STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

ZW 1969-001

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen van hoger standpunt uit belicht"

door

Prof.dr.ir. W.L. van der Poel

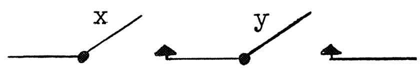
De fundering van de propositionele calculus met behulp van een axioma

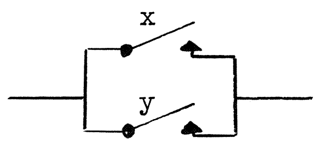
De propositionele calculus, propositierekening of "Aussagenkalkül" genaamd houdt zich bezig met uitspraken die waar of niet waar kunnen zijn en niet toelaten dat iets ook half waar kan zijn. George Boole heeft in de vorige eeuw voor het eerst een calculus opgebouwd om met behulp van eenvoudige regels langs "mechanische" weg de waarheid of onwaarheid van bepaalde uitspraken af te leiden. Door Frege, Whitehead, Russell, Carnap, Hilbert en vele anderen is deze calculus verder uitgebouwd. Juist in de laatste 20 jaren is er weer een geweldige opleving van de belangstelling te zien in de symbolische logica (waarvan de propositierekening slechts een onderdeel is) onder invloed van de opkomst van de rekenmachines.

Nu enkele facetten van ons denkvermogen effectief gemechaniseerd kunnen worden verdiept zich weer de belangstelling in de grondslagen van ons denksysteem en de logica.

Reeds vanaf het begin van het computertijdperk speelde juist de propositierekening een grote rol omdat rekenmachines opgebouwd zijn uit een groot aantal elementen die uitsluiten in twee toestanden kunnen verkeren. Evenals de schakelaar van het elektrisch licht kunnen de kleinste eenheden van een geheugen van een rekenmachine slechts in twee toestanden verkeren die men 0 of 1 kan noemen, of aan en uit maar evengoed waar en onwaar of true of false.

Beschouwen wij eerst eens deze materie van de pragmatische kant en laten wij true en false voorstellen door resp. 1 en 0. Een schakelaar die op 0 staat staat af, geleidt de stroom niet en een schakelaar die op 1 staat staat aan en geleidt de stroom wel. Men komt dan al gauw tot combinatie van schakelaars bijvoorbeeld als volgt:





In de linkertekening geleidt de schakeling alleen dan stroom als én schakelaar x én schakelaar y beide aanstaan. En in de rechterfiguur is het al voldoende als óf de ene óf de andere schakelaar aanstaat óf dat ze allebei aanstaan. Op deze wijze kunnen wij dus verschillende functies of relaties definieren. Laten wij eerst alle mogelijke monadische functies beschouwen, d.w.z. functies van slechts een veranderlijke.

x =	0	1	
f(x)	0	0	Altijd false , triviaal
	0	1	Identiteitsfunctie f(x) = x
	1	0	Negatie. Dit wordt genoteerd als $f(x) = \neg x$
	1	1	Altijd true

Het eerste en laatste geval zijn nauwelijks functies te noemen, het tweede geval correspondeert in een rekenmachine met het draadje dat twee punten doorverbindt. Het derde geval is het meest interessant. Door deze functie wordt van een 0 een 1 en van een 1 een 0 gemaakt.

Met een functie van twee variabelen of relaties tussen twee variabelen zijn vier waardeparen mogelijk. Dit geeft weer aanleiding tot $16 = 2^4$ verschillende functies waarvan niet alle een naam hebben.

x =	0 1 0 1	
y =	0 0 1 1	
	0 0 0 0	Altijd <u>false</u>, triviaal
	0 0 0 1	$x \wedge y$ Spreek uit x én y. Ook genoemd conjunctie
	0 0 1 0	$\neg x \wedge y$ Heeft verder geen naam
	0 0 1 1	y , een triviaal geval omdat x er niet in voorkomt
	0 1 0 0	$x \wedge \neg y$ Heeft verder geen naam
	0 1 0 1	x een triviaal geval omdat y er niet in voorkomt
	0 1 1 0	$x \not\equiv y$ Spreek uit x niet equivalent y
	0 1 1 1	$x \vee y$ Spreek uit x óf y
	1 0 0 0	Functie van Peirce, ook genoemd NOR (= not or) $\neg(x \vee y)$
	1 0 0 1	$x \equiv y$ Spreek uit x equivalent y
	1 0 1 0	$\neg x$
	1 0 1 1	$x \supset y$ Spreek uit x impliceert y
	1 1 0 0	$\neg y$
	1 1 0 1	$x \vee \neg y$ Men zou ook kunnen zeggen $y \supset x$
	1 1 1 0	$x \vert y$ Functie van Sheffer, ook genoemd NAND (= not and)
	1 1 1 1	Altijd <u>true</u>, triviaal

