntverzameling in het complexe vlak, X een Banach-ruimte en f een afbeelding van $G \to X$.
De afbeelding $f: G \to X$ heet <u>analytisch</u> in het punt $\lambda_0 \in G$ met als afgeleide $f'(\lambda_0) \in X$ indien

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta \in \mathbb{R})(|\lambda - \lambda_0| < \delta \implies ||(\lambda - \lambda_0)^{-1}(f(\lambda) - f(\lambda_0)) + - f'(\lambda_0)|| < \varepsilon).$$

f heet analytisch op G als f analytisch is in elk punt van G.

Opmerking.
Een analytische afbeelding is continu.

<u>Stelling 2.3</u>. X zij een Banach-ruimte.
Is $f: G \to X$ analytisch op $G \subset \mathbb{C}$ en is $\phi: X \to \mathbb{C}$ een begrensde lineaire funktionaal dan is $\phi f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, met $(\phi f)(\lambda) = \phi(f(\lambda))$, een complex-waardige analytische funktie op G, met als afgeleide funktie $\phi(f'(\lambda))$.

Bewijs:

$$(\lambda - \lambda_0)^{-1}\{(\phi f)(\lambda) - (\phi f)(\lambda_0)\} =$$

$$= (\lambda - \lambda_0)^{-1}\{\phi(f(\lambda)) - \phi(f(\lambda_0))\} =$$

$$= \phi\{(\lambda - \lambda_0)^{-1}(f(\lambda) - f(\lambda_0))\} \to \phi(f'(\lambda))$$

als $\lambda \to \lambda_0$, wegens de begrensdheid (= continuïteit) van ϕ.

Stelling 2.4. Is de afbeelding $f: \mathbb{C} \to X$ analytisch en begrensd (d.w.z. $||f(\lambda)|| \leqq K$ voor zekere constante K), dan is f een constante (in X).

Bewijs:

Zij ϕ een willekeurige begrensde funktionaal op X; dan is

$$|(\phi f)(\lambda)| = |\phi(f(\lambda))| \leqq K_1 \cdot ||f(\lambda)|| \leqq K_1 \cdot K.$$

De gehele funktie $\phi(f(\lambda))$ is dus begrensd, zodat volgens Liouville $\phi(f(\lambda))$ constant is op $\mathbb{C}$:

$$\phi(f(\lambda)) = c \in \mathbb{C}.$$

Dus $\qquad \phi(f(\lambda_1)) = \phi(f(\lambda_2))$ voor alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$;

omdat ϕ lineair is kunnen we ook schrijven

$$\phi\{f(\lambda_1) - f(\lambda_2)\} = 0;$$

aangezien ϕ een willekeurige begrensde lineaire funktionaal is op X, moet wegens stelling 2.2 wel gelden dat $f(\lambda_1) - f(\lambda_2) = 0$, of $f(\lambda_1) = f(\lambda_2)$ voor alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Gevolg: f is constant op $\mathbb{C}$.

Stelling 2.5. Zij X een Banach-algebra met eenheidselement e. Is de afbeelding $f: G \to U$ analytisch dan is ook $h: G \to U$ met $h(\lambda) = (f(\lambda))^{-1}$ analytisch op G.

Bewijs:

$$(\lambda - \lambda_0)^{-1}(h(\lambda) - h(\lambda_0)) = (\lambda - \lambda_0)^{-1}\{(f(\lambda))^{-1} - (f(\lambda_0))^{-1}\} =$$

$$= (\lambda - \lambda_0)^{-1}(f(\lambda))^{-1}\{f(\lambda_0) - f(\lambda)\}(f(\lambda_0))^{-1} =$$

$$= (f(\lambda))^{-1}\{(\lambda - \lambda_0)^{-1}(f(\lambda_0) - f(\lambda))\}(f(\lambda_0))^{-1};$$

op grond van de stellingen 1.1 en 1.4 volgt hieruit dat h analytisch is met

$$h'(\lambda_0) = -(f(\lambda_0))^{-1} \cdot f'(\lambda_0) \cdot (f(\lambda_0))^{-1}.$$

Stelling 2.6. Is X een Banach-ruimte met eenheidselement e, dan is voor elke $x \in X$ het spectrum $\sigma(x)$ niet leeg.

