STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1960 - 001

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

Dr. E.W. Dijkstra

Zaterdag 30 januari 1960

Kortste bomen uit een graph

1960

Voordracht in de serie "Actualiteiten"
door
Dr E.W. Dijkstra

Zaterdag 30 Januari 1960

Kortste bomen uit een graph

Wij beschouwen n punten, waarbij tussen elk tweetal een verbinding bestaat. In dit verband noemt men de punten knooppunten, de verbindingen takken en de resulterende figuur een graph.

Wij beperken ons tot het geval dat het aantal knooppunten n eindig is; voorts nemen we aan, dat in de graph tussen elk tweetal knooppunten slechts één tak bestaat, m.a.w. we stellen, dat elke tak door zijn eindpunten bepaald is.

Een tak is een ongerichte verbinding tussen twee knooppunten: de tak "van knooppunt A naar knooppunt B" is per definitie dezelfde als de tak van B naar A.

Een rij takken, steeds door een gemeenschappelijk knooppunt aan elkaar geschakeld, heet een pad: de takken AB, BC en CD vormen op deze wijze een pad tussen A en D.

Als wij van een gegeven graph een aantal takken weglaten, houden wij een zg. subgraph over. Zolang tussen elk willekeurig tweetal punten nog een pad bestaat, opgebouwd uit takken van de subgraph, heet die subgraph samenhangend.

Bevat de subgraph tussen elk tweetal punten één en slechts één pad, dan heet de subgraph een boom, de takken AB, BC, BD en DE bijv. vormen een boom.

Een gesloten kring van m takken is gedefinieerd als een subgraph (bestaande uit die takken en hun eindpunten), die tussen elk tweetal er in voorkomende punten exact twee paden bevat en wel zo, dat deze twee paden geen enkele tak gemeen hebben, de takken AB, BC, CD en DA bijv. vormen een gesloten kring. Uit het bovenstaande volgt, dat een boom tussen n punten ook gedefinieerd kan worden als een samenhangende subgraph tussen deze n punten, die echter geen enkele gesloten kring bevat.

Zonder bewijs vermelden wij:

a) dat een boom tussen n punten n-1 takken bevat;

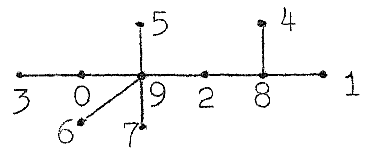
b) dat een gesloten kring evenveel, zeg m, takken als punten bevat ($2 < m$).

Met bewijs vermelden wij, dat het aantal mogelijke bomen tussen n punten gelijk is aan n^{n-2}. Dit resultaat is het eerste gepubliceerd door Cayley, de hieronder gebruikte bewijstechniek is voor het eerst door Prüfer gepubliceerd.

Voor ons doel nummeren we de punten van 0 t/m n-1. We zullen laten zien, dat voor $3 \leq n$ (voor n = 1 of 2 is de stelling kennelijk juist) aan elke boom eenduidig een n-tallig codegetal van n-2 cijfers kan worden toegekend en omgekeerd aan elk dergelijk codegetal één boom: de toevoeging is een-eenduidig. Aangezien het aantal n-tallige getallen van n-2 cijfers gelijk is aan n^{n-2}, is dit dus ook het aantal mogelijke bomen tussen n punten.

Aangezien de n-1 takken van de boom 2n-2 uiteinden hebben en er n verschillende knooppunten zijn, zijn er minstens twee knooppunten, die slechts door één tak verbonden zijn. Een dergelijk punt noemen we een isoleerbaar punt: als we deze tak nl. wegnemen is dit ene punt niet meer met de rest van de boom verbonden.

Van onze boom nemen we nu de tak weg, die leidt tot het geïsoleerde punt met het laagste rangnummer; van de "restboom" zoeken we het nu laagst geordende isoleerbare punt en nemen de bijbehorende tak weg, etc. Uiteindelijk houden we de laatste tak, die twee dan isoleerbare punten met elkaar verbindt, over. Schrijven wij nu de takken op van links naar rechts in de volgorde van wegnemen en karakteriseren we elke tak door boven elkaar zijn eindpunten te noteren en wel met het punt, dat door het wegnemen van deze tak geïsoleerd werd, boven, dan geeft de resulterende onderste rij n-tallige cijfers een dergelijk codewoord. Een voorbeeld moge dit toelichten.



Bij de boven getekende boom vinden we volgens voorschrift:

1	3	0	4	5	6	7	8
8	0	9	8	9	9	9	2

en de tak 2-9 blijft als laatste over. Om de omkering aan te tonen, moeten we laten zien, hoe uit de onderste rij de bovenste rij en de "laatste tak" gereconstrueerd kunnen worden. Bovendien moeten we aantonen, dat de aldus gevonden n-1 takken inderdaad een boom tussen de n punten vormen.

Blijkens onze constructie komt elk rangnummer in de bovenste rij hoogstens eenmaal voor: precieser, het rangnummer n komt er nooit in voor en verder moet er nog een ontbreken. De verbinding tussen de twee punten, wier rangnummers in de bovenste rij ontbreken, is de laatste tak. We hoeven dus nog slechts de bovenste rij te reconstrueren. We doen dit van links naar rechts, steeds invullend het laagst mogelijke rangnummer, dat aan de volgende twee voorwaarden voldoet:

a) het mag in de bovenste rij niet links van zijn positie al voorkomen,
b) het mag in de onderste rij niet voorkomen onder zijn positie of rechts daarvan.

Aangezien er n rangnummers zijn, waaruit we a priori kunnen kiezen en de beide voorwaarden samen hoogstens n-2 nummers uitsluiten, is deze reconstructie altijd uitvoerbaar.

Om aan te tonen, dat de aldus gereconstrueerde takken (inclusief de laatste tak) een boom vormen, moeten we aantonen, dat

1) de graph samenhangend is,
2) de graph geen gesloten kringen bevat.

Omdat het aantal takken 1 kleiner is dan het aantal punten, volgen deze twee eigenschappen uit elkaar en we kunnen daarom volstaan bijv. de samenhang te bewijzen. We zullen dit doen door te laten zien, dat elk punt via een pad met de "laatste tak" verbonden is.

We beschouwen daartoe een willekeurig rangnummer x. Als het niet een eindpunt van de laatste tak is, komt het gegarandeerd voor in de bovenste rij. Het rangnummer dat in de overeenkomstige positie in de onderste rij staat, noemen we y, m.a.w.

de tak x-y maakt deel uit van de graph. Of y is een eindpunt van de laatste tak en voor x is daarmee het gestelde bewezen, of we moeten nog voor y bewijzen, dat het via een pad aan de laatste tak verbonden is. In het laatste geval komt y dus in de bovenste rij voor, maar volgens conditie b) van onze constructie rechts van x! In hoogstens n-2 stappen is dus de laatste tak bereikt. En hiermee is onder andere de genoemde stelling van Cayley bewezen.

Voor onze volgende beschouwingen zullen wij aannemen, dat elke tak een reële lengte heeft en dat deze lengtes zo gekozen zijn, dat geen twee bomen dezelfde lengte hebben. Hierbij is de lengte van een boom gedefinieerd als de som van de lengtes van zijn takken. Met T0, T1, T2, ... duiden wij de mogelijke bomen aan in volgorde van toenemende lengte.

In het volgende zullen wij er geen gebruik meer van maken, dat tussen elk puntenpaar in de oorspronkelijke graph exact één tak voorkomt. Sommige puntenparen mogen best door meer dan een tak verbonden zijn en er mogen ook puntenparen zijn, waartussen geen enkele tak voorkomt. Wij zullen wel steeds veronderstellen, dat de gegeven graph niet zo weinig punten of takken bevat, dat de problemen, die we zullen behandelen, zinloos worden.

Wij vestigen er de aandacht op, dat de gegeven lengtes der takken, mits reëel, overigens willekeurig mogen zijn (bijv. negatief): zo is bijv. het al of niet gelden van de driehoeksongelijkheid voor ons betoog volledig irrelevant.

Stelling 1: De langste tak van een gesloten kring behoort nooit tot de kortste boom.