We zullen zonder bewijs van enkele van deze functies laten zien dat ze in elkaar uitdrukbaar zijn. Men zou bijvoorbeeld kunnen nemen de $\neg$ en de $\vee$ en krijgt dan de volgende betrekkingen, die we hier gemakkelijk uit de waardeschema's kunnen verifieren.

$x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y)$ $\qquad$ $x \equiv y = (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$

$x \supset y = \neg x \vee y$ $\qquad$ $x | y = \neg(x \wedge y)$

Men zou ook kunnen zeggen dat deze vergelijkingen de betekenis definieert in termen van uitsluitend <u>or</u> en <u>not</u>.

Er blijken bij de verzameling van de 16 mogelijk functies van twee variabelen twee functies te zijn waarmee het mogelijk is alle andere te definieren in termen van een enkele verbinding. Deze twee zijn de functie van Peirce en de functie van Sheffer.

We zullen in navolging van de literatuur op dit gebied de functie van Sheffer kiezen als uitgangspunt. Uit de gegeven tabel is dan gemakkelijk te verifiëren dat nu geschreven kan worden:

$\neg x = x|x$ $\qquad x \vee y = x|x|y|y$ $\qquad x \wedge y = x|y|x|y$

De implicatie krijgt een bijzonder eenvoudige vorm:

$$x \supset y = x|y|y$$

Als wij in het verdere verloop van het verhaal willen gaan manipuleren met grotere vormen dan zal het nodig zijn om haakjes te gebruiken om de volgorde van de bewerkingen aan te geven. In het bovenstaande is al een bepaalde volgorde gesuggereerd door van grotere en kleinere strepen gebruik te maken. Dit leidt echter tot onoverzichtelijke formules. Ook haakjes geven snel een onoverzichtelijk beeld. We zullen daarom van nu af in navolging van Lukasiewicz gebruik maken van de prefixnotatie: de operator wordt geschreven voor de beide operanden dus $|xy$. Eigenlijk zou de operator geheel overbodig zijn omdat hier sprake is van slechts een soort operatie namelijk de Shefferverbinding. Men kan dus beter de $|$ beschouwen als een soort van haakje zonder bijpassend sluithaakje. Zo kan $||uv||xyz$ niet anders samengenomen worden dan $\underbrace{|\underbrace{|uv}|\underbrace{|xy}z}$

Maar dan kunnen wij in navolging van Curry evengoed de strepen geheel links weglaten, daat het bij voorbaat duidelijk is dat links bij n variabelen het aantal strepen tot n-1 aangevuld moet worden. (De hier gebruikte $|$ moet niet verward worden met de bij Curry in gebruik zijnde applicatieoperator).

Tot nu toe hebben wij over onze formules op vrij pragmatische wijze gesproken. We zullen nu schetsen hoe de theorie ook zonder de aanschouwing van waardeschema's opgebouwd kan worden uit axioma's en regels. Bij een doelmatige keuze van axioma's kunnen we de op pag gegeven formules daaruit afleiden met behulp van de regels van het spel zonder meer te hoeven letten op de inhoudelijke betekenis van onze variabelen.

De gebruikelijke axioma systemen werken met drie of vier axioma's die dus altijd waar zijn. We zullen hier laten zien, dat met behulp van één verbinding (van Sheffer) en één axioma de theorie ook opgebouwd kan worden.

Als fundamentele regel in vrijwel elk axiomasysteem hebben we de:

1) Substitutieregel. Een variabele in een axioma of stelling mag vervangen worden door een andere variabele of vorm, mits deze variabele overal waar hij in de gegeven vorm voorkomt door hetzelfde vervangen wordt.

Deze regel die eigenlijk in de gehele wiskunde als vanzelfsprekend gehanteerd wordt ligt wel aan de basis van al ons logisch denken.