Bewijs:

Onderstel $\sigma(x) = \phi \iff x - \lambda e \in U$ voor elke $\lambda \in \mathbb{C}$. De afbeelding $f: \mathbb{C} \to U$ met $f(\lambda) = x - \lambda e$ is analytisch met $f'(\lambda) = -e$, zodat volgens de vorige stelling ook de afbeelding $h: \mathbb{C} \to U$ met $h(\lambda) = (x - \lambda e)^{-1}$ analytisch is op geheel $\mathbb{C}$. Men gaat gemakkelijk na dat

$$||(x - \lambda e)^{-1}|| \to 0 \quad \text{voor} \quad |\lambda| \to \infty.$$

De afbeelding h is dus analytisch en begrensd op $\mathbb{C}$ met als gevolg dat h volgens stelling 2.4 constant is:

$$(x - \lambda e)^{-1} = c \in U.$$

Uit het voorgaande volgt dat c wel gelijk aan $0 \in X$ moet zijn, maar dit is niet mogelijk wegens $0 \notin U$. We komen dus tot een tegenspraak.
Conclusie: $\sigma(x) \neq \phi$.

Stelling 2.7. Zij X een Banach-algebra met eenheidselement e, terwijl elke $x \in X$, behalve $x = 0$, inverteerbaar is (X is dus een lichaam); dan bestaat het spectrum $\sigma(x)$ voor elke $x \in X$ uit precies één $\lambda = \lambda(x) \in \mathbb{C}$ en elke $x \in X$ is te schrijven als $x = \lambda(x) \cdot e$.

Bewijs:

$\sigma(x)$ is niet leeg volgens de vorige stelling; is $\lambda \in \sigma(x)$ dan is $x - \lambda e$ niet inverteerbaar, zodat wel moet gelden $x - \lambda e = 0$ of $x = \lambda e$.
Het is verder duidelijk dat $\lambda_1 e = \lambda_2 e \implies \lambda_1 = \lambda_2$, zodat $\sigma(x)$ precies één $\lambda = \lambda(x) \in \mathbb{C}$ bevat.

Opmerking. Is $||e|| = 1$ dan volgt uit stelling 2.7 dat X en $\mathbb{C}$ isometrisch isomorf zijn.

3. Definitie 3.1. Zij X een commutatieve algebra over $\mathbb{C}$ en I een deelverzameling van X; dan heet I een ideaal van X indien

(i) I een lineaire deelruimte is van X

(ii) $\left.\begin{array}{l} a \in I \\ x \in X \end{array}\right\} \implies a \cdot x \in I.$

Het ideaal I van X heet een <u>eigenlijk ideaal</u> van X als $I \neq \{0\}$ en $I \neq X$.

Het eigenlijke ideaal M van X heet een <u>maximaal ideaal</u> van X als M in geen enkel eigenlijk ideaal eigenlijk bevat is; d.w.z. geldt voor zeker ideaal $I, M \subset I$ dan volgt daaruit òf $I = M$ of $I = X$.

<u>Stelling 3.1</u>. Is I een eigenlijk ideaal in de commutatieve genormeerde algebra X met eenheidselement e, dan is ook de afsluiting $\overline{I}$ van I in X een eigenlijk ideaal van X.

Bewijs:

(i) Zijn $x_0, y_0 \in \overline{I}$, dan zijn er in I twee rijen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ zodanig dat $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ en $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$.

I is een ideaal, zodat voor alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ geldt

$$\lambda x_n + \mu y_n \in I.$$

We tonen aan dat $\lambda x_0 + \mu y_0 \in \overline{I}$;

$$||(\lambda x_0 + \mu y_0) - (\lambda x_n + \mu y_n)|| \leqq |\lambda| \cdot ||x_0 - x_n|| + |\mu| \cdot ||y_0 - y_n|| \to 0$$

als $n \to \infty$.

$\overline{I}$ is dus een lineaire deelruimte van X.

(ii) Zij $x_0 \in \overline{I}$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ een rij in I met $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ en $x \in X$; dan is $x_n \cdot x \in I$. Wegens

$$||x_0 \cdot x - x_n \cdot x|| = ||(x_0 - x_n) \cdot x|| \leqq ||x_0 - x_n|| \cdot ||x|| \to 0$$

als $n \to \infty$

is ook $x_0 \cdot x \in \overline{I}$.

(iii) Nu nog aan te tonen dat $\overline{I}$ een eigenlijk ideaal is. Men gaat gemakkelijk na dat een eigenlijk ideaal I geen enkel element uit U bevat; dus $I \subset U^c$. Wegens stelling 1.4 is U^c gesloten, zodat $\overline{I} \subset U^c$. Wegens $e \notin U^c$ kunnen we concluderen dat $e \notin \overline{I}$, waaruit volgt dat $\overline{I}$ een eigenlijk ideaal is.

Een direct gevolg hiervan is

Stelling 3.2. In een commutatieve genormeerde algebra X met eenheidselement e is elk maximaal ideaal M gesloten; $M = \overline{M}$.

Stelling 3.3. Is X een commutatieve Banach-algebra met eenheidselement e, en M een maximaal ideaal in X, dan is de factor algebra X/M eveneens een commutatieve Banach-algebra met eenheidselement.

Bewijs:
X/M wordt een commutatieve algebra met eenheidselement door te definiëren

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & (x + M) + (y + M) = (x + y) + M \\ \text{(ii)} & \lambda(x + M) = \lambda x + M \quad (\lambda \in \mathbb{C};\ x \in X) \\ \text{(iii)} & (x + M) \cdot (y + M) = x \cdot y + M \end{array}$$

Op X/M wordt als volgt een norm gedefiniëerd

$$||x + M|| \overset{\text{def}}{=} \inf_{z \in M} ||x - z||.$$

We gaan na of dit inderdaad een norm is op X/M;

(i) $$||x + M|| = 0 \iff \inf_{z \in M} ||x - z|| = 0 \iff$$

$$\iff x \in \overline{M} = M \iff x + M = M \ (= 0 \in X/M)$$

(ii) $$||(x + M) + (y + M)|| = ||(x + y) + M|| =$$

$$= \inf_{z \in M} ||x + y - z|| = \inf_{z_1, z_2 \in M} ||(x - z_1) + (y - z_2)|| \leq$$

$$\leq \inf_{z_1 \in M} ||x - z_1|| + \inf_{z_2 \in M} ||y - z_2|| = ||x + M|| + ||y + M||$$

(iii) is $\lambda = 0$ dan is het duidelijk dat $||\lambda(x + M)|| =$ $= |\lambda|\ ||x + M||$; voor $\lambda \neq 0$ geldt $||\lambda(x + M)|| =$

$$= ||\lambda x + M|| = \inf_{z \in M} ||\lambda x - z|| = |\lambda| \inf_{z \in M} ||x - \lambda^{-1} z|| =$$

$$= |\lambda| \cdot ||x + M||.$$

Tenslotte tonen we nog aan dat X/M volledig is. Zij $\{x_n + M\}_{n=1}^{\infty}$ een Cauchy-rij in X/M; dan is bij elk natuurlijk getal een index n_k te vinden zodanig dat

$$||(x_{n_k} + M) - (x_j + M)|| < \frac{1}{2^k} \text{ voor alle } j > n_k$$

(we kunnen het zo inrichten dat $n_{k+1} > n_k$).

Kiezen we in de klasse $x_{n_1} + M$ het element $a_1 = x_{n_1}$ dan is er in $x_{n_2} + M$ zeker een element $a_2 \in X$ te vinden met de eigenschap $||a_1 - a_2|| < \frac{1}{2}$; vervolgens bevat $x_{n_3} + M$ zeker een element a_3 met de eigenschap $||a_2 - a_3|| < \frac{1}{2^2}$. Zo doorgaande vinden we dat $x_{n_k} + M$ een element a_k bevat zodanig dat $||a_k - a_{k-1}|| < \frac{1}{2^{k-1}}$, enz.

We definiëren nu

$$x_0 = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots ;$$

het is eenvoudig in te zien dat deze reeks convergeert.

Nu is

$$||(x_{n_k} + M) - (x_0 + M)|| = ||(x_{n_k} - x_0) + M|| =$$

$$= \inf_{z \in M} ||x_{n_k} - x_0 - z|| = \inf_{z \in M} ||(x_{n_k} - z) - x_0|| \leq$$

$$\leq ||a_k - x_0|| \leq ||a_{k+1} - a_k|| + ||a_{k+2} - a_{k+1}|| + \dots <$$

$$< \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \dots = \frac{1}{2^{k-1}} \to 0 \text{ als } k \to \infty.$$

De Cauchy-rij $\{x_n + M\}_{n=1}^{\infty}$ bevat dus een convergente deelrij $\{x_{n_k} + M\}_{k=1}^{\infty}$ met als gevolg dat $\{x_n + M\}_{n=1}^{\infty}$ zelf convergent is.

