STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1949-001

# Inversie van één matrix

J. Korevaar   P.A.J. Scheelbeek

1949

# Inversie van één matrix

door J. Korevaar-P.A.J. Scheelbeek

§ 1. Van de volgende matrix willen wij de inverse berekenen:

$$
(1)\quad \left|\begin{matrix}
\binom{n}{t+1} & \binom{n}{t+2} \cdots\cdots & \binom{n}{t+i} & \cdots\cdots \binom{n}{2t+1} \\
\vdots & & & \\
\binom{n+j}{t+1} & & \binom{n+j}{t+i} & \binom{n+j}{2t+1} \\
\vdots & & & \\
\binom{n+t}{t+1} & & \binom{n+t}{t+i} & \binom{n+t}{2t+1}
\end{matrix}\right|
$$

Daartoe berekenen wij de onderdeterminanten. We laten de (j+1)e rij en i-de kolom weg. Uit de eerste rij halen we $\binom{n}{t+1}$, uit de tweede $\binom{n+1}{t+1}$ enz. Dan komt er :

$$
\binom{n}{t+1}\binom{n+1}{t+1}\cdots\binom{n+j-1}{t+1}\binom{n+j+1}{t+1}\cdots\binom{n+t}{t+1} \times
$$

$$
\times \left|\begin{matrix}
1 & \frac{n-t-1}{t+2} \cdots\cdots & \frac{(n-t-1)\cdots(n-t-i+2)}{(t+2)\cdots(t+i-1)} & \frac{(n-t-1)\cdots(n-t-i)}{(t+2)\cdots(t+i+1)} & \cdots\cdots \frac{(n-t-1)\cdots(n-2t)}{(t+2)\cdots(2t+1)} \\
1 & & & & \\
\vdots & & & & \\
1 & \frac{n+j-t-2}{t+2} \cdots\cdots & \frac{(n+j-t-2)\cdots(n+j-t-i+1)}{(t+2)\cdots(t+i-1)} & \frac{(n+j-t-2)\cdots(n+j-t-i-1)}{(t+2)\cdots(t+i+1)} & \\
1 & \frac{n+j-t}{t+2} \cdots\cdots & \frac{(n+j-t)\cdots(n+j-t-i+3)}{(t+2)\cdots(t+i-1)} & \frac{(n+j-t)\cdots(n+j-t-i+1)}{(t+2)\cdots(t+i+1)} & \\
\vdots & & & & \\
1 & & & &
\end{matrix}\right|
$$

$$
= \frac{\binom{n}{t+1}\cdots\binom{n+j-1}{t+1}\binom{n+j+1}{t+1}\cdots\binom{n+t}{t+1}}{(t+2)^{t-1}(t+3)^{t-2}\cdots(t+i-1)^{t-i+3}(t+i)^{t-i+1}(t+i+1)^{t-i+1}\cdots(2t)^{2}(2t+1)} \times \left| D \right|
$$

De determinant $|D|$ zullen wij op een andere vorm brengen, wij krijgen dan een eenvoudiger notatie.

Voor (n-t) schrijven we p, voor j: i en voor i: k+1.

$|D|$ komt er dan als volgt uit te zien:

$$
(2)\quad \left|\begin{matrix}
1 & p-1 \cdots\cdots & (p-1)(p-2)\cdots(p-k+1) & (p-1)(p-2)\cdots(p-k-1) & \cdots (p-1)(p-2)\cdots(p-t) \\
1 & p \cdots\cdots & p(p-1)\cdots(p-k+2) & p(p-1)\cdots(p-k) & \cdots p(p-1)\cdots(p-t+1) \\
\vdots & & & & \\
1 & p+i-2 \quad (p+i-2) & \cdots (p+i-k) & (p+i-2)\cdots(p+i-k-2) & \cdots (p+i-2)\cdots(p+i-t-1) \\
1 & p+i \cdots\cdots (p+i) & \cdots (p+i-k+2) & (p+i)\cdots(p+i-k) & \cdots (p+i)\cdots(p+i-t+1) \\
\vdots & & & & \\
1 & p+t-1 \cdots (p+t-1) & \cdots (p+t-k+1) & (p+t-1)\cdots(p+t-k-1) & \cdots (p+t-1)\cdots p
\end{matrix}\right|
$$

We spreken verder het volgende af:

$\Delta(p-1,t)$ is de determinant met elementen

$$a_{ik} = (p+i-1)\ldots(p+i-k). \qquad (i,k = 0, 1, 2,\ldots t).$$

$\Delta_{i,k}(p-1,t)$ is de determinant die uit $\Delta(p-1,t)$ ontstaat door de $(i+1)$-de rij en de $(k+1)$-de kolom weg te laten.

