STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1964-001

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

M.A. Maurice

25 januari 1964

Over compacte geordende ruimten

1964

ZW 1964-001

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

door

M.A. Maurice

25 januari 1964

Over compacte geordende ruimten

I. 1. Een "totaal geordende topologische ruimte" is een paar $(X, I_<)$, waarin X een totaalgeordende verzameling (met ordening $<$) is, en waarin de topologie $I_<$ wordt gedefinieerd met behulp van de subbasis bestaande uit alle verzamelingen $\{x|x<a\}$ en $\{x|x>b\}$ $(a,b \in X)$.

Het is bekend dat een totaalgeordende topologische ruimte volledig normaal is. Zie [7]

Opmerking: Indien X een verzameling is, en $<$ is een totale ordening van X, dan zullen we zowel de totaalgeordende verzameling $(X,<)$ als de totaalgeordende topologische ruimte $((X,<),I_<)$ eveneens met X aangeven.

Stelling 1: Als X een totaalgeordende topologische ruimte is,

dan zijn de beweringen: "X is compact" en "in X heeft iedere verzameling zowel een ondergrens als een bovengrens" aequivalent.
Bewijs: zie [1]

In het volgende zij X steeds een compacte totaalgeordende topologische ruimte.

2. Voorbeeld: Indien α een ordinaalgetal is, dan is het lexicografisch geordende product van α factoren $\{0,1\}$,

$$Z_\alpha=\{0,1\}^\alpha \quad ,$$

een compacte, totaalgeordende topologische ruimte.
Bovendien is Z_α nuldimensionaal. Zie [2].

3. Twee elementen a en b ($a < b$) in X heten "buren", indien $\{x \mid a<x<b\}=\emptyset$

Stelling 2: (i) Een clopen deelverzameling van X is de vereniging van eindig veel disjuncte clopen intervallen.
(ii) X is dan en slechts dan niet samenhangend, als in X twee buren voorkomen.
Bewijs: zie [3].

4. Onder een ϑ-rij voor X verstaan we een rij $V=\{V_\gamma\}_\gamma$ van ϑ-verdelingen

$$V_\gamma = \{X_p^{(\gamma)}\}_{p\in Z_\gamma}$$

van X, die door transfiniete inductie als volgt is bepaald:

(i) $V_0=\{X^{(0)}\}$, $X^{(0)}=X$

(ii) Zij V_γ gedefinieerd voor $\gamma<\delta$; dan wordt V_δ gedefinieerd op de volgende wijze:

a. als $\delta=\varepsilon+1$, en als $|X_p^{(\varepsilon)}|=1$, dan zij $X_{p0}^{(\delta)}=X_{p1}^{(\delta)}=X_p^{(\varepsilon)}$

b. als $\delta=\varepsilon+1$, en als in $X_p^{(\varepsilon)}$ twee buren a en b ($a < b$) voorkomen, dan zij

$$X_{p0}^{(\delta)}=\{x|x\leq a\}\cap X_p^{(\varepsilon)} \quad , \quad X_{p1}^{(\delta)}=\{x|x\geq b\}\cap X_p^{(\varepsilon)}$$

c. als $\delta=\varepsilon+1$, en als $X_p^{(\varepsilon)}$ samenhangend is, dan zij $X_{p0}^{(\delta)}=\{x|x\leq a\}\cap X_p^{(\varepsilon)}$, $X_{p1}^{(\delta)}=\{x|x\geq a\}\cap X_p^{(\varepsilon)}$, voor zekere a, die voldoet aan $\inf X_p^{(\varepsilon)} < a < \sup X_p^{(\varepsilon)}$

d. als δ een limietgetal is, dan zij

$$X_p^{(\delta)} = \bigcap_{\gamma<\delta} X_{p/\gamma}^{(\gamma)}$$

Stelling 3: Bij elke $\mathfrak{V}$-rij V voor X en bij elke $x\in X$ bestaat een ordinaalgetal

$$\mu_x=\mu_x(V)=\inf\{\mu|\ \exists p\in Z_\mu:\ X_p^{(\mu)}=\{x\}\}.$$

En indien

$$\mathfrak{V}=\mathfrak{V}(V)=\sup_x \mu_x.$$

dan geldt

(i) $\quad |\mathfrak{V}|\leq|X|\leq 2^{|\mathfrak{V}|}$

(ii) $\quad \mathfrak{V}=\inf\{\gamma|\forall p\in Z_\gamma:\ |X_p^{(\gamma)}|=1\}$

Bewijs: 1. Kies $x\in X$.