In X/M speelt de klasse $e + M$ de rol van het eenheidselement.

Stelling 3.4. Uit de moderne algebra is bekend dat X/M een lichaam is, zodra M een maximaal ideaal is in de commutatieve ring X met eenheidselement e. In aansluiting op stelling 3.3 kunnen we op grond van stelling 2.7 dus zeggen dat elk element $x + M \in X/M$ te schrijven is als $x + M = \lambda(x,M)(e + M)$.

De scalar $\lambda(x,M)$ heeft de volgende eigenschappen

(i) $\lambda(x + y, M) = \lambda(x,M) + \lambda(y,M)$

(ii) $\lambda(\alpha x,M) = \alpha\lambda(x,M)$

(iii) $\lambda(x \cdot y, M) = \lambda(x,M) \cdot \lambda(y,M)$

(iv) $\lambda(e,M) = 1$

(v) $\lambda(x,M) = 0 \iff x \in M$

(vi) $|\lambda(x,M)| \leq ||x||$ (als $||e|| = 1$)

Bewijs:

(i) $(x + y) + M = (x + M) + (y + M)$

dus: $\lambda(x + y, M)(e + M) = \lambda(x,M)(e + M) + \lambda(y,M)(e + M)$

zodat $\lambda(x + y, M) = \lambda(x,M) + \lambda(y,M)$

(ii) analoog

(iii) analoog

(iv) $e + M = \lambda(e,M)(e + M) \implies \lambda(e,M) = 1$

(v) $\lambda(x,M) = 0 \iff x + M = o(e + M) = M \iff x \in M$

(vi) $x + M = \lambda(x,M)(e + M)$

dus $||x + M|| = |\lambda(x,M)| \cdot ||e + M||$.

Het is duidelijk dat $||x + M|| \leq ||x||$ en $||e + M|| \leq ||e|| = 1$;
we zijn dus klaar als we kunnen aantonen dat $||e + M|| = 1$. Onderstel $||e + M|| < 1$;

$||e + M|| < 1 \implies \exists\, m \in M: ||e - m|| < 1 \implies$ (zie stelling 1.2) $m \in U$
$\implies$ M is geen maximaal ideaal.

Conclusie: $||e + M|| = 1$.

Gevolg: $|\lambda(x,M)| \leq ||x||$.

4. Definitie 4.1. De verzameling S heet partiëel geordend indien op S een relatie R gedefiniëerd is met de volgende eigenschappen

(i) $a\,R\,a$ voor alle $a \in S$

(ii) $\left.\begin{matrix} a\,R\,b \\ b\,R\,a \end{matrix}\right\} \implies a = b$

(iii) $\left.\begin{array}{l} a\ R\ b \\ b\ R\ c \end{array}\right\} \implies a\ R\ c.$

De relatie R geven we meestal aan met het teken $\leqq$.

Een deelverzameling K van S heet een <u>keten</u> als elk tweetal elementen van K onderling vergelijkbaar is; d.w.z. $(a,b \in K) \implies (a \leqq b$ óf $b \leqq a)$.

Een element $a \in S$ heet een <u>maximaal element</u> indien uit $a \leqq s$ (voor zekere $s \in S$) volgt $s = a$.

Anders gezegd: $a \in S$ heet een maximaal element als voor geen enkele $s \in S$ geldt: $a \leqq s$, $a \neq s$.

De partiële ordening $\leqq$ op S heet <u>inductief</u> indien bij elke keten K in S een $a \in S$ bestaat zodanig dat $k \leqq a$ voor alle $k \in K$ (d.w.z. K heeft in S een bovengrens).

In het vervolg zullen we een enkele maal gebruik maken van het met het keuzeaxioma equivalente

<u>Lemma van Zorn</u>. Is de partiële ordening $\leqq$ inductief op $S \neq \emptyset$, dan bestaat er bij elk element $s \in S$ een maximaal element $s^* \in S$ met de eigenschap $s \leqq s^*$.
Anders geformuleerd: Heeft elke keten in S een bovengrens in S dan ligt boven elke $s \in S$ een maximaal element $s^* \in S$.

