

Aanleiding: Coll. Asympt. Ontw.

Een notitie over langzaam toenemende functies.

De volgende resultaten volgen uit een artikel van J. Karamata:
"Sur un mode de croissance régulière des fonctions",
Mathematica (Cluj) 4 (1930) 38 - 53.

De functie $L(x)$ zij voor $x \geq 0$ gedefinieerd, positief en voor het gemak bovendien continu ondersteld. Tenslotte zij

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(cx)}{L(x)} = 1$$

voor elke $c > 0$. Dan heet $L(x)$ "langzaam toenemend" "Langzaam veranderlijk" zou misschien een betere naam zijn.

Stelling 1. $L(x)$ is te schrijven in de gedaante

waarin
$$L(x) = L_0(x) e^{\int_1^x \frac{\delta(t)}{t} dt}$$

 $L_0(x) \rightarrow L_0 > 0 \ (x \rightarrow \infty)$ en $\delta(x) \rightarrow 0 \ (x \rightarrow \infty)$.

Stelling 2. a) $x^\varepsilon L(x) \rightarrow \infty$ en $x^{-\varepsilon} L(x) \rightarrow 0$ als $x \rightarrow \infty$ voor elke $\varepsilon > 0$.
b) $L(cx)/L(x) \rightarrow 1$ uniform op elk gesloten C -interval, dat alleen positieve c bevat.

Het bewijs van stelling 1 wordt uit enkele stappen opgebouwd.

Lemma 1. De hulpfunctie

is begrensd.
$$f(x) = \frac{x L(x)}{\int_0^x L(t) dt}$$

Lemma 2. $\int_0^\infty L(t) dt$ divergeert.

Lemma 3. $f(cx) - f(x) \rightarrow 0$ als $x \rightarrow \infty$ voor elke $c > 0$.

Lemma 4. $f(x) \rightarrow 1$ als $x \rightarrow \infty$.

Bewijs 1.1.

$$\frac{1}{f(x)} = \int_0^x \frac{L(t)}{L(x)} d\frac{t}{x} = \int_0^1 \frac{L(tx)}{L(x)} dt.$$

Voor $x \rightarrow \infty$ nadert $\varphi(t, x) = L(tx)/L(x)$ tot 1 ($0 < t < 1$). We weten niet, of de $\varphi(t, x)$ begrensd tot 1 nadert, als $x \rightarrow \infty$. Daarom definiëren we $\varphi^*(t, x) = \min(1, \varphi(t, x))$. Voor φ^* geldt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi^*(t, x) = 1, \quad 0 < \varphi^*(t, x) \leq 1.$$

H.v.
$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \int_0^1 \varphi(t, x) dt \geq \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^1 \varphi^*(t, x) dt = \int_0^1 dt = 1.$$

Bewijs 1.2. We bewijzen eerst Stelling 2a), 1e bewering. Laat A zo bepaald zijn

dat $\frac{L(2x)}{L(x)} > 1 - \delta(\varepsilon)$ voor $x > A(\varepsilon)$. Laat verder

$$\min_{A \leq x \leq 2A} L(x) = m (> 0).$$
 Dan is voor

$$2^n A \leq x \leq 2^{n+1} A \quad L(x) \geq m(1-\delta)^n$$

dus $x^\varepsilon L(x) > (2^n A)^\varepsilon m(1-\delta)^n = m A^\varepsilon \{2^\varepsilon (1-\delta)\}^n$. We hebben er voor

gezorgd, dat we $\delta(\varepsilon)$ zo kozen, dat $2^\varepsilon(1-\delta) > 1$. Dan zal dus $\{2^\varepsilon(1-\delta)\}^n \rightarrow 0$,
 dus a fortiori geldt: $x^\varepsilon L(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty)$.

Hieruit volgt 1.2.

Bewijs 1.3. Het is voldoende te bewijzen, dat $\frac{f(cx)}{f(x)} \rightarrow 1$ als $x \rightarrow \infty$;
 wegens 1.1. is nl. $f(x)$ begrens. Nu is

$$\frac{f(cx)}{f(x)} = c \cdot \frac{L(cx)}{L(x)} \cdot \frac{\int_0^x L(t) dt}{\int_0^{cx} L(t) dt}.$$

Uit de regel van de l'Hôpital volgt, dat de laatste factor tot $\frac{1}{c}$ nadert.

Inderdaad nadert dus $\frac{f(cx)}{f(x)}$ tot 1 als $x \rightarrow \infty$ ($c > 0$).

Bewijs 1.4. Noem $\int_0^x L(t) dt = M(x)$. Dan volgt uit de definitie van $f(x)$, dat

$$f(x) = \frac{x M'(x)}{M(x)}$$

of

$$M(x) = M(1) e^{\int_1^x \frac{f(t)}{t} dt}$$

dus

$$(1) \quad L(x) = M'(x) = \frac{M(x)f(x)}{x} = M(1) \frac{f(x)}{x} e^{\int_1^x \frac{f(t)}{t} dt}$$

Hieruit volgt

$$\frac{L(x)}{L(1)} = \frac{f(x)}{f(1)} \cdot \frac{1}{c} \cdot e^{\int_1^{cx} \frac{f(t)}{t} dt}$$

dus in verband met 1.3,

$$e^{\int_1^{cx} \frac{f(t)}{t} dt} \rightarrow c \quad (x \rightarrow \infty);$$

$$\int_1^{cx} \frac{f(t)}{t} dt \rightarrow \log c \quad (x \rightarrow \infty).$$

Noem $c = x e^\varepsilon$, $\log c = d$. Dan geldt:

$$\int_0^d f(xe^\varepsilon) dