16

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

ZWA - 6

(Syllabus van een interne voordracht)

Karakterizering van enkele typen metrizeerbare ruimten

door

J. van der Slot

december 1966

Karakterizering van enkele typen metrizeerbare ruimten.

In het onderstaande wordt eerst een topologische karakterizering bewezen van twee bekende ruimten: het discontinuum van Cantor en de ruimte der irrationale getallen.
Vervolgens wordt een generalisatie van dit resultaat gegeven in de vorm van een karakterizering van de z.g. gegeneraliseerde nuldimensionale Baire-ruimte met gewicht $\underline{\underline{m}}$ (kortweg $B_{\underline{\underline{m}}}$ hier genoemd).
Dan worden perfecte irreducibele afbeeldingen geïntroduceerd en enkele eigenschappen hiervan afgeleid. (Volledig) metrizeerbare ruimten met gewicht $\leq \underline{\underline{m}}$ blijken gekarakterizeerd te kunnen worden als de perfecte irreducibele beelden van gesloten deelverzamelingen van $B_{\underline{\underline{m}}}$.

§0. Inleidende opmerkingen

Metrische begrippen. De definitie van een metrische ruimte wordt bekend verondersteld. Een rij punten $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ van een metrische ruimte (M, ρ) heet een fundamentaalrij wanneer voor elk positief getal ε een index n_0 bestaat zó dat $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ voor $n, m > n_0$.
Een metrische ruimte (M, ρ) heet volledig, wanneer iedere fundamentaalrij in M convergeert.

Een vaak gebruikte eigenschap van volledige metrische ruimten is weergegeven in de volgende propositie.

(0.1) Propositie: Stel $\{S_n\}$ een rij*) niet lege gesloten deelverzamelingen van een volledige metrische ruimte (M, ρ) en veronderstel dat $\lim_{n\to\infty} \text{diam}\,(S_n) = 0$.
Dan bestaat $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ uit precies één punt.

Bewijs: Kies voor elke $n = 1, 2 \ldots$ een punt x_n uit de deelverzameling S_n van M. Uit het gegeven $\lim_{n\to\infty} \text{diam}\,(S_n) = 0$ volgt dat $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ een fundamentaalrij is, die vanwege de volledigheid van (M, ρ) convergeert naar een punt x van M. Nu geldt $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$!

*) monotoon dalende rij.

Metrizeerbaarheid; het begrip topologische volledigheid.

Een topologische ruimte $(M, \mathcal{J})$ heet metrizeerbaar wanneer er een metriek ρ op de verzameling M bestaat zódat de metrische topologie van (M, ρ) samenvalt met $\mathcal{J}$. $(M, \mathcal{J})$ heet volledig metrizeerbaar (of topologisch volledig) wanneer er een metriek ρ voor de topologie is zódat (M, ρ) volledig is.

Een volledig metrizeerbare ruimte kan best een metriek (i.h.a. vele) voor zijn topologie bezitten waarin hij niet volledig is. Een open interval $(0,1)$ is b.v. niet volledig in de gewone euclidische metriek. Toch is deze ruimte volledig metrizeerbaar want de metriek ρ' gedefinieerd door $\rho'(x, y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| (x, y \in (0,1))$ is een volledige metriek voor de ruimte $(0,1)$.

Een compacte ruimte is evenwel volledig in elke metriek voor zijn topologie.

De eigenschap "topologisch volledig" is invariant voor

1° topologische afbeeldingen

2° gesloten deelverzamelingen

3° open deelverzamelingen (als O open verzameling is van de volledige metrische ruimte (M, ρ) dan is O volledig in de metriek ρ' gedefinieerd door $\rho'(x, y) = |1/\rho(x, O^c) - 1/\rho(y, O^c)|$)

4° aftelbare topologische producten (als voor $n = 1, 2, \ldots$ (M_n, ρ_n) volledige metrische ruimten zijn dan is $M = \prod_{n=1}^{\infty} M_n$ volledig in de metriek $\rho(x, y) =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\rho_n(x_n, y_n)}{1 + \rho_n(x_n, y_n)}).$$

De volgende stelling (van Alexandroff en Hausdorff) is van fundamenteel belang en geeft een karakterizering van het begrip topologische volledigheid.