<u>Stelling 4.1</u>. Zij x een niet-inverteerbaar element van de algebra X met eenheidselement e; dan is

$$(x) \overset{\text{def}}{=} \{xy \mid y \in X\}$$

een eigenlijk ideaal van X dat x als element bevat.

Bewijs:

(i) $x_1, x_2 \in (x) \implies x_1 = x \cdot y_1$ en $x_2 = x \cdot y_2$ voor zekere $y_1, y_2 \in X$; $\lambda y_1 + \mu y_2 \in X \implies x(\lambda y_1 + \lambda y_2) = \lambda x \cdot y_1 + \mu x \cdot y_2 =$
$= \lambda x_1 + \lambda x_2 \in (x)$.

(ii) $x_1 \in (x) \implies x_1 = x \cdot y_1$; is $y \in X$, dan is $x_1 \cdot y = x \cdot (y_1 \cdot y) \in (x)$.

(iii) $e \notin (x)$, want anders zou er in X een y bestaan zodanig dat $x \cdot y = e$. Dit zou in tegenspraak zijn met $x \notin U$. Gevolg: (x) is een eigenlijk ideaal.

(iv) $e \in X \implies x \cdot e = x \in (x)$.

Opmerking.
Elk niet-inverteerbaar element $x \in X$ is dus bevat in minstens een eigenlijk ideaal.

Stelling 4.2. Zij X een commutatieve algebra met eenheidselement e en I een eigenlijk ideaal van X; dan bestaat er in X een maximaal ideaal M dat I omvat.

Bewijs:
Zij S de verzameling van alle eigenlijke idealen die I omvatten; op S kunnen we als volgt een partiële ordening definiëren

$$I_1 \leq I_2 \iff I_1 \subset I_2 .$$

Zij $K = \{I_\alpha\}_{\alpha=A}$ een lineair geordende deelverzameling (= keten) van S; we tonen aan dat K in S een bovengrens heeft.
Definiëer $$I^* = \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha .$$
Nu is in het algemeen de vereniging van een stelsel idealen geen ideaal, maar omdat K lineair geordend is door inclusie kunnen we in dit geval wel zeggen dat I^* een ideaal is.
I^* is een eigenlijk ideaal omdat $e \notin I^*$, wegens $e \notin I_\alpha$ voor elke $\alpha \in A$. Het is duidelijk dat $I \subset I^*$. Gevolg: $I^* \in S$. Elke keten in S heeft dus een bovengrens in S. De partiële ordening $\leq$ is dus inductief op S, zodat volgens het lemma van Zorn boven elk element van S een maximaal element ligt. Zo'n maximaal element moet wel een maximaal ideaal zijn dat I omvat.

Stelling 4.3. Bij elke $x \notin U$ bestaat een maximaal ideaal M zodanig dat $x \in M$.

Bewijs:
Dit is een direct gevolg van de stellingen 4.1 en 4.2.

5. We gaan nu over tot het bewijs van de in paragraaf 0 genoemde stelling van Wiener.

W zij de klasse van alle funkties $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die ontwikkelbaar zijn in een absoluut convergente Fourier reeks

$$W = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{int};\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n| < \infty\}.$$

Met de gebruikelijke puntsgewijze optelling en vermenigvuldiging van funkties is W een commutatieve algebra met eenheidselement $e: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ met $e(t) = 1$ voor alle $t \in \mathbb{R}$.

W kan als volgt genormeerd worden:

Is $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{int} \in W$ dan definiëren we

$$||f|| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|.$$

Men gaat gemakkelijk na dat W nu een genormeerde algebra is in de zin van definitie 1.2.

We tonen aan dat W een Banach-algebra is. Zij $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ een Cauchy-rij in W; dan is

$$||f_k - f_l|| = ||\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{kn} e^{int} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_{ln} e^{int}|| =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_{kn} - \alpha_{ln}| < \varepsilon \text{ zodra } k,l > N(\varepsilon).$$

Voor elke vaste n geldt dus ook dat

$$|\alpha_{kn} - \alpha_{ln}| < \varepsilon \text{ zodra } k,l > N(\varepsilon);$$

daar $\mathbb{C}$ volledig is, is voor elke n de rij $\{\alpha_{mn}\}_{m=1}^{\infty}$ dus convergent; $\lim_{m\to\infty} \alpha_{mn} \overset{def}{=} \alpha_n$.

