STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1951 - 001

Een minimumvraagstuk betreffende de functie

$$\varphi(u) = \frac{1}{\log(1+u^2)} \log \frac{1+\varepsilon u}{1-\varepsilon u}$$

C.G. Lekkerkerker

1951

MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

Rapport ZW 1951-001

Een minimumvraagstuk betreffende de functie

$$\varphi(u) = \frac{1}{\log(1+u^2)} \log \frac{1+\varepsilon u}{1-\varepsilon u}.$$

door C.G.Lekkerkerker.

Door de statistische afdeling werd de volgende vraag voorgelegd.

De functie $V(\tau) = -\frac{1}{\log \tau} \log \frac{1+\frac{c\sigma}{n\tau}}{1-\frac{c\sigma}{n\tau}}$,

waarbij $\sigma = \sqrt{n\tau(1-\tau)}$ is, n een natuurlijk getal is en c een constante in de buurt van 1 is, is gedefinieerd in het interval, waar $\tau < 1$, $1 - \frac{c\sigma}{n\tau} > 0$ is en neemt daar een minimum aan. Voor welke waarde van τ nu wordt dit minimum bereikt en hoe gedraagt zich dit minimum als functie van n, als $n \gg 1$ is.

Het is ons gebleken dat hierop geantwoord kan worden: de functie $V(\tau)$ neemt één en slechts één minimum in een zeker τ-interval; het minimum is een dalende functie van n, in geval $n > 6c^2$, en nadert voor $n \to \infty$ tot de asymptotische waarde 0,203.

We merken allereerst op, dat de voorwaarde $1-\frac{c\sigma}{n\tau} > 0$ inhoudt:

$\frac{c\sigma}{n\tau} < 1$, dus $c\sqrt{\frac{1-\tau}{n\tau}} < 1$, of $\frac{1-\tau}{\tau} \quad \frac{n}{c^2}$, of $\tau > \frac{c^2}{c^2+n}$. Dan is de functie $V(\tau)$ gedefinieerd in het interval $\frac{c^2}{c^2+n} < \tau < 1$.

We vereenvoudigen de te behandelen functie door de substituties $\frac{1-\tau}{\tau} = u^2$, $\frac{c}{\sqrt{n}} = \varepsilon$, waardoor er komt

$$V(\tau) = \varphi(u) = \frac{1}{\log(u^2+1)} \log \frac{1+\varepsilon u}{1-\varepsilon u}.$$

Hierbij is $\varepsilon > 0$, terwijl de voorwaarde $\frac{c^2}{c^2+n} < \tau < 1$ overgaat in $\varepsilon^{-1} > u > 0$. De functie $\varphi(u)$ is continu en nadert zowel voor $u \to +0$ als voor $u \to \varepsilon^{-1} - 0$ tot $+\infty$. Er is dus zeker een minimum. Daarbij is $\varphi'(u) = 0$. Dit geeft:

$$\frac{1}{\log^2(u^2+1)}\left[\log(u^2+1).\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon u} + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon u}\right) - \log\frac{1+\varepsilon u}{1-\varepsilon u} \cdot \frac{2u}{1+u^2}\right] = 0,$$

ofwel

(1) $\varepsilon(u^2+1)\log(u^2+1)-(1-\varepsilon^2u^2)u\log\frac{1+\varepsilon u}{1-\varepsilon u} = 0.$

Wegens $0 < \varepsilon u < 1$ mogen we de tweede logarithme in het linkerlid van (1) ontwikkelen naar machten van εu en krijgen dan

$$(u^2+1)\log(u^2+1)-(1-\varepsilon^2u^2).\frac{2u}{\varepsilon}\{\varepsilon u+\frac{1}{3}(\varepsilon u)^3+\frac{1}{5}(\varepsilon u)^5+ + \ldots\} = 0,$$

of

(2) $\left[(u^2+1)\log(u^2+1)-2u^2\right]+\left[2\varepsilon^2u^4(1-\frac{1}{3})+2\varepsilon^4u^6(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+ + \ldots\right] = 0.$

Het linkerlid van (2) bestaat uit twee gedeelten, waarvan het eerste, zeg $A(u)$, niet van ε afhangt, en het tweede, zeg $B(u,\varepsilon)$, een duidelijk monotoon stijgende functie van ε is met $B(u,0) = 0$. Verder vinden we door numerische berekening, dat $A(u) = 0$ is voor $u^2 = 3.93$, d.w.z. $\tau = 0.203$. Andere nulpunten heeft $A(u)$ niet in het interval $0 < u < \varepsilon^{-1}$, aangezien $A(u) = (u^2+1)\log(u^2+1)-2u^2$, gelijk aan nul is voor $u = 0$, en de afgeleide

$$\frac{d}{d(u^2)}A(u) = 1+\log(u^2+1)-2 = \log(u^2+1)-1$$

slechts één nulpunt heeft in het genoemde interval, n.l. $u = \sqrt{e-1}$. We merken tenslotte op, dat $A(u)$ negatief is voor $0 < u^2 < 3.93$ en positief voor $u^2 > 3.93$, ofwel negatief voor $0 < u < 1.98$ en positief voor $u > 1.98$.