(0.2) Stelling: In een volledige metrische ruimte M geldt de volgende equivalentie: $N \subset M$ is topologisch volledig $\Leftrightarrow$ N is een G_δ-deelverzame-

ling van M.
(Voor een bewijs zij verwezen naar [1]).

Nuttig is ook de volgende stelling

(0.3) Stelling (Baire): In een volledig metrizeerbare ruimte geldt voor iedere collectie nergens dichte verzamelingen $\{S_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ de eigenschap $\overline{M \setminus \cup\{S_n \mid n = 1, 2, \ldots\}} = M$.

Bewijs: Zie [1].

Nuldimensionaliteit

Een topologische ruimte heet nuldimensionaal wanneer bij iedere gesloten verzameling F en open verzameling G met $F \subset G$ een zowel open als gesloten omgeving V van F bestaat met $V \subset G$.

Zonder bewijs (zie voor een bewijs b.v. [2]) vermelden we de volgende stelling uit de dimensietheorie.

(0.4) Stelling: Beschouw voor een ruimte M de volgende drie condities.

a) M is nuldimensionaal
b) Voor ieder punt en open verzameling G met $p \in G$ bestaat een zowel open als gesloten omgeving V van p met $p \in V \subset G$
c) Iedere open overdekking van M bezit een verfijning bestaande uit paarsgewijs disjuncte opgesloten verzamelingen.

Dan geldt: In een metrizeerbare ruimte M zijn de condities a) en c) equivalent; *) in een separabele metrizeerbare ruimte M zijn a), b) en c) equivalent.

§1. Karakterizering van het discontinuum van Cantor en van de ruimte der irrationale getallen; de gegeneraliseerde nuldimensionale Baireruimte.

*) Er bestaan metrizeerbare ruimten die aan b) voldoen maar niet nuldimensionaal zijn.

Stel C de deelruimte van $\mathbb{R}$ bestaande uit alle reële getallen tussen 0 en 1 die te schrijven zijn als $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k 3^{-k}$ met $a_k = 0$ of 1. C heet het <u>discontinuum van Cantor</u>.
Het is bekend dat C homeomorf is met het topologisch product van aftelbaar veel doubletten. C is een compacte nuldimensionale metrizeerbare ruimte zonder geisoleerde punten.
We zullen nu bewijzen dat <u>elke</u> compacte metrische ruimte die nuldimensionaal is en geen geisoleerde punten bevat, homeomorf is met het discontinuum van Cantor.
We behandelen het volgende lemma.

<u>(1.1) Lemma:</u> Zij M een separabele metrizeerbare ruimte met de eigenschappen

1) M is topologisch volledig
2) M is nuldimensionaal
3) M bezit geen geisoleerde punten.

Dan bestaat er een 1-1 continue afbeelding van M op C.

<u>Bewijs:</u> Kies een metriek ρ voor M zódat (M, ρ) volledig is.
Stel C het discontinuum van Cantor voor het interval $[0,1]$. We definieren $C_0 = \{0\}$ en voor ieder natuurlijk getal k $C_k = C \cap [2/3^k, 3/3^k]$.
Als D het Cantordiscontinuum is voor het interval $[a, b]$ zij dan ϕ de afbeelding van C op H gedefinieerd door $\phi(x) = a + (b - a)x$; stel $\psi(D, k) = \phi(C_k)$ voor elk natuurlijk getal k.

We definieren nu een rij partities $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots$ van M in niet lege deelverzamelingen.
Stel $\mathfrak{D}_0 = \{M\}$. Als $\mathfrak{D}_n$ reeds gedefinieerd is voor $n > 0$ dan verkrijgen we $\mathfrak{D}_{n+1}$ uit $\mathfrak{D}_n$ door vervanging van ieder niet ontaard element G van $\mathfrak{D}_n$ door de elementen $H_i (i = 0, 1, 2, \ldots)$ van een vaste partitie van deze verzameling in niet lege deelverzamelingen die voldoet aan:

(α) H_0 bestaat uit een punt; H_i opgesloten in M voor $i = 1, 2, \ldots$
(β) $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} H_i = G$; $H_i \cap H_j = \emptyset$ voor $i \neq j$.
(γ) diam $(H_i) < 1/n+1$ voor $i = 1, 2, \ldots$

Deze partitie noemen we de (n+1)-partitie van G; de existentie volgt uit het feit dat M nuldimensionaal is en geen geisoleerde punten bevat.