Wegens $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_{kn} - \alpha_{ln}| < \varepsilon$ voor $k,l > N(\varepsilon)$ geldt ook $\sum_{n=-N}^{+M} |\alpha_{kn}-\alpha_{ln}| < \varepsilon$ zodra $k,l > N(\varepsilon)$.

Maken we achtereenvolgens de limietovergangen $l \to \infty$, $M \to \infty$, $N \to \infty$ dan vinden we

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_{kn} - \alpha_n| \leqq \varepsilon \text{ zodra } k > N(\varepsilon).$$

Als we kunnen aantonen dat de funktie f met $f(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{int}$ tot W behoort, dan is hiermee bewezen dat W volledig is.

Dat $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n| < \infty$ blijkt uit

$$\sum_{n=-M}^{+M} |\alpha_n| \leqq \sum_{n=-M}^{+N} |\alpha_n - \alpha_{kn}| + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_{kn}| <$$

$$\leqq \varepsilon + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_{kn}| < \infty \text{ als } k > N(\varepsilon).$$

Zij $t_0 \in [0,2\pi)$; het is duidelijk dat alle elementen f van W die in t_0 de waarde 0 aannemen een ideaal I_{t_0} vormen in W. We zullen laten zien dat dit ideaal maximaal is.

Indien I_{t_0} niet maximaal is, dan bestaat er een funktie $w_0 \in W$ zodanig dat $w_0(t_0) \neq 0$ terwijl het ideaal H_0 dat wordt opgespannen door I_{t_0} en w_0 een eigenlijk ideaal is. Zij w nu een willekeurig element van W; we kunnen dan schrijven

$$w(t) = \frac{w(t_0)}{w_0(t_0)} w_0(t) + \left\{ w(t) - \frac{w(t_0)}{w_0(t_0)} w_0(t) \right\}$$

waarbij in het rechterlid de eerste term een veelvoud is van $w_0(t)$ en de tweede term een element is van I_{t_0}. Voor elke $w \in W$ geldt dus: $w \in H_0$. Maar dit is niet mogelijk omdat H_0 een eigenlijk ideaal is.

Conclusie: I_{t_0} is een maximaal ideaal.

We gaan na of W andere maximale idealen heeft.

Zij M_0 een maximaal ideaal van W; nemen we $x \in W$ zodanig dat $x(t) = e^{it}$ dan is

$$|\lambda(x,M_0)| \leqq ||x|| = ||e^{it}|| = 1$$

en $$|\lambda(x^{-1},M_0)| \leqq ||x^{-1}|| = ||e^{-it}|| = 1$$

met als gevolg $|\lambda(x,M_0)| = 1$; Bij elk maximaal ideaal M_0 bestaat dus een $t_0 \in [0,2\pi)$ zodanig dat

$$\lambda(x,M_0) = e^{it_0}.$$

Hieruit volgt $$\lambda(x^n,M_0) = e^{int_0} \text{ voor elke } n \in \mathbb{Z},$$

zodat, volgens stelling 3,

$$\lambda\Big(\sum_{n=-M}^{+N} \alpha_n x^n, M_0\Big) = \sum_{n=-M}^{+N} \alpha_n e^{int_0}.$$

Zij nu $w \in W$, $w(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w_n e^{int}$; schrijven we

$$S_{M,N} = \sum_{n=-M}^{+N} w_n e^{int}$$

dan geldt

$$|\lambda(S_{M,N} - w,\ M_0)| \leqq ||S_{M,N} - w||$$

of $$\Big|\sum_{n=-M}^{+N} w_n e^{int_0} - \lambda(w,\ M_0)\Big| \leqq ||S_{M,N} - w||,$$

zodat, wegens $||S_{M,N} - w|| \to 0$ voor $M,N \to \infty$,

$$\lambda(w,M_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w_n e^{int_0}.$$

We weten dat: $w \in M_0 \iff \lambda(w,M_0) = 0$.

M_0 bevat dus juist die elementen $w \in W$ waarvoor $w(t_0) = 0$. Conclusie: Alle maximale idealen van W zijn gefixeerd.