Beschouw een rij $\{X_p^{(\alpha)}\}_{\alpha<\mu}$ zodanig, dat

$$x\in X_p^{(\alpha)}\subset X_{p/\beta}^{(\beta)} \quad \text{voor } \beta<\alpha<\mu \quad ,$$

en neem aan, dat $|X_p^{(\alpha)}|>1$ voor alle $\alpha<\nu$;

dan is

$$X_p^{(\alpha+1)} \subsetneq X_{p/\alpha}^{(\alpha)} \quad \text{voor} \quad \alpha+1\leq\nu.$$

Dan is echter

$$\bigcup_{\alpha<\nu}(X_{p/\alpha}^{(\alpha)}\setminus X_p^{(\alpha+1)})$$

een deelverzameling van X, die de vereniging is van $|\nu|$ disjuncte, niet-lege verzamelingen; derhalve is $|\nu|\leq|X|$.

Aan elke $x \in X$ is dus een ν_x toe te voegen, met $|\nu_x| \leqq |X|$, zodanig dat

$$x \in X_p^{(\nu_x)} \to \{x\} = X_p^{(\nu_x)}$$

en

$$|X_{p/\nu}^{(\nu)}| \geqq 2 \quad \text{voor } \nu < \nu_x \;;$$

het is duidelijk, dat $\vartheta = \sup_x \mu_x \leqq \sup_x \nu_x$.
Daar echter $|\nu_x| \leqq |X|$ voor alle $x \in X$, volgt ook $|\vartheta| \leqq |X|$.

2. Als $|X_p^{(\gamma)}| \geqq 2$, en $X_p^{(\gamma)}$ is niet-samenhangend (zodat, zoals men gemakkelijk verifiëert, $X_p^{(\gamma)}$ disjunct is met alle $X_q^{(\gamma)}$, $q \neq p$), geldt blijkbaar voor alle $x \in X_p^{(\gamma)}$, dat $\mu_x > \gamma$; als $|X_p^{(\gamma)}| \geqq 2$, en $X_p^{(\gamma)}$ is samenhangend, dan geldt voor alle x met $\inf X_p^{(\gamma)} < x < \sup X_p^{(\gamma)}$, dat $\mu_x > \gamma$; dit betekent in beide gevallen, dat $\vartheta > \gamma$. Derhalve is

$$\vartheta = \inf \{\gamma \mid \forall p \in Z_\gamma : |X_p^{(\gamma)}| = 1\}$$

3. Zij nu $X_p^{(\vartheta)} = \{x_p^{(\vartheta)}\}$; dan is $\phi : p \to x_p^{(\vartheta)}$ blijkbaar een afbeelding van Z_ϑ op X; dus $|Z_\vartheta| \geqq |X|$, $2^{|\vartheta|} \geqq |X|$.

__Definitie:__ Onder de __verdelingsgraad__ van X verstaan we

$$\Theta(X) = \min \{\vartheta(V) \mid V \text{ is } \vartheta\text{-rij voor } X\}.$$

Het is duidelijk, dat $\Theta(X)$ een ordeningstheoretische invariant is voor X.
We kunnen echter aantonen, dat $\Theta(X)$ ook een topologische invariant is; d.w.z. als twee compacte totaalgeordende ruimten X en Y homeomorf zijn, dan is $\Theta(X) = \Theta(Y)$; men kan dit ook aldus formuleren: als een compacte Hausdorffruimte op meer dan één manier is te ordenen, is de verdelingsgraad in alle gevallen dezelfde.
Een schets van het bewijs van deze bewering wordt onder 5 gegeven; voor het volledige bewijs zie men [3].

5. Onder een τ-rij voor een compacte Hausdorffruimte T verstaan we een rij $U=\{U_\gamma\}_\gamma$ van τ-verdelingen

$$U_\gamma = \{T_p^{(\gamma)}\}_{p\in Z_\gamma}$$

van T, die door transfiniete inductie als volgt is bepaald:

(i) $U_0 = \{T^{(0)}\}$, $T^{(0)} = T$

(ii) Zij U_γ gedefinieerd voor $\gamma < \delta$;

dan wordt U_δ gedefinieerd op de volgende wijze:

a. als $\delta=\varepsilon+1$ en als $|T_p^{(\varepsilon)}|=1$, dan zij

$$T_{p0}^{(\delta)}=T_{p1}^{(\delta)}=T_p^{(\varepsilon)}$$

b. als $\delta=\varepsilon+1$ en $T_p^{(\varepsilon)}$ is niet-samenhangend, laat dan $T_{p0}^{(\delta)}$ en en $T_{p1}^{(\delta)}$ twee disjuncte, niet-lege deelverzamelingen van $T_p^{(\varepsilon)}$ zijn, die clopen zijn in $T_p^{(\varepsilon)}$, en waarvan de vereniging $T_p^{(\varepsilon)}$ is.