Voor iedere $x \in X$ construeren we nu eenduidig een rij deelverzamelingen $F_0(x)$, $F_1(x)$, ... We definiëren $F_0(x) = C$. Stel $F_n(x)$ voor $n > 0$ reeds gedefinieerd. Als $\{x\}$ een ontaard element is van de partitie $\mathfrak{D}_n$ dan definiëren we $F_{n+1}(x) = F_n(x)$. Als x behoort tot een niet ontaarde verzameling G van de partitie $\mathfrak{D}_n$, zij dan k_{n+1} de index van het element van de (n+1)-partitie van G waartoe x behoort en definieer $F_{n+1}(x) = \psi(F_n(x), k_{n+1})$.

Definieer voor elke $x \in X$ $f(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(x)$.

Omdat voor $n = 1, 2, \ldots$ de diameter van $F_n(x)$ kleiner is dan 3^{-n} verkrijgen we op deze wijze een afbeelding f van M in C.

<u>f is eenduidig</u>: Veronderstel dat p en q verschillende punten zijn van M. Dan bestaat er een positief getal n zó dat $\rho(p, q) > 1/n$. Dus p en q liggen in verschillende elementen van de partitie $\mathfrak{D}_n$, d.w.z. $F_n(p) \cap F_n(q) = \emptyset$. Dus $f(p) \neq f(q)$.

<u>f is surjectief</u>: Stel $c \in C$. Als voor zekere n en p de verzameling $F_n(p)$ slechts uit het punt c bestaat, dan geldt $f(p) = c$.

In het andere geval bestaat er voor elk natuurlijk getal n een niet ontaard element G_n van $\mathfrak{D}_n$ zó dat $c \in F_n(x)$ voor $x \in G_n$. Omdat M volledig is volgt m.b.v. het feit dat diam $(G_n) < 1/n$ voor $n = 1, 2, \ldots$ de existentie van $p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Nu geldt $f(p) = c$.

<u>f is continu in elk punt p van M</u>: Veronderstel eerst dat $\{p\}$ geen ontaard element is van een partitie $\mathfrak{D}_n$. Als U een omgeving van f(p) is in het Cantordiscontinuum dan bestaat er omdat $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n(x)) = 0$, een index s zó dat $f(x) \in F_s(x) \subset U$. Achtereenvolgens bestaan er ook niet ontaarde partitieelementen $G_1, \ldots, G_s$ van respectievelijk $\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_s$ met de eigenschap $f(p) \in F_i(x)$ voor $x \in G_i$ $(i = 1, \ldots, s)$. G_s is nu een (opgesloten) omgeving van p die door f binnen U wordt afgebeeld.

Veronderstel nu dat $\{p\}$ een ontaard element is van een zekere partitie $\mathfrak{D}_l$ ($l > 0$ en minimaal gekozen met deze eigenschap). $F_l(p)$ bestaat dus uit één punt n.l. f(p).

Als U een omgeving is van f(p) in het Cantordiscontinuum dan bestaat er een natuurlijk getal t zo groot dat $f(p) \in [f(p), f(p) + 1/3^n] \subset U$ voor $n > t$.

Stel p is element van de niet ontaarde verzameling G van $\mathfrak{D}_{l-1}$. Dan is $\{p\}$ verenigd met alle verzamelingen van de l-partitie van G met index $> t$ een open omgeving van p die door f binnen U wordt afgebeeld.

Gevolg 1: Als M een separabele metrizeerbare ruimte is, die aan 2) en 3) van het vorige lemma voldoet en M is bovendien compact, dan is de 1-1 afbeelding die boven geconstrueerd is een homeomorfisme en we verkrijgen zo de karakterizering van het Cantordiscontinuum.