Gevraagd nu $\Delta_{i,k}(p-1,t)$

§ 2. Voor $\Delta(p-1,t)$: Zie Netto, Lehrbuch der Combinatorik, p. 257.

Hij vindt: $\underline{\Delta(p-1,t) = t!(t-1)!\ldots 2!1!}$

Met (2) gaan wij nu als volgt verder. Trek de 1e rij van de 2e af, de 2e van de 3e,... de $(t-1)$-de van de $t$-de. Hierbij laten wij in gedachten de $(i+1)$-de rij staan. De $(i+2)$-de rij - $i$-de rij schrijven wij dan aldus: $(i+2)$-de rij - $(i+1)$-de rij + $(i+1)$-de rij - $i$-de rij.

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & & & & \\ 0 & 1 & 2(p-1) & 3(p-1)(p-2) & (k-1)(p-1)\ldots(p-k+2) & t(p-1)\ldots(p-t+1) \\ & & & & 3. & \\ 0 & 1 & 2(p+i-3) & 3(p+i-3)(p+i-4) & & \\ 0 & \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} & \begin{matrix} 2(p+i-2) \\ 2(p+i-1) \end{matrix} & \begin{matrix} 3(p+i-2)(p+i-3) \\ 3(p+i-1)(p+i-2) \end{matrix} & \begin{Bmatrix} (k-1)(p+i-2)\ldots(p+i-k+1) \\ (k-1)(p+i-1)\ldots(p+i-k+2) \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} t(p+i-2)\ldots(p+i-t) \\ t(p+i-1)\ldots(p+i-t+1) \end{Bmatrix} \\ 0 & 1 & 2(p+i) & 3(p+i)(p+i-1) & (k-1)(p+i)\ldots(p+i-k+3) & \\ 0 & 1 & 2(p+t-2) & 3(p+t-2)(p+t-3) & (k-1)(p+t-2)\ldots(p+t-k+1) & t(p+t-2)\ldots p \end{vmatrix}$$

Deze determinant ontwikkelen we nu naar de eerste kolom.

Vanwege de nullen in de eerste kolom, hebben wij ons nu alleen maar bezig te houden met (3). Deze determinant laat zich nu schrijven als de som van twee determinanten. De $i$-de rij splitsen we daartoe.

Nu was $a_{ik} = (p+i-1)\ldots(p+i-k) \qquad (i,k = 0,\ldots t)$

Onder $a_{ik}$ verstaan we $(p+i-1)\ldots(p+i-k)(i,k = 0,\ldots t-1)$.

Door de splitsing van (3) in 2 determinanten vinden wij voor

$$\Delta_{ik} : \frac{t!}{k}\left\{\Delta_{i-1,k-1}(p-1,t-1) + \Delta_{i,k-1}(p-1,t-1)\right\}$$

of anders geschreven:

$$\underline{\Delta_{i,k}(p-1,t) = \frac{t!}{k}\left\{\Delta_{i-1,k-1}(p-1,t-1) + \Delta_{i,k-1}(p-1,t-1)\right\}} \qquad (4)$$

Deze formule geldt niet voor alle $i$ en $k$.

Wat de $i$'s betreft, moeten wij aan de randen op onze hoede zijn. Wat $k$ aangaat alleen bij $k = 0$.

Nu zij $\Delta_{-1,k-1} = 0$ . Dan geldt (4) toch:

$$(i = 0, k \neq 0) \qquad \Delta_{0,k}(p-1,t) = \frac{t!}{k}\Delta_{0,k-1}(p-1,t-1)$$

Nu i = t. $\Delta_{t,k}(p-1,t) = \Delta_{0,k}(p-2,t)$ . Het komt toch op hetzelfde neer, of wij uit $\Delta$ (p − 1,t) de t-de rij, of uit $\Delta$ (p − 2,t) de 0-de rij weglaten.