c. als $\delta=\varepsilon+1$ en $T_p^{(\varepsilon)}$ is samenhangend, laat dan $T_{p0}^{(\delta)}$ en $T_{p1}^{(\delta)}$ twee niet-lege echte deelverzamelingen van $T_p^{(\varepsilon)}$ zijn, die gesloten zijn in $T_p^{(\varepsilon)}$, en die voorts zodanig zijn dat $T_{p0}^{(\delta)} \cup T_{p1}^{(\delta)}=T_p^{(\varepsilon)}$ en dat $|T_{p0}^{(\delta)} \cap T_{p1}^{(\delta)}|$ minimaal is.

d. als δ een limietgetal is, dan zij

$$T_p^{(\delta)}= \bigcap_{\gamma<\delta} T_{p/\gamma}^{(\gamma)} .$$

Stelling 4: Bij elke τ-rij U voor een compacte Hausdorffruimte T en bij elke $t\in T$ bestaat een ordinaalgetal

$$\mu_t=\mu_t(U)= \inf \{\mu \mid \exists\, p\in Z_\mu : T_p^{(\mu)}=\{t\}\}.$$

En indien

$$\tau=\tau(U) = \sup_t \mu_t ,$$

dan geldt

$$|\tau| \leq |X|$$

Bewijs: als het overeenkomstige gedeelte van stelling 3.

Definitie: $\tau^{*}(T) = \min \{\tau(U) \mid U \text{ is } \tau\text{-rij voor } T\}$

Het is duidelijk, dat τ^{*} een topologische invariant is.

Hulpstelling: Zij X een compacte totaalgeordende ruimte.

Zij $U=\{U_\gamma\}_\gamma$ —— $U_\gamma=\{T_p^{(\gamma)}\}_{p\in Z_\gamma}$ —— een τ-rij voor X met $\tau(U)=\tau$; zij hierbij $\tau\geq\omega$ en $\tau=\mu_0+\nu_0$, waarin μ_0 een limietgetal en ν_0 een geheel getal ≥ 0 is.

Dan is er een ϑ-rij $V=\{V_\gamma\}_\gamma$ —— $V_\gamma=\{X_p^{(\gamma)}\}_{p\in Z_\gamma}$ —— voor X, met de eigenschap, dat bij elk limietgetal $\mu\leq\mu_0$ en elke $p\in Z_\mu$ een $q=q(p)\in Z_\mu$ bestaat, zodanig dat

(i) $q(p/\nu)= q(p)|\nu$, als ν een limietgetal $<\mu$ is

(ii) $X_p^{(\mu)}\subset T_{q(p)}^{(\mu)}$

Bewijs: zie [3].

Stelling 5: $\Theta(X) = \tau^{*}(X)$.

Bewijs:

Zij $U=\{U_\gamma\}_\gamma$ een τ-rij, waarvoor $\tau(U)=\tau^{*}(X)$.
Indien $\tau^{*}=\mu_0+\nu_0$, waarin μ_0 een limietgetal en ν_0 een geheel getal ≥ 0 is, dan bestaat, op grond van de hulpstelling, een ϑ-rij $V=\{V_\gamma\}_\gamma$, zodanig dat

$$\forall p\in Z_{\mu_0} : \exists q\in Z_{\mu_0} : X_p^{(\mu_0)}\subset T_q^{(\mu_0)} .$$

Voor elke $q\in Z_{\mu_0}$ geldt echter dat ten hoogste $|\nu_0|$ τ-splitsingen nodig zijn om $T_q^{(\mu_0)}$ in punten te verdelen; dit betekent, dat $|T_q^{(\mu_0)}|\leq 2^{|\nu_0|}$, en dus ook (voor alle $p\in Z_{\mu_0}$) $|X_p^{(\mu_0)}|\leq 2^{|\nu_0|}$; derhalve zijn ook ten hoogste $|\nu_0|$ ϑ-splitsingen nodig om alle $X_p^{(\mu_0)}$ in punten te verdelen.
Hieruit volgt $\vartheta(V)\leq\mu_0+\nu_0=\tau^{*}$; zodat $\Theta(X)\leq\tau^{*}$. Dus $\Theta(X)= \tau^{*}$.