Gevolg 2: De deelruimte van R bestaande uit alle irrationale getallen I voldoen aan 2) en 3) van het vorige lemma, en ook aan 1) want I is een G_δ-deelverzameling van een volledige metrische ruimte (gebruik stelling (0.2)).

(1.2) Stelling: Iedere separabele metrizeerbare ruimte M met de eigenschappen

1) M is topologisch volledig
2) M is nuldimensionaal
3) M is nergens lokaal compact (d.w.z. geen enkel punt bezit een compacte omgeving).

is homeomorf met het topologisch product van aftelbaar veel copieën van de natuurlijke getallen.
I.h.b. voldoet de ruimte der irrationale getallen I aan 1), 2) en 3), dus iedere separabele metrizeerbare ruimte met 1), 2) en 3) is homeomorf met de irrationale getallen.

Bewijs: Stel A_n voor $n = 1, 2, \ldots$ de verzameling der natuurlijke getallen. We zullen een homeomorfisme f construeren van M op het topologisch product $T = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$. Kies een metriek ρ van M zó dat (M, ρ) volledig is. We definiëren eerst een rij partities $\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_1, \ldots$ van M in niet lege deelverzamelingen.
Stel $\mathfrak{D}_0 = \{M\}$.
Als $\mathfrak{D}_n$ reeds gedefinieerd is dan verkrijgen we $\mathfrak{D}_{n+1}$ uit $\mathfrak{D}_n$ door vervanging van elk element G door de elementen H_i, $i = 1, 2, \ldots$ van een vaste partitie van deze verzameling in niet lege deelverzamelingen die voldoet aan

(α) H_i opgesloten in M voor $i = 1, 2, \ldots$

(β) $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = G$; $H_i \cap H_j = \emptyset$ voor $i \neq j$.

(γ) diam $(H_i) < 1/n+1$ voor $i = 1, 2, \ldots$

Deze partitie noemen we de $(n+1)$-partitie van G; de existentie volgt uit het feit dat M nuldimensionaal en nergens lokaal compact is *).

Voor ieder punt $x \in M$ construeren we nu eenduidig een rij natuurlijke getallen $k_1, k_2, \ldots$ en we stellen $f(x) = (k_1, k_2, \ldots) \in T = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$.

k_1 is het natuurlijke getal dat de index is van het partitieelement van $\mathfrak{D}_1$, dat x bevat.

Als k_n reeds gedefinieerd is voor $n > 0$ en $x \in G$ voor een verzameling G uit $\mathfrak{D}_n$, zij dan k_{n+1} de index van het element van de $(n+1)$-partitie van G dat x bevat.

<u>De gedefinieerde afbeelding $f : M \to T$ is 1-1</u>: Veronderstel dat p en q verschillende punten zijn van M. Dan bestaat er een natuurlijk getal n zodanig dat $\rho(p, q) > 1/n$. Dus p en q liggen in verschillende elementen van de partitie $\mathfrak{D}_n$ d.w.z. $f(p)$ en $f(q)$ verschillen in de eerste n coördinaten.

<u>f is surjectief</u>: Als $\kappa = (k_1, k_2, \ldots)$ een rij natuurlijke getallen van T is, bepaal dan voor $n = 1, 2, \ldots$ de partitieelementen G_n van $\mathfrak{D}_n$ zó dat G_{n+1} het element met index k_{n+1} is van de $(n+1)$-partitie van G_n. Uit $\lim_{n\to\infty}$ diam $(G_n) = 0$ en de volledigheid van (M, ρ) volgt dat de doorsnede $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ uit precies één punt bestaat. Blijkbaar $f(p) = \kappa$.