Zij tenslotte $f \in W$, met $f(t) \neq 0$ voor elke $t \in \mathbb{R}$; het is dan volgens het voorgaande onmogelijk dat f element is van enig maximaal ideaal van W:

$f \notin M$ voor elk maximaal ideaal van W.

f moet dan wel inverteerbaar zijn, want elk niet-inverteerbaar element ligt in minstens één maximaal ideaal volgens stelling 4.
Conclusie: Is $f \in W$ met $f(t) \neq 0$, dan is f inverteerbaar; d.w.z.

$$\frac{1}{f} \in W$$

of $$\frac{1}{f(t)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \beta_n e^{int} \text{ met } \beta_n \in \mathbb{C} \text{ en } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\beta_n| < \infty.$$

Appendix

Stelling A.1. Zij X een lineaire ruimte over $\mathbb{R}$ en X_0 een lineaire deelruimte van X; is p(x) een sublineaire funktie op X (d.w.z. (i) $p(x + y) \leqq p(x) + p(y)$, (ii) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ voor $\lambda \geqq 0$) en f_0 een (reële) lineaire funktionaal op X_0 zodanig dat

$$f(x) \leqq p(x) \quad \text{op} \quad X_0$$

en is $x_0 \notin X_0$, dan bestaat er op $X_0 \oplus H\{x_0\}$ een lineaire funktionaal f met de volgende eigenschappen:

(i) $f(x) = f_0(x)$ op X_0
(ii) $f(x) \leqq p(x)$ op $X_0 \oplus H\{x_0\}$.

Bewijs:
Zij $y \in X_0 \oplus H\{x_0\}$; dan is y ondubbelzinnig te schrijven als

$$y = x + \alpha x_0 \quad (x \in X_0;\ \alpha \in \mathbb{R}).$$

Als f bestaat, dan zal zeker moeten gelden

$$f(y) = f(x) + \alpha f(x_0) = f(x) + \alpha \cdot c;$$

we moeten nu c zodanig bepalen dat f voldoet aan

$$f(y) \leqq p(y) \quad \text{voor alle } y \in X_0 \oplus H\{x_0\},$$

of $$f_0(x) + \alpha c \leqq p(x + \alpha x_0)$$

of $$\alpha c \leqq p(x + \alpha x_0) - f_0(x) \text{ voor alle } x \in X_0.$$

(i) Is $\alpha > 0$ dan is dit gelijkwaardig met

$$c \leqq p(\alpha^{-1}x + x_0) - f_0(\alpha^{-1}x)$$

of $$c \leqq p(z + x_0) - f_0(z) \text{ voor alle } z \in X_0.$$

(ii) Is $\alpha < 0$ dan moet voldaan zijn aan

$$c \geqq \alpha^{-1}p(x + \alpha x_0) - \alpha^{-1}f_0(x) =$$

$$= -p(-\alpha^{-1}x - x_0) - f_0(\alpha^{-1}x)$$

of $$c \geqq -p(-u - x_0) - f_0(u) \text{ voor alle } u \in X_0.$$

Voor alle $u, z \in X_0$ moet dus gelden

$$-p(-u - x_0) - f_0(u) \leqq c \leqq p(z + x_0) - f_0(z).$$

De gezochte constante bestaat dus zeker als

$$\sup_{u \in X_0} \{-p(-u - x_0) - f_0(u)\} \leqq \inf_{z \in X_0} \{p(z + x_0) - f_0(z)\}.$$

Voor alle $u, z \in X_0$ geldt

$$f_0(z) - f_0(u) = f_0(z - u) \leqq p(z - u) =$$

$$= p(z + x_0 - u - x_0) \leqq p(z + x_0) + p(-u - x_0)$$

zodat $$-p(-u - x_0) - f_0(u) \leqq p(z + x_0) - f_0(z),$$

met als gevolg

$$\sup_{u \in X_0} \{-p(-u - x_0) - f_0(u)\} \leqq \inf_{z \in X_0} \{p(z + x_0) - f_0(z)\}.$$

De gezochte constante bestaat dus en de funktionaal f met $f(x + \alpha x_0) = f_0(x) + \alpha \cdot c$ voldoet aan de gestelde eisen.