Gevolg: $\Theta(X)$ is een topologische invariant.

Stelling 6: Als X nuldimensionaal (of samenhangend) is, en $Y\subset X$, dan is $\Theta(Y)\leq\Theta(X)$.

Bewijs: duidelijk.

6. Stelling 7: $\Theta(Z_\alpha)=\alpha$

Bewijs: zie [3]

Gevolg: Als $\alpha \neq \beta$, dan zijn Z_α en Z_β verschillende topologische ruimten.

II. Het overige gedeelte van de syllabus is rapport WN7 (1963) van het Mathematisch Centrum.

(i) ctgtr betekent: compacte totaalgeordende topologische ruimte.

(ii) als X een ctgtr is, dan is X^* de ctgtr, die men verkrijgt, door punten die elkaars buur zijn in X te identificeren.

(iii) Als a en b buren zijn, en $a < b$, dan noemen we a rechtersprongpunt, b linkersprongpunt.

§1. Stelling 8: Een homogene ctgtr X voldoet aan het eerste aftelbaarheidsaxioma.

Bewijs:

Zij $\{x_i\}_{i<\omega}$ een aftelbaar oneindige verzameling in X; daar X compact is, heeft deze verzameling een verdichtingspunt, bijv. y; y is dan de limiet van een aftelbare rij, en omdat X homogeen is, is elk punt van X, en i.h.b. a=inf X, de limiet van een aftelbare rij. Voor a betekent dit, dat in dit punt een aftelbare locale basis bestaat; daar X homogeen is, geldt dit voor elke $x \in X$; maar dat betekent dat X aan het 1e aftelbaarheidsaxioma voldoet.

Stelling 9: Als X een ctgtr is, en $|X| > \mathfrak{c}$, dan is X niet homogeen.

Bewijs:

X voldoet niet aan het 1e aftelbaarheidsaxioma (zie [3], st.4,3,1); en dus is (st. 8) X niet homogeen.

Stelling 10: Een homogene ctgtr X is 0-dimensional.

Bewijs:

Zij Y een component van X. Indien $|Y| > 1$, zij dan $a=\inf Y$, $b=\sup Y$, en zij c zodanig dat $a<c<b$. Als nu C_x de component in X aanduidt, waarin x ligt, is blijkbaar $C_a\setminus\{a\}=Y\setminus\{a\}$ een samenhangende deelruimte van X, terwijl $C_c\setminus\{c\}=Y\setminus\{c\}$ een niet-samenhangende deelruimte van X is. Dan is echter X niet homogeen. Dus $|Y|=1$; d.w.z. dat X 0-dimensionaal is.

§2. Hulpstelling: Als α en $\beta=\omega^\delta$ aftelbare limietordinaalgetallen zijn, en $\alpha\leq\beta$, dan bestaat een stijgende rij $(\mu_i)_{i<\alpha}$ van het type α, zodanig dat $\lim\limits_{i<\alpha}\mu_i=\beta$.

Bewijs:

1. We merken eerst op, dat bij elk aftelbaar limietordinaalgetal β een rij $(\sigma_i)_{i<\omega}$ bestaat, zodanig dat $\lim\limits_{i<\omega}\sigma_i=\beta$.
Immers: zij $(\nu_i)_{i<\omega}$ de, als type ω welgeordende, verzameling van ordinaalgetallen $<\beta$; een monotoon stijgende deelrij van de rij $(\nu_i)_{i<\omega}$ is een rij $(\sigma_i)_{i<\omega}$ met de gevraagde eigenschappen. (zie ook [6])

2. Voorts laten we zien, dat het volgende is, de stelling te bewijzen voor ordinaalgetallen $\alpha\leq\beta$, die geschreven kunnen worden als $\alpha=\omega^\gamma(1\leq\gamma\leq\delta)$.
Immers: als $\alpha=\omega^{\gamma_1}.\, n_1+\omega^{\gamma_2}.\, n_2+\ldots+\omega^{\gamma_k}.\, n_k$, $n_i>0(i=1,2,\ldots k)$ $\delta\geq\gamma_1>\gamma_2\ldots>\gamma_k>0$, dan kan men schrijven $\alpha=\alpha'+\omega^{\gamma_k}$; als nu $(\nu_i)_{i<\omega^{\gamma_k}}$ een stijgende rij is, met limiet ω^δ, dan is ook $(\mu_i)_{i<\alpha}$ een stijgende rij met limiet ω^δ, als $\mu_i=i$ voor $i<\alpha'$ en $\mu_i=\alpha'+\nu_i$ voor $\alpha'\leq i<\alpha$.