Deze stelling kan bewezen worden door te laten zien, dat, gegeven een boom, die de langste tak uit een gesloten kring bevat, altijd een kortere boom geconstrueerd kan worden, zodat de gegeven boom niet T0 geweest kan zijn. Verwijder nl. de tak in kwestie uit de gegeven boom, deze valt daardoor uiteen in twee stukken A en B, waarna elk punt of tot A of tot B behoort. In de gesloten kring verbindt de tak in kwestie een knooppunt uit A met een knooppunt uit B. Vervolgen wij nu het andere pad tussen deze twee knooppunten, dat per definitie in de gesloten kring voorkomt, dan moeten we minstens één tak tegenkomen, die een punt uit A verbindt met een punt uit B. Deze tak, die korter is dan de tak, die we uit de gegeven boom verwijderd hebben, wordt uitgekozen om de stukken A en B weer met elkaar te verbinden. Hiermee hebben we echter een boom geconstrueerd, die kennelijk korter is dan de oorspronkelijke, waarmee Stelling 1 bewezen is.

Stelling 2: Het criterium, vermeld in Stelling 1, is voldoende om TO te bepalen.

We maken hierbij gebruik van het feit dat er hoogstens één gesloten kring ontstaat, wanneer we één tak toevoegen aan een graph zonder gesloten kringen, en omgekeerd, dat bij verwijdering van een tak uit de enige gesloten kring in een graph, weer een graph zonder gesloten kringen ontstaat. Wij onderwerpen nu de gegeven takken in een willekeurige volgorde aan het volgende onderzoek. Elke tak wordt (voorlopig) geaccepteerd. Zodra echter door het accepteren van een nieuwe tak in de graph der geaccepteerde takken een kring gesloten wordt - dit is dan de enige kring! - wordt de langste tak van die kring alsnog verworpen, waarmee de enige kring weer is opgeheven. Wanneer alle takken aan dit onderzoek zijn onderworpen, blijft er een subgraph van uiteindelijk geaccepteerde takken over. Was de oorspronkelijke graph samenhangend - en zulks was verondersteld - dan is ook de overblijvende subgraph samenhangend, verder bevat deze subgraph blijkens onze constructie geen gesloten kringen en is het dus een boom. We hebben echter uit de verzameling van alle takken uitsluitend takken verworpen op grond van het criterium, dat ze volgens Stelling 1 niet tot TO kunnen behoren. Aangezien de takken, die tenslotte overblijven, een boom blijken te vormen, moet dit dus de boom TO zijn en Stelling 2 is hiermee bewezen. Uit het bewijs volgt nu tevens, dat de volgorde, waarin de takken onderzocht worden, niet ter zake doet.

Opmerking

Zodra het aantal voorlopig geaccepteerde takken eenmaal = n-1 is geworden, vormen zij een boom tussen de n gegeven punten; dit blijft dan verder zo tot aan het einde van de constructie. Het onderzoek van een nieuwe tak heeft dan tot gevolg of, dat de nieuwe tak meteen weer verworpen wordt, of dat de nieuwe een voorlopig geaccepteerde tak vervangt. In het laatste geval wordt de lengte van de "tussentijdse" boom korter, in het eerste blijft die uit de aard der zaak constant.

Bij mijn weten zijn er twee practische methodes gepubliceerd, om de kortste boom uit een graph te vinden. Zij zijn beide speciale gevallen van de boven beschreven constructie en schrijven een speciale volgorde, waarin de takken onderzocht moeten worden, voor, deze volgorde is dan zo gekozen, dat de hoeveelheid werk daardoor drastisch beperkt wordt.

Zoals onze constructie onmiddellijk aantoont, is de kortste boom T0 invariant voor zodanige veranderingen der taklengtes, dat voor de takken de volgorde van toenemende lengte niet verandert. Deze invariantie geldt niet meer voor T1, T2,... etc.; we kunnen over hen echter twee stellingen bewijzen, gebruik makend van de vrijheid van volgorde, waarin we bij de constructie van T0 de takken aan het beschreven onderzoek onderwerpen.

<u>Stelling 3</u>: Indien m takken van T0 geen deel uitmaken van Tk, moet de index k aan de ongelijkheid: $2^m - 1 \leq k$ voldoen.