Maar $\Delta_{0,k}(p-2,t) = \frac{t!}{k}\Delta_{0,k-1}(p-2,t-1) = \frac{t!}{k}\Delta_{t-1,k-1}(p-1,t-1)$

<u>Conclusie</u>. Zolang maar $k \neq 0$ gaat de reductieformule (4) door, als we lezen $\Delta_{i,k}(p-1,t) = 0$ voor $i < 0$ of $i > t$

§ 3. Rest ons het geval k = 0: $\Delta_{i,0}(p-1,t)$. We laten in $\Delta(p-1,t)$ de (i+1)-de rij en de $1^e$ kolom weg:

$$\left|\begin{array}{l|l}
p-1 & (p-1)(p-2)\ldots(p-1)\ldots(p-t). \\
p & p\cdot(p-1)\ldots p\ldots\ldots(p-t+1). \\
(p+i-2) & (p+i-2)(p+i-3)\ldots(p+i-2)\ldots(p+i-t-1) \\
p+i & (p+i)(p+i-1) \qquad (p+i)\ldots(p+i-t+1) \\
(p+t-1) & (p+t-1)(p+t-2)\ldots(p+t-1)\ldots p
\end{array}\right|$$

Dan bezitten de elementen van eenzelfde rij telkens een gemeenschappelijke factor

$$(p-1)p\ldots(p+i-2)(p+i)\ldots(p+t-1)\left|\begin{array}{llll}
1 & (p-2) & (p-2)(p-3) & (p-2)\ldots(p-t) \\
1 & (p-1) & (p-1)(p-2) & (p-1)\ldots(p-t+1) \\
1 & (p+i-3) & (p+i-3)(p+i-4) & (p+i-3)\ldots(p+i-t-1) \\
1 & (p+i-1) & (p+i-1)(p+i-2) & (p+i-1)\ldots(p+i-t+1) \\
1 & (p+t-2) & (p+t-2)(p+t-3) & (p+t-2)\ldots p
\end{array}\right| \; i$$

(5) $\Delta_{i,0}(p-1,t) = (p-1)p\ldots(p+i-2)(p+i)\ldots(p+t-1)\ \Delta_{i,t}(p-2,t)$.

We kunnen dit resultaat nog in een andere vorm gieten, die nauwer aansluit bij de algemene formule voor $\Delta_{i,k}$ . Deze passen we nu toe op $\Delta_{i,t}(p-2,t)$.

$$\Delta_{i,t}(p-2,t) = \frac{t!}{t}\left\{\Delta_{i-1,t-1}(p-2,t-1) + \Delta_{i,t-1}(p-2,t-1)\right\}$$

We vinden dan voor $\Delta_{i,0}$ ((5) enige malen toepassend):

(6) $$\Delta_{i,0}(p-1,t) = (t-1)!(p+t-1)\left\{\Delta_{i,0}(p-1,t-1) + \frac{p+i-2}{p+i-1}\Delta_{i-1,0}(p-1,t-1)\right\}$$

We gaan nu (4) herhaald toepassen.

§ 4.

$$\Delta_{i,k}(p-1,t) = \Delta_{i,k}(t) = \frac{t!(t-1)!\cdots\cdots(t-k+1)!}{k!} \times$$

(7) $$\times \left\{\Delta_{i-k,0}(t-k) + \binom{k}{1}\Delta_{i-k+1,0}(t-k) + \cdots\cdots\right.$$

$$\left. + \binom{k}{j}\Delta_{i-k+j,0}(t-k) + \cdots\cdots \Delta_{i,0}(t-k)\right\}$$

We mogen weglaten de termen met eerste index > t - k of eerste index < 0. In het bijzonder is (we hebben dit dadelijk nodig):

$$\Delta_{i,t}(p-2,t) = \frac{t!(t-1)!\cdots\cdots 1!}{t!}\left\{\Delta_{i-t,0}(0) + \binom{t}{1}\Delta_{i-t+1,0}(0) + \cdots\right.$$
$$\left. + \binom{t}{j}\Delta_{i-t+j,0}(0) + \cdots\cdots + \Delta_{i,0}(0)\right\}.$$

Nu is $\Delta_{i-t+j,0}$ alleen $\neq 0$ en dan $=1$, als $\underline{i - t + j} = 0$. Dus