Als tweede regel hebben wij nodig een afleidingsregel. Men noemt dit wel modus ponens. In dit stelsel zullen wij hiervoor nemen:

2) Afleidingsregel. Uit een formule A en een formule A|BC mag besloten worden tot C.

Met behulp van deze regel kunnen dus nieuwe formules gevonden worden. Heeft men reeds A en A|BC bewezen (of zijn het axioma's) dan is ook C waar.

Tenslotte hebben we een axioma nodig. In navolging van J. Nicod nemen we hiervoor

3) Axioma. p|qr||t|tt||sq||ps|ps

Het lijkt op het eerste gezicht een wonderlijke zaak, dat hieruit eenvoudiger stellingen te bewijzen zijn. Wij zullen hier schetsen hoe de meer gebruikelijke axioma's af te leiden zijn als stelling uit dit Axioma. We zullen beginnen met de stelling t|tt te bewijzen. In de andere operatoren omgeschreven luidt deze stelling $t \supset t$, of nog iets anders geschreven $\neg t \vee t$. Dit is het beginsel van het tertium non datur, het beginsel van het uitgesloten derde: t is of waar of onwaar.

De substitutieschema's zullen we aangeven met een horizontale lijn.

$\frac{A \qquad B \qquad C}{p|qr \quad t|tt \quad sq||ps|ps}$ ingezet in Axioma geeft A|BC (2)

Dit is alleen een afgekorte schrijfwijze en heeft nog niets gedaan.

$\frac{t \;\; t \;\; t}{p \;\; q \;\; r}$ ingezet in Ax geeft B|B||st||ts|ts (3)

Schrijven wij als afkorting voor st||ts|ts D dan krijgen wij B|BD (3a)

$\frac{B\quad B\quad D}{p\quad q\quad r}$ in Ax geeft met (3a) en regel 2 $sB||Bs|Bs$ (4)

$\frac{sB\quad Bs\quad Bs\quad u}{p\quad q\quad r\quad s}$ in Ax geeft met (2) en (4) $u|Bs|||sBu||sBu$ (5)

$\frac{A\quad C}{u\quad s}$ in (5) geeft met (2) en afl. regel CBA (6)

$\frac{B\quad D}{u\quad s}$ in (5) geeft $B|BD|||DBB||DBB$ (7)

$\frac{B|BD\quad DBB\quad DBB\quad EB}{p\quad q\quad r\quad s}$ in Ax geeft met (7)

$EB||DBB|||B|BD|EB||B|BD|EB$ (8)

waarin als afkorting geschreven is $E = st|||DBs||DBs$

$\frac{DB\quad t\quad tt}{p\quad q\quad r}$ in (6) geeft $EB||DBB$ (9)

(8) en (9) geven samen met de afl. regel $B|BD|EB$ (10)

(10) en (3) geven tenslotte $B = t|tt$ hetgeen te bewijzen was (11)

Door de afleidingsregel valt de middenterm E in (10) er geheel uit.

Men kan gemakkelijk vele andere bekende stelling afleiden. Bijv.

$\frac{t\quad t\quad t}{p\quad q\quad r}$ ingezet in Axioma geeft met (11) $st||ts|ts$ (12)

hetgeen in gewone notatie omgeschreven luidt: $s \vee t \supset t \vee s$

$\frac{tt\quad t}{t\quad s}$ in (12) ingezet geeft met (12) $tt|tt|tt$ (13)

hetgeen omgeschreven luidt $p \vee p \supset p$

Tenslotte leiden we nog af

$\frac{p|ss||p|ss\quad ss\quad p}{p\quad q\quad r}$ in Ax geeft met (12) $p|ss|p|sss$ geeft met nogmaals (12) toepassen $s|p|ss|p|ss$ hetgeen omgeschreven in de normale notatie de bekende stelling $s \supset p \vee s$ is

Literatuur

1. A.N. Whitehead, B. Russell. Principia Mathematica. 1913

2. J. Nicod. A reduction in the number of primitive propositions of logic, Proc Camb. Phil. Soc. <u>19</u>(1916)32

3. T.W. Scharle. Axiomatization of propositional calculus with Sheffer functors. Notre Dame J. of Formal Logic <u>6</u>(1965)209