<u>f = continu</u>: Stel U een basisomgeving van een punt $f(p) = \kappa = (k_1, k_2, \ldots)$ van T, $U = \{\alpha \in T \mid \alpha_1 = k_1, \ldots \alpha_s = k_s\}$. Dan bestaan er partitieelementen $G_1, G_2, \ldots G_s$ van resp. $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_s$ zodat G_{i+1} het element met in-

---

*) Merk op dat de collectie open verzamelingen van G met diameter $< 1/n+1$ een basis is van G. Omdat G blijkbaar niet compact is bestaat er een overdekking van G met deze basiselementen die geen eindige deeloverdekking bezit. Kies van deze overdekking een verfijning bestaande uit paarsgewijs disjuncte opgesloten verzamelingen; deze levert de gevraagde partitie van G.

dex k_{i+1} is van de (i+1)-partitie van G_i ($i = 1, 2, \ldots, s$). G_s is nu een omgeving van p in M die door f binnen U wordt afgebeeld.

f is een open afbeelding: Als V een open verzameling is van M en $\kappa = f(p) = (k_1, \ldots, k_n, \ldots) \in T$ met $p \in V$ dan bestaan er voor $n = 1, 2, \ldots$ partitieelementen G_n van $\mathfrak{D}_n$ zô dat G_{n+1} het element met index k_{n+1} is van de (n+1)-partitie van G_n. Omdat $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} G_n = 0$ en alle G_n het punt p bevatten, is er een natuurlijk getal t zô dat $p \in G_t \subset V$. $W = \{\alpha \in T \mid \alpha_1 = k_1, \ldots, \alpha_t = k_t\}$ is nu een open omgeving van $\kappa = f(p)$ die geheel bevat is in f(V). Uit de willekeurigheid van $p \in V$ volgt dat f(V) een open verzameling is van T.

(1.3) Lemma: Stel M een separabele metrizeerbare ruimte die nuldimensionaal en topologisch volledig is. Dan is het topologisch product $M \times I$ homeomorf met I.

Bewijs: $M \times I$ voldoet aan 1), 2) en 3) van de vorige stelling.

(1.4) Stelling: De separabele metrizeerbare ruimten die nuldimensionaal en topologisch volledig zijn, zijn juist de ruimten die homeomorf zijn met een gesloten deelverzameling van I.

Bewijs: Stel M nuldimensionaal en volledig metrizeerbaar. M is cananiek homeomorf met een gesloten deelverzameling van $M \times I$. Maar volgens het vorige lemma is $M \times I$ homeomorf met I; M is dus homeomorf met een gesloten deelverzameling van I:
Omgekeerd is elke gesloten deelverzameling van I als ruimte topologisch volledig en nuldimensionaal.

Een generalisatie van (1.2) en (1.4) voor niet separabele metrizeerbare ruimten

We voeren eerst een paar nieuwe begrippen in:

Definitie: Een topologische ruimte T heet $\underline{m}$-compact ($\underline{m}$ oneindig kardinaalgetal), wanneer iedere open overdekking van T een deeloverdekking bezit met machtigheid $< \underline{m}$; T heet nergens $\underline{m}$-lokaal compact wanneer geen enkel punt van T een gesloten omgeving bezit die $\underline{m}$-compact is als deelruimte van T.

Het is duidelijk dat: $\aleph_0$-compact <=> compact, nergens $\aleph_0$-lokaal compact <=> nergens lokaal compact.
Minder evident is het feit dat voor een metrizeerbare ruimte M met gewicht $\underline{m} > \aleph_0$ de equivalentie geldt: M is nergens $\underline{m}$-lokaal compact <=> elke open verzameling van M heeft gewicht $\underline{m}$.

Nu hebben we de volgende generalisatie van (1.2) en (1.4).

(1.5) Stelling (Ponomarev). Stel M een metrizeerbare ruimte met gewicht $\underline{m}$ en met de volgende eigenschappen.

1) M is topologisch volledig
2) M is nuldimensionaal
3) M is nergens $\underline{m}$-lokaalcompact

Dan is M homeomorf met het topologisch product van aftelbaar veel discrete ruimten ieder bestaande uit $\underline{m}$ punten.
Deze ruimte heet de gegeneralizeerde nuldimensionale Baireruimte met gewicht $\underline{m}$ en wordt kortweg met $B_{\underline{m}}$ genoteerd. I.h.b. is $B_{\underline{m}}$ zelf een ruimte die aan 1), 2) en 3) voldoet (een geschikte metriek voor $B_{\underline{m}} = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$ definieert men door $\rho(x, y) = 1/\min\{k \mid x_k \neq y_k\}$).