Uit dit alles kunnen we concluderen: voor elke waarde van u uit het interval $0 < u \leq 1.98$ bestaat er precies één waarde voor ε, zodat aan (2) voldaan is; speciaal voor $u = 1.98$ krijgen we $\varepsilon = 0$; voor grotere waarden van u kan de vergelijking (2) niet bevredigd worden. In het laatstgenoemde interval definieert dus de vergelijking (1) impliciet een eenduidig bepaalde functie $\varepsilon(u)$.

We willen nu graag de monotomie van de functie $\varepsilon(u)$ aantonen. Hierbij speelt het nulpunt van $\frac{d}{d(u^2)}A(u)$ een rol. We kunnen n.l. bewijzen, dat in het interval $\sqrt{e-1} \leq u \leq 1.98$ de functie $\varepsilon(u)$ monotoon daalt. Daartoe stellen we het linkerlid van (2) voor door $F(u,\varepsilon)$. Dan geldt:

$$\frac{d\,\varepsilon(u)}{d(u^2)} = -F'_{u^2} : F'_{\varepsilon},$$

$$F'_{u^2} = \frac{d}{d(u^2)} A(u) + \frac{\partial}{\partial(u^2)} B(u,\varepsilon) = \log(u^2+1) - 1 + \frac{\partial}{\partial(u^2)} B(u,\varepsilon)$$

$$F'_{\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon} B(u,\varepsilon).$$

Het is onmiddellijk duidelijk dat de reeks voor $B(u,\varepsilon)$ en de beide partiele afgeleiden van $B(u,\varepsilon)$ uitsluitend positieve termen hebben. Dan is voor positieve ε steeds F'_{ε} positief en F'_{u^2} in elk geval positief als $\sqrt{e-1} \leq u (\leq 1.98)$.

Aangezien ~~m~~ ε een monotoon dalende functie is van n en u een monotoon dalende functie van τ, is hiermee bewezen, dat n een monotoon dalende functie is van τ, zijnde de argumentwaarde, waarvoor $V(\tau)$ minimaal wordt.

Tenslotte is het van belang te weten welke waarden $\varepsilon(u)$ aanneemt in het interval $\sqrt{e-1} \leq u \leq 1.98$. We weten reeds $\varepsilon(1.98) = 0$. Berekenen we $\varepsilon(\sqrt{e-1})$. Voor $u = \sqrt{e-1}$ is de eerste term van (2) gelijk aan $e \log e - 2(e-1) = 2 - e = -0.718$. Stellen we even $\varepsilon^2 u^2 = x$, dan moeten we x oplossen uit:

$$\frac{4}{1.3}x + \frac{4}{3.5}x^2 + \frac{4}{5.7}x^3 + \frac{4}{7.9}x^4 + \ldots = \frac{0.718}{1.718}$$

of

$$\frac{x}{1.3} + \frac{x^2}{3.5} + \frac{x^3}{5.7} + \frac{x^4}{7.9} + \ldots = \frac{0.718}{4 \times 1.718} = 0.103.$$

We vinden $x = 0.297$, dus $\varepsilon^2 = \frac{0.297}{1.718} \sim \frac{1}{6}$.

Verder berekenen we dat het corresponderende interval voor τ is:

$0.203 \leq \tau \leq \frac{1}{e} = 0.368.$

Het resultaat is dus dat voor $n > 6e^2$ de functie $V(\tau)$ één minimum aanneemt in het interval $0.203 \leq \tau \leq 0.368$; de τ-waarde doorloopt dat interval van rechts naar links, als n loopt van $6e^2$ tot ∞.

Wil men de functie $\tau(n)$ tabelleren, dan kan men het beste te werk gaan met de functie $\varepsilon(u)$; daarvan kan men waarden berekenen door in (2) een bepaalde waarde van u in te zetten en dan ε te benaderen (merk op, dat de reeks in ε^2 snel convergeert).