(8) $$\Delta_{i,t}(p-2,t) = (t-1)!(t-2)!\cdots\cdots 1!\binom{t}{i}$$

(Voor $i = t$ vinden we Netto's formule $\Delta_{t,t} = (t-1)!\cdots\cdots 1!$ terug.
Uit (7) vinden we, (5) toepassend,

$$\Delta_{i,k}(p-1,t) = \frac{t!(t-1)!\cdots\cdots(t-k+1)!}{k!}\sum_{\substack{0\le j\le k\\ k-i\le j\le t-i}}\binom{k}{j}\Delta_{i-k+j,0}(t-k) =$$

$$= \frac{t!(t-1)!\cdots\cdots(t-k+1)!}{k!}\sum\binom{k}{j}(p-1)p\cdots(p+i-k+j-2)(p+i-k+j)\cdots$$
$$\cdots(p+t-k-1)\,\Delta_{i-k+j,t-k}(p-2,t-k)$$

Nu is $\Delta_{i-k+j,t-k}(p - 2, t - k)$ van het type $\Delta_{i,t}(p - 2, t)$. Uit (8) volgt dus verder

$$\Delta_{i,k}(p-1,t) = \frac{t!(t-1)!\cdots(t-k+1)!}{k!}\sum_{\substack{0\le j\le k\\ k-i\le j\le t-i}}\binom{k}{j}(p-1)p\cdots(p+i-k+j-2)(p+i-k+j)\cdots(p+t-k-1)\,\frac{(t-k)!(t-k-1)!\cdots 1!}{(t-k)!}\binom{t-k}{i-k+j} =$$

$$\frac{t!(t-1)!\cdots\cdots 1!}{k!}\sum_{\substack{0\le j\le k\\ 0\le i-k+j\le t-k}}\binom{k}{j}\binom{t-k}{i-k+j}\frac{1}{p+i-k+j-1}\times\frac{(p-1)p\cdots(p+t-k-1)}{(t-k)!}$$

(9) $$\Delta_{i,k}(p-1,t) = \frac{t!(t-1)!\cdots\cdots 1!}{k!}\cdot\frac{(p-1)p\cdots(p+t-k-1)}{(t-k)!}\sum_{\substack{i-k\le\nu\le i\\ 0\le\nu\le t-k}}\binom{k}{\nu-i+k}\binom{t-k}{\nu}\frac{1}{p+\nu-1}$$

Contrôle van (9):

$$\Delta(p-1,2) = \begin{vmatrix} 1 & p-1 & (p-1)(p-2) \\ 1 & p & p(p-1) \\ 1 & p+1 & (p+1)p \end{vmatrix}$$

$\Delta_{0,0} = p(p+1)$ $\quad \Delta_{1,0} = 2(p-1)(p+1)$ $\quad \Delta_{2,0} = p(p-1)$

$\Delta_{0,1} = 2p$ $\quad \Delta_{1,1} = 4p-2$ $\quad \Delta_{2,1} = 2(p-1)$

$\Delta_{0,2} = 1$ $\quad \Delta_{1,2} = 2$ $\quad \Delta_{2,2} = 1$

Met (9)

$$\Delta_{1,0}(p-1,2) = \frac{2!\,1!}{0!}\;\frac{(p-1)p(p+1)}{2!}\sum_{\substack{1\le\nu\le 1\\ 0\le\nu\le 2}}\binom{0}{\nu-1}\binom{2}{\nu}\frac{1}{p+\nu-1}$$

$$= 2(p-1)(p-2)$$

z.

We geven tenslotte aan, wat de cofactor is van $\binom{n+j}{t+i}$ in (1):

$$(-1)^{i+j+1}\frac{\binom{n}{t+1}\cdots\binom{n+j-1}{t+1}\binom{n+j+1}{t+1}\cdots\binom{n+t}{t+1}}{(t+2)^{t-1}(t+3)^{t-2}\cdots(t+i-1)^{t-i+2}(t+i)^{t-i+1}\cdots(2t)^{2}(2t+1)}\times$$

(10)

$$\frac{t!(t-1)!\cdots1!}{(i-1)!}\;\frac{(n-t-1)(n-t)\cdots(n-i)}{(t-i+1)!}\times$$

$$\sum_{\substack{j-i+1\le\nu\le j\\ 0\le\nu\le t-i+1}}\binom{i-1}{\nu-j+i-1}\binom{t-i+1}{\nu}\frac{1}{n-t+\nu-1}.$$