Een eenvoudig bewijs van deze stelling (in feite analoog aan het bewijs van (1.2)) vindt men in [3].

(1.6) Stelling: De metrizeerbare ruimten met gewicht $\leq \underline{m}$ die nuldimensionaal en topologisch volledig zijn, zijn juist de ruimten die homeomorf zijn met een gesloten deelverzameling van $B_{\underline{m}}$.

Bewijs: Zie [3].

Tenslotte hebben we nog:

(1.7) Stelling (Morita): De nuldimensionale metrizeerbare ruimten met gewicht $\leq \underline{m}$ zijn juist de ruimten die homeomorf zijn met een deelruimte van $B_{\underline{m}}$.

§2. Perfecte afbeeldingen, irreducibiliteit.

Algemene karakterizering van (volledig) metrizeerbare ruimten.

Definitie: Een continue afbeelding van een ruimte X in een ruimte Y heet perfect wanneer

1° f is een gesloten afbeelding,

2° Het volledig origineel onder f van een punt van Y is compact.

Perfecte afbeeldingen vormen een natuurlijke generalisatie van continue afbeeldingen gedefinieerd op compacta, i.h.b. is iedere continue afbeelding gedefinieerd op een compacte ruimte perfect.

Een belangrijk feit is dat het gewicht van een ruimte onder een perfecte afbeelding niet kan toenemen (zie b.v. [1] blz. 148).
Ook andere prettige eigenschappen blijven bij perfecte afbeeldingen behouden. I.h.b. is een perfect beeld van een (volledig) metrizeerbare ruimte weer (volledig) metrizeerbaar (zie [3]).

Definitie: Een continue afbeelding f van een ruimte X op een ruimte Y heet irreducibel wanneer voor iedere gesloten deelverzameling $S = X$ geldt $f(S) \neq Y$.

De volgende proposities geven enkele eigenschappen van gesloten irreducibele afbeeldingen. (dus i.h.b. van perfecte irreducibele afbeeldingen).

(2.1) Propositie: Stel f een gesloten irreducibele afbeelding van een ruimte X op een ruimte Y; O een niet lege open verzameling van X. Dan heeft $f(O)$ een niet leeg inwendige in Y.

Bewijs: Omdat f irreducibel is, is blijkbaar $f(X \setminus O) \neq Y$ d.w.z. $Y \setminus f(X \setminus O) \neq \phi$. Omdat deze laatste verzameling open is en bevat in $f(O)$ is het gestelde bewezen.

(2.2) Propositie: Stel $f : X \xrightarrow{op} Y$ gesloten en irreducibel; X en Y metrizeerbaar. Dan is het gewicht van X gelijk aan het gewicht van Y.

Bewijs: Zij $\underline{m}$ het gewicht van X; $\underline{n}$ het gewicht van Y.
Kies een overal dichte deelverzameling D van X met $|D| = \underline{m}$.
Dan is omdat f een gesloten afbeelding is $\overline{f(D)} = f(\overline{D}) = f(X) = Y$.
Blijkbaar is f(D) overal dicht in Y terwijl $|f(D)| \leq \underline{m}$.
Dus het gewicht van Y is $\leq \underline{m}$ d.w.z. $\underline{n} \leq \underline{m}$.
Kies nu een overal dichte deelverzameling E van Y met $|E| = \underline{n}$. Zij F een deelverzameling van X die uit ieder volledig origineel van een punt van E juist één element bevat (keuzeaxioma). Het is duidelijk dat $f(\overline{F}) = Y$ want $f(\overline{F}) = \overline{f(F)} = \overline{E}$. Omdat f irreducibel is concluderen we $\overline{F} = X$, d.w.z. F is overal dicht in X.
Omdat $|F| = \underline{n}$ volgt dat $\underline{n} \geq \underline{m}$. $\underline{n} \leq \underline{m}$ & $\underline{n} \geq$ m impliceert nu $\underline{n} = \underline{m}$ en het gestelde is bewezen.