3. We bewijzen nu de stelling door transfiniete inductie naar δ.
(i) $\delta=1$ impliceert $\beta=\omega$, $\alpha=\omega$, en de bewering is triviaal.
(ii) Zij de stelling bewezen voor $\delta<\varepsilon$
(ii,1) Zij $\varepsilon=\delta_1+1$.
Dan is $\beta=\omega^\varepsilon=\omega^{\delta_1+1}=\omega^{\delta_1}.\,\omega=\beta_1.\omega$.

Als $\alpha=\omega^\gamma=\beta$ is de bewering triviaal; zij dus $\alpha=\omega^\gamma<\beta$; dan is $\alpha\leqq\beta_1$.
Op grond van de inductie-aanname is β_1 de limiet van een stijgende rij $(\nu_i)_{i<\alpha}$ van het type α; β_1 is echter ook de limiet van een stijgende rij $(\lambda_j)_{j<\omega}$ van het type ω; indien nu

$$\begin{cases} \mu_i=\nu_i \text{ voor alle } i \text{ met } \nu_i<\lambda_0 \\ \mu_i=\beta_1.j+\nu_i \text{ voor alle } i \text{ met } \lambda_{j-1}\leqq\nu_i<\lambda_j, \end{cases}$$

dan is $(\mu_i)_{i<\alpha}$ een stijgende rij van het type α, en $\lim\limits_{i<\alpha}\mu_i=\beta$

(ii.2) Zij ε een limietgetal.
Dan is ε de limiet van een stijgende rij $(\varepsilon_n)_{n<\omega}$.
En ook is dan

$$\beta=\lim_{n<\omega}\omega^{\varepsilon_n}.$$

Als $\alpha=\omega^\gamma=\beta$ is de bewering triviaal; zij dus $\alpha=\omega^\gamma<\beta$.
Indien nu

$$\begin{cases} V_0=\{\nu/\nu<\omega^{\varepsilon_0}\} \\ V_n=\{\nu/\omega^{\varepsilon_{n-1}}\leqq\nu<\omega^{\varepsilon_n}\} \quad (n=1,2,\ldots), \end{cases}$$

dan bestaat dus een N, zodanig dat

$$\text{type } V_n=\omega^{\varepsilon_n}\geqq\alpha \text{ voor } N\leqq n<\omega$$

<u>a.</u> Als $\alpha=\omega^\gamma$, $\gamma=\gamma_1+1$, dan is $\alpha=\omega^{\gamma_1+1}=\omega^{\gamma_1}.\omega=\alpha_1.\omega$.

Voor $N\leqq n<\omega$ is elke ω^{ε_n} de limiet van een stijgende rij $(\nu_i^{(n)})_{i<\alpha_1}$ van het type α_1.

Definieert men nu voor $N\leqq n<\omega$

$$\mu_i=\omega^{\varepsilon_{n-1}}+\nu_i^{(n)} \text{ voor } \alpha_1.(n-N)\leqq i<\alpha_1.(n-N+1),$$

dan is $(\mu_i)_{i<\alpha}$ een rij van het type α, en $\lim\limits_{i<\alpha}\mu_i=\beta$.

<u>b.</u> Als $\alpha=\omega^\gamma$ en γ is limietgetal, dan is γ de limiet van een stijgende rij $(\gamma_n)_{n<\omega}$, en ook is

$$\alpha=\lim_{n<\omega}\omega^{\gamma_n}.$$

Voor $N \leq n < \omega$ is nu $\omega^{\gamma_n} < \alpha \leq \omega^{\varepsilon_n}$, en dus is ω^{ε_n} de limiet van een stijgende rij $(\nu_i^{(n)})_{i<\omega^{\gamma_n}}$ van het type ω^{γ_n}.

Definieert men nu voor $N \leq n < \omega$

$$\mu_i = \omega^{\varepsilon_{n-1}} + \nu_i^{(n)} \quad \text{voor } \omega^{\gamma_{n-N}} \leq i < \omega^{\gamma_{n-N+1}},$$

dan is $(\mu_i)_{i<\alpha}$ een rij van het type α, en $\lim\limits_{i<\alpha} \mu_i = \beta$.

Stelling 11: Zij $X = Z_{\omega^\alpha}$; $|\alpha| \leq \aleph_0$.