Om deze stelling te bewijzen voeren we de beschreven constructie van T0 uit, beginnend met de takken van Tk, d.w.z. met de boom Tk als "tussentijdse" boom. Wij zetten nu de constructie voort met aan het onderzoek te onderwerpen een willekeurige greep uit de m takken van T0. Bij elke stap zal de nieuwe tak, die tot T0 behoort en daarom niet verworpen mag worden, in de tussentijdse boom worden opgenomen, daarbij een andere tak (uit Tk, maar niet uit T0) verdringend: in elke stap wordt de tussentijdse boom dus korter. Aangezien het aantal niet-lege grepen uit m elementen gelijk is aan 2^m-1, hebben we 2^m-1 bomen geproduceerd, alle korter dan Tk en alle verschillend van elkander, waarmee Stelling 3 bewezen is. Een andere manier om ditzelfde resultaat te formuleren is:

Als k voldoet aan de ongelijkheid $k < 2^m-1$ (met $m \leq n$), dan hebben de kortste en de op k na kortste boom minstens n-m takken gemeenschappelijk. Als bijzonder geval volgt onmiddellijk, dat T1 en T2 elk exact n-2 takken met T0 gemeen hebben.

Als we wisten, welke tak van T0 niet in T1 voorkomt, zouden we deze uit de oorspronkelijke graph kunnen verwijderen en om T1 te vinden de kortste boom kunnen bepalen uit de aldus gewijzigde graph. Nu we dit niet weten, moeten we de n-1 takken van T0 bij toerbeurt weglaten en steeds de twee stukken van T0 zo voordelig mogelijk met elkaar verbinden, de kortste van deze n-1 bomen is T1. Het is gemakkelijk in te zien, dat de takken, die in aanmerking komen om de twee stukken van T0 weer te verbinden, alle voorkomen in de kortste boom, die geen enkele tak met T0 gemeen heeft. De n-1 bomen, waaruit we T1 moeten selecteren, zijn met een zeker "verlies" uit T0 ontstaan. Onder deze is T1 degene met het minimale verlies; aangezien dit verlies het <u>verschil</u> van twee taklengtes is, is het duidelijk, dat T1 niet invariant hoeft te zijn voor die veranderingen van taklengtes, die voor de takken de volgorde van toenemende lengte onveranderd laten. Het is deze eigenschap, die maakt, dat T0 zoveel makkelijker bepaald kan worden dan T1 en volgende. Voor wat grotere waarden van k wordt de bepaling van Tk alras een heel onaantrekkelijk vraagstuk.

<u>Stelling 4</u>: Elke boom - uitgezonderd de kortste - bevat hoogstens één tak, die niet tevens in een kortere boom voorkomt.

We beschouwen een willekeurige boom T $\neq$ T0. Indien al zijn takken reeds voorkomen in de vereniging van de bomen korter dan T, dan gehoorzaamt boom T per definitie aan Stelling 4. Indien T takken bevat buiten de vereniging der kortere bomen, dan gaan we de constructie van de kortste boom uitvoeren, beginnend met de boom T. Daarna onderzoeken wij de overige takken in een willekeurige volgorde, zolang de nieuwe tak steeds onmiddellijk verworpen wordt en houden op, zodra voor het eerst een nieuwe tak geaccepteerd is. Onze tussentijdse boom is korter dan T en wijkt slechts in één tak van T af, waarmee het gestelde is bewezen. Als een dergelijke boom als tussentijdse boom optreedt, staat dus a priori vast, welke van zijn takken het eerst vervangen zal worden. Het aantal bomen met die eigenschap is kennelijk gelijk aan het aantal takken van de oorspronkelijke graph, verminderd met n-1, d.w.z. verminderd met het aantal takken in een boom.

Literatuur:

Cayley, A.: A Theorem on Trees, Mathematical Papers, Vol.XIII, pp. 26-28.

Prüfer, H.: Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen, Arch.Math.Phys. (3), 27 (1918), pp. 142-144.

Kruskal jr, J.B.: On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Travelling Salesman Problem, Proc.Amer.Soc. 7 (1956), pp. 48-50.

Prim, R.C.: Shortest Connection Networks and Some Generalizations, The Bell System Technical Journal, Vol. XXXVI, No 6 (1957), pp. 1389-1401.

Berge, C.: Théorie des graphes et ses applications, Paris Dunod (1958), pp. 68-69.

Dijkstra, E.W.: A Note on Two Problems in Connexion with Graphs, Numerische Mathematik, 1 (1959), pp. 269-271.

-.-.-.-.-