(2.3) Propositie: Stel f een gesloten irreducibele afbeelding van een volledig metrizeerbare ruimte X op een ruimte Y. Dan is de verzameling punten van X waarop f eenduidig is (d.w.z. de verzameling $\{x \in X \mid f^{-1}fx = \{x\}\}$) overal dicht in X.

Voordat we (2.3) gaan bewijzen, behandelen we eerst het volgende lemma.

Lemma Stel f een gesloten irreducibele afbeelding van de ruimte X op een ruimte Y en O een niet lege open verzameling van X.
Dan bestaat er een niet lege open verzameling $O' \subset O$ met $\overline{f^{-1}fO'} \subset \overline{O}$.

Bewijs: Stel V het inwendige van f(O) in Y; $V \neq \phi$ volgens prop. (2.1).
Zij $O' = f^{-1}(V) \cap O$; we zullen aantonen dat deze O' aan de gestelde voorwaarde voldoet.
$(X \setminus f^{-1}(V)) \cup \overline{O'}$ is een gesloten verzameling van X die door f op Y wordt afgebeeld. Dus uit de irreducibiliteit van f volgt $(X \setminus f^{-1}(V)) \cup \overline{O'} = X$.
Het is duidelijk dat $\overline{O'} \subset \overline{f^{-1}(V)}$ en het is onmogelijk dat $\overline{O'} \neq \overline{f^{-1}(V)}$ want in dat geval zou er een punt p van $f^{-1}(V)$ bestaan dat geen punt is van $\overline{O'}$. Dat is in tegenspraak met $X \setminus f^{-1}(V) \cup \overline{O'} = X$.
We concluderen $\overline{f^{-1}(V)} = \overline{O'}$ dus $\overline{f^{-1}fO'} = \overline{O'} \subset \overline{O}$.

Bewijs van (2.3): Stel voor n = 1, 2, ... $A_n = \{x \in X \mid \mathrm{diam}(f^{-1}fx) \geq 1/n\}$.
Stel n vast, we gaan bewijzen dat A_n nergens dicht is in X.
Veronderstel dat was niet zo, in dat geval bestaat er een niet lege

open verzameling O van X met diameter < 1/n die geheel in $\bar{A}_n$ bevat is.
Uit het lemma volgt dat er een niet lege open verzameling $O' \subset O$ bestaat met $f^{-1}f\,O' \subset \bar{O}$. O' bevat een punt q van A_n want $O' \subset \bar{A}_n$.
$f^{-1}fq$ is blijkbaar bevat in $\bar{O}$, dus uit de definitie van A_n volgt diam $(\bar{O}) \geq 1/n$. Dit is in tegenspraak met diam $(\bar{O}) \leq$ diam $(O) < 1/n$.
Uit de stelling van Baire volgt nu dat $X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid f^{-1}fx = \{x\}\}$ overal dicht ligt in X. Hiermee is het gestelde bewezen.

Opmerking. De verzameling $X' = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n$ is ook overal dicht in X. $f|_{X'} : X' \to fX'$ is nu een homeomorfisme omdat X' bevat is in de verzameling punten van X waarop f eenduidig is.

De volgende stelling geeft de werkelijke existentie van "voldoende" perfecte irreducibele afbeeldingen.

(2.4) Stelling: Stel f een perfecte afbeelding van een ruimte X op een ruimte Y. Dan bestaat er een gesloten deelverzameling S van X zó dat $f|_S : S \to Y$ perfect en irreducibel is.

Het bewijs van deze stelling is een direct gevolg van het volgende lemma.

Lemma: Stel X en Y topologische ruimten; f een afbeelding van X op Y met de eigenschap dat $f^{-1}(y)$ compact is voor elk punt y van Y.
Dan bestaat er een kleinste gesloten verzameling S van X met de eigenschap $f(S) = Y$.