1. Als p geen sprongpunt is, of als p een rechtersprongpunt is, geldt: $\{x/x \leq p\} \backsim Z_{\omega^\alpha}$

2. Als p geen sprongpunt is, of als p een linkersprongpunt is, geldt: $\{x/p \leq x\} \backsim Z_{\omega^\alpha}$

Bewijs:

1. Zij $L = \{p/ \exists i_0 < \omega^\alpha: p_i = 0 \text{ voor } i \geq i_0\}$
   $R = \{p/ \exists i_0 < \omega^\alpha: p_i = 1 \text{ voor } i \geq i_0\}$

   In beide gevallen zullen we onder i_0 steeds de kleinste index verstaan met de verlangde eigenschap.
   Het is duidelijk, dat een linkersprongpunt (rechtersprongpunt) tot L(tot R) behoort, en dat een punt van L (van R), dan en slechts dan een linkersprongpunt (rechtersprongpunt) is, als i_0 een niet-limietgetal is.

(i) Zij $p \notin R$.
   laat $(m_\lambda)_\lambda$ de welgeordende rij van indices zijn, waarvoor $p_{m_\lambda} = 1$; dan is $(m_\lambda)_\lambda$ een rij van het type ω^α.

   Definieer nu

$$V_0 = \{x/x \leq p_0p_1\ldots\overset{\overset{m_0^{e}}{\downarrow}}{0}\ \overrightarrow{1111\ldots}^{\text{plaats}}\}$$

$$V_\lambda = \{x/p_0p_1\ldots\overset{\overset{m_{\lambda-1}^{e}}{\downarrow}}{1}\ \overrightarrow{000\ldots}^{\text{plaats}} \leq x \leq p_0p_1\ldots\overset{\overset{m_\lambda^{e}}{\downarrow}}{0}\ \overrightarrow{1111\ldots}^{\text{plaats}}\}$$

als λ een niet-limietgetal is

$$= \{x/p_0p_1\ldots\overset{n_\lambda^{e}\text{ plaats}}{\overrightarrow{0000\ldots}} \leq x \leq p_0p_1\ldots\overset{\overset{m_\lambda^{e}}{\downarrow}}{0}\ \overrightarrow{111\ldots}^{\text{plaats}}\}$$

als λ een limietgetal is, en $n_\lambda = \lim\limits_{i<\lambda} m_i$.

Definieer ook

$$W_0 = \{x/x \leq 0\ \overrightarrow{1111\ldots}\}$$

$$W_\lambda = \{x/\ 111\ldots\ \overset{(\lambda-1)^{e}\text{ plaats}}{\overset{\downarrow}{1}}\ \overrightarrow{0000\ldots} \leq x \leq 111\ldots\ \overset{\lambda^{e}\text{ plaats}}{\overset{\downarrow}{0}}\ \overrightarrow{11111\ldots}\}$$

als λ een niet-limietgetal is

$$= \{x/\ 1111\ldots\ \overset{\lambda^{e}\text{ plaats}}{\overrightarrow{0000\ldots}} \leq x \leq 1111\ldots\ \overset{\lambda^{e}\text{ plaats}}{\overrightarrow{01111\ldots}}\}.$$

als λ een limietgetal is.

Het is duidelijk, dat de verzamelingen V_λ, $W_\lambda (0 \leq \lambda < \omega^\alpha)$ alle gelijkgeordend zijn met Z_{ω^α}.

Hieruit volgt, dat ook de geordende verenigingen

$$\bigcup_{\lambda<\omega^\alpha} V_\lambda \quad \text{en} \quad \bigcup_{\lambda<\omega^\alpha} W_\lambda ,$$

dus ook $\{x/x \leq p\}$ en Z_{ω^α},

gelijkgeordend zijn.

(ii) Op analoge wijze bewijst men, dat voor $p \in L$ geldt: $\{x/p \leq x\} \sim Z_{\omega^\alpha}$

(iii) Hieruit volgt dat voor $p \in L$, $q \in R$, $p<q$ geldt: $\{x/p \leq x \leq q\} \sim Z_{\omega^\alpha}$

2. We bewijzen vervolgens:

(i) Als β een aftelbaar limietordinaalgetal is, en $\beta \leq \omega^\alpha$, dan is Z_{ω^α} te schrijven als geordende vereniging van het type β van verzamelingen $A_i (0 \leq i \leq \beta)$, waarbij $A_i \sim Z_{\omega^\alpha}$ voor $0 \leq i < \beta$, en $|A_\beta| = 1$.

Aldus:

Op grond van de hulpstelling bestaat een stijgende rij $(\mu_i)_{i<\beta}$ zodanig dat $\lim\limits_{i<\beta} \mu_i = \omega^\alpha$.