<u>Stelling A.2</u>. (HAHN-BANACH). Onder dezelfde voorwaarden als in stelling A.1 kan f_0 worden voortgezet tot een lineaire funktionaal f op geheel X zodanig dat

(i) $\quad f(x) = f_0(x)$ op X_0

(ii) $\quad f(x) \leq p(x)$ op geheel X.

Bewijs:
Zij H de verzameling van alle voortzettingen h van f_0 met de eigenschap

$$h(x) \leq p(x)$$

voor alle x uit de lineaire deelruimte van X waarop h gedefiniëerd is.
We kunnen op H als volgt een partiële ordening aanbrengen: $h_1 \leq h_2$ indien h_2 een uitbreiding is van h_1.
Nu is elke keten in H naar boven begrensd; zij n.l. $\{h_\alpha\}_{\alpha \in A}$ een keten in H en zij h_α gedefiniëerd op de lineaire deelruimte X_α van X; definiëren we op de lineaire deelruimte $G = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ de funktie g als volgt

$$g(x) = h_\gamma(x) \quad \text{als } x \in X_\gamma$$

dan is g een lineaire funktionaal op G die een uitbreiding is van elke h_α, terwijl bovendien $g(x) = h_\gamma(x) \leq p(x)$.
De ingevoerde partiële ordening is dus inductief, zodat volgens het lemma van Zorn boven f_0 een maximaal element f van H ligt. Onderstel dat deze f gedefiniëerd is op de lineaire deelruimte X_f van X terwijl $X_f \neq X$. Volgens stelling A.1 kan f dan worden uitgebreid tot op een X_f omvattende deelruimte, hetgeen in strijd zou zijn met de maximaliteit van f.
Conclusie: De lineaire funktionaal f is dus, als voortzetting van f_0, gedefiniëerd op geheel X, en voldoet aan $f(x) \leq p(x)$ op geheel X.

<u>Stelling A.3</u>. (HAHN-BANACH-BOHNENBLUST-SOBCZYK-SUCHOMLINOV).
Zij X een lineaire ruimte over $\mathbb{C}$ en $p(x)$ een halfnorm op X. Is X_0 een lineaire deelruimte van X met daarop een (complexe) lineaire funktionaal f_0 zodanig dat

$$|f_0(x)| \leqq p(x) \text{ voor alle } x \in X_0,$$

dan bestaat er een complexe lineaire funktionaal f op geheel X met de volgende eigenschappen:

(i) $f(x) = f_0(x)$ op X_0

(ii) $|f(x)| \leqq p(x)$ op geheel X.

Bewijs:
Zij g een lineaire funktionaal op X:

$$g(x) = g_1(x) + ig_2(x) \text{ met } g_1(x), g_2(x) \in \mathbb{R}.$$

Het is gemakkelijk in te zien dat g_1 en g_2 dan reële lineaire funktionalen zijn op X, indien X opgevat wordt als lineaire ruimte over $\mathbb{R}$.
Verder is $\quad g(ix) = g_1(ix) + ig_2(ix)$

en $\quad ig(x) = -g_2(x) + ig_1(x)$

waaruit volgt $\quad g_2(x) = -g_1(ix)$ voor elke $x \in X$.

De stelling is dus bewezen als we $f_{01} \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Re} f_0$ kunnen voortzetten tot op geheel X.
Nu is $\quad f_{01}(x) \leqq |f_0(x)| \leqq p(x),$

zodat volgens stelling A.2 f_{01} voortgezet kan worden tot een reële lineaire funktionaal f_1 op X, zodanig dat

$$f_1(x) \leqq p(x) \quad \text{voor alle } x \in X.$$

Definiëer nu: $\quad f(x) = f_1(x) - if_1(ix)$ op X.

f is dan een complexe lineaire funktionaal op X, voornamelijk wegens

$f(ix) = f_1(ix) - if_1(-x) = f_1(ix) + if_1(x) =$

$= i\{f_1(x) - if_1(ix)\} = if(x).$

Schrijven we: $f(x) = |f(x)| \cdot e^{i\phi}$

dan geldt

$$|f(x)| = e^{-i\phi} f(x) = f(e^{-i\phi} \cdot x) =$$

$$= f_1(e^{-i\phi}x) \leqq p(e^{-i\phi}x) =$$

$$= |e^{-i\phi}| \cdot p(x) = p(x)$$

zodat f ook voldoet aan

$$|f(x)| \leqq p(x) \quad \text{voor elke } x \in X.$$