Bewijs: Stel $\mathcal{F} = \{F_\alpha \mid \alpha \in A\}$ de familie van alle gesloten verzamelingen van X met de eigenschap $f(F_\alpha) = Y$. Definieer een partiele ordening $<$ op $\mathcal{F}$ zó dat $F_\alpha < F_\beta$ alleen geldt wanneer $F_\alpha \supset F_\beta$. Stel $\mathcal{F}_1 = \{F_\alpha \mid \alpha \in A_1\}$ een willekeurige keten van $\mathcal{F}$ en y een willekeurig punt van Y. Dan is $\{F_\alpha \cap f^{-1}(y) \mid \alpha \in A_1\}$ een gekit stelsel (d.w.z. iedere eindige doorsnede is niet leeg) en compactheid van $f^{-1}(y)$ levert op dat $\cap\{F_\alpha \mid \alpha \in A_1\} \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset$ wat bewijst dat $\cap\{F_\alpha \mid \alpha \in A_1\} \in \mathcal{F}$. Dus $\mathcal{F}_1$ heeft een bovengrens in $\mathcal{F}$.
Uit het lemma van Zorn volgt nu dat $\mathcal{F}$ een maximaal element S bezit.
S is nu een kleinste gesloten verzameling van X die door f op Y wordt afgebeeld.

Als tussenresultaat hebben we nu de volgende stelling.

(2.5) Stelling: Iedere perfecte (resp. perfecte irreducibele) afbeelding van een volledig metrizeerbare ruimte X op een ruimte Y beeldt een G_δ-deelverzameling (resp. overal dichte G_δ- deelverzameling) van X homeomorf af op een overal dichte G_δ van Y.

Bewijs: Volgens (2.4) bestaat er een gesloten deelverzameling X' van X met de eigenschap dat de restrictieafbeelding $f|_{X'} : X' \xrightarrow{op} X$ perfect en irreducibel is.
Uit de opmerking bij (2.3) volgt dat er een overal dichte G_δ G van X' bestaat zó dat $f|_G : G \to f(G)$ een homeomorfisme is.
$\overline{f(G)} = f(X') = Y$ (want f is een gesloten afbeelding), dus f beeldt G op de overal dichte deelverzameling f(G) van Y af.

Karakterizering van (volledig) metrizeerbare ruimten als perfect irreducibel beeld van nuldimensionale ruimten

Zonder bewijs vermelden we:

(2.6) Stelling (v.g.l. met 1.5): De nergens $\underline{\underline{m}}$-lokaal compacte volledig metrizeerbare ruimten met gewicht $\underline{\underline{m}}$ zijn juist de ruimten die een perfect irreducibel beeld zijn de gegeneraliseerde nuldimensionale Baireruimte $B_{\underline{\underline{m}}}$.

(2.7) Stelling: De (volledig) metrizeerbare ruimten met gewicht $\underline{\underline{m}}$ zijn juist de ruimten die een perfect irreducibel beeld zijn van een (gesloten) deelverzameling met gewicht $\underline{\underline{m}}$ van $B_{\underline{\underline{m}}}$.

Een bewijs van deze twee stellingen kan men vinden in [3].

Een toepassing.

(2.8) Iedere nergens $\underline{\underline{m}}$-lokaal compacte volledig metrizeerbare ruimte M met gewicht $\underline{\underline{m}}$ bevat een overal dichte deelverzameling die homeomorf is met $B_{\underline{\underline{m}}}$.

Bewijs: Volgens (2.6) bestaat er een perfecte irreducibele afbeelding g van $B_{\underline{\underline{m}}}$ op M.
Volgens (2.5) bestaat er een overal dichte G_δ-deelverzameling G van $B_{\underline{\underline{m}}}$ die door g homeomorf op de overal dichte deelverzameling $f(G)$ van M wordt afgebeeld. G is volgens de karakteriseringstelling (1.5) homeomorf met $B_{\underline{\underline{m}}}$. $f(G)$ is dus de gevraagde overal dichte deelverzameling van M die een copie is van $B_{\underline{\underline{m}}}$.
Ook kan men nu gemakkelijk bewijzen.

(2.9) Stelling: Iedere separabele metrizeerbare ruimte zonder geisoleerde punten bevat een overal dichte deelverzameling die homeomorf is met de ruimte der irrationale getallen.

Litteratuur

[1]. J.L. Kelley, General Topology, van Nostrand 1955.

[2]. J. Nagata, Modern Dimension theory, Noordhoff 1965.

[3]. J. van der Slot, Nuldimensionale metrische ruimten (scriptie), 1966.