Zij nu

$$A_0 = \{x/x \leq 111\ldots\ \overset{\mu_0^{e}\text{ plaats}}{\overset{\downarrow}{0}}\ \overrightarrow{111\ldots}\}$$

$$A_i = \{x/\ 111\ldots\ \overset{\mu_{i-1}^{e}\text{ plaats}}{\overset{\downarrow}{1}}\ \overrightarrow{0000\ldots} \leq x \leq 111\ldots\ \overset{\mu_i^{e}\text{ plaats}}{\overset{\downarrow}{0}}\ \overrightarrow{1111\ldots}\}$$

als i een niet-limietgetal is

$$= \{x/1111\ldots\ \overset{\nu_i^{e}\text{ plaats}}{\overrightarrow{00000\ldots}} \leq x \leq 1111\ldots\ \overset{\mu_i^{e}\text{ plaats}}{\overrightarrow{01111\ldots}}\}$$

als i een limietgetal is, en $\nu_i = \lim\limits_{j<i} \mu_j$

$$A_\beta = \{\overrightarrow{11111\ldots}\}.$$

Dan voldoen de verzamelingen $A_i (0 \leq i \leq \beta)$ aan de gestelde eisen.

(ii) Als β een aftelbaar limietordinaalgetal is, en $\beta \leq \omega^\alpha$, dan is Z_{ω^α} te schrijven als geordende vereniging van het type β^* van verzamelingen $A_i (0 \leq i \leq \beta)$, waarbij $A_i \sim Z_{\omega^\alpha}$ voor $0 \leq i < \beta$, en $|A_\beta| = 1$.

Bewijs als boven

3. (i) Zij nu p geen sprongpunt, en zij $(m_\lambda)_{\lambda<\beta}$ de welgeordende rij van indices, waarvoor $p_{m_\lambda}=1$; dan is β een limietgetal.

Definieer nu

$$B_0 = \{x/x \leq p_0 p_1 \ldots \overset{\substack{m_0^{e}\\ \downarrow}}{0}\ \overset{\text{plaats}}{\overrightarrow{1111\ldots}}\}$$

$$B_i = \{x/p_0 p_1 \ldots \overset{\substack{m_{i-1}^{e}\\ \downarrow}}{1}\ \overset{\text{plaats}}{\overrightarrow{0000\ldots}} \leq x \leq p_0 p_1 \ldots \overset{\substack{m_i^{e}\\ \downarrow}}{0}\ \overset{\text{plaats}}{\overrightarrow{1111\ldots}}\}$$

als i een niet-limietgetal is

$$= \{x/p_0 p_1 \ldots \overset{\substack{n_i^{e}\\ \downarrow}}{0}\ \overset{\text{plaats}}{\overrightarrow{000\ldots}} \leq x \leq p_0 p_1 \ldots \overset{\substack{m_i^{e}\\ \downarrow}}{0}\ \overset{\text{plaats}}{\overrightarrow{1111\ldots}}\}$$

als i een limietgetal is, en $n_i = \lim\limits_{j<i} m_j$

$$B_\beta = \{p\}$$

Op grond van 1. en 2. (i) volgt nu gemakkelijk, dat

$$\{x/x \leq p\} \backsim Z_\omega \alpha.$$

(ii) Op dezelfde wijze kan men aantonen, dat, als p geen sprongpunt is, $\{x/p \leq x\} \backsim Z_\omega \alpha$.

Stelling 12: Zij $X = Z_\omega^* \alpha$; $|\alpha| \leq \aleph_0$

Als $\inf X < p < \sup X$, dan geldt

$$\{x/x \leq p\} \backsim \{x/p \leq x\} \backsim Z_\omega^* \alpha\ .$$

Bewijs: analoog aan dat van stelling 11.

Stelling 13: Indien $|\alpha| \leq \aleph_0$ is $Z_\omega \alpha$ een homogene topologische ruimte.

Bewijs:

1. We merken eerst op: als $I \subsetneq Z_\omega \alpha$ en I is een clopen interval in $Z_\omega \alpha$, waarvoor geldt $I \backsim Z_\omega \alpha$, dan is ook $(Z_\omega \alpha \setminus I) \backsim Z_\omega \alpha$.
Immers: als p=inf I, q=sup I, dan is ten hoogste één der verzamelingen $I_p = \{x/x < p\}$, $I_q = \{x/x > q\}$ leeg; indien $I_p \neq \emptyset$ (en/of $I_q \neq \emptyset$) dan is $I_p \backsim Z_\omega \alpha$ (en/of $I_q \backsim Z_\omega \alpha$), op grond van stelling 11.

dan is ook (in alle drie de mogelijke gevallen) $I_p \cup I_q \backsim Z_{\omega^\alpha}$.

2. Kies nu $p,q \in Z_{\omega^\alpha}$; $p \neq q$.

Dan is p (resp. q) de doorsnede van een dalende aftelbare rij van clopen intervallen I_n (resp. J_n); z.b.d.a. Zij $I_1 \cap J_1 = \emptyset$.
Zij f_0 een monotone afbeelding van $Z_{\omega^\alpha} \setminus I_1$ op $Z_{\omega^\alpha} \setminus J_1$;
Zij f_n een monotone afbeelding van $I_n \setminus I_{n+1}$ op $J_n \setminus J_{n+1}$.
($n=1,2,3,\ldots$).
Dan is de functie f die gedefinieerd wordt door

$$f(x) = f_n(x) \text{ als } x \in I_n \setminus I_{n+1}$$

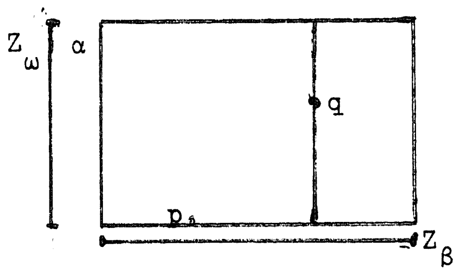
($n=0,1,2,3,\ldots$; $I_0 = Z_{\omega^\alpha}$); $f(p)=q$, een topologische afbeelding van Z_{ω^α} op zichzelf, die voldoet aan $f(p)=q$.
Dit betekent dat Z_{ω^α} homogeen is.

Stelling 14: Als $Z^{**}_{\omega^\alpha}$ de topologische ruimte is, die uit $Z^{*}_{\omega^\alpha}$ ontstaat door identificatie van inf $Z^{*}_{\omega^\alpha}$ en sup $Z^{*}_{\omega^\alpha}$, dan is $Z^{**}_{\omega^\alpha}$ homogeen.

Bewijs: volgt uit stelling 12.

§3. Stelling 15: Indien $\gamma=\beta+\omega^\alpha$, en $\beta \geq \omega^\alpha$, dan is Z_γ niet homogeen.

Bewijs: Zonder beperking der algemeenheid zij $\beta=\delta+\omega^\varepsilon$, met $\varepsilon \geq \alpha$.



(i) Kies $p=(p_i)_{i<\gamma}$ zodanig dat

$$\begin{cases} \forall i<\beta \;\; \exists j,k : (i<j,k<\beta \;\text{ en }\; p_j=0, p_k=1) \\ \forall i \geq \beta : p_i=0 \end{cases}$$

Het is duidelijk, dat iedere omgeving O_p van p een deelruimte bevat, die gelijkgeordend is met $Z_{\omega^\varepsilon+\omega^\alpha}$.

Op grond van lemma 3.3.4.1 geldt dus

$$\Theta(O_p) \geqq \omega^{\varepsilon} + \omega^{\alpha}$$

(ii) Kies $q=(q_i)_{i<\gamma}$ zodanig dat

$$\forall i \;\; \exists j,k\colon\; (i<j,k<\gamma \quad \text{en } p_j=0, p_k=1).$$

Dan heeft q omgevingen O_q, die gelijkgeordend zijn met Z_{ω^α}.
Dan is echter

$$\Theta(O_p) = \omega^{\alpha}$$

(iii) $Z_\beta \cdot Z_{\omega^\alpha}$ is dus niet homogeen; hetzelfde geldt dan voor $Z_{\beta+\omega^\alpha} = Z_\gamma$.

typ: HvD.

Literatuur

[1] J.L. Kelley, General Topolcgy, chap V, problem C

[2] rapport ZW 1962-010, Mathematisch Centrum

[3] rapport WN 6 (1963), Mathematisch Centrum

[4] H. Terasaka, Proc. Japan Acad (1946), 61-68
(geeft een iets ander bewijs van stelling 12).

[5] B. Jonsson, Proc. Amer. Math.Soc. 2, 766-770 (1951)
(geeft een voorbeeld van een compacte nuldimensionale geordende ruimte S, zodanig dat de enige autohomeomorphie van S de identiteit is).

[6] W. Sierpinski, Cardinal and ordinal numbers

[7] N. Bourbaki, Topologie générale Chap. IX, §4 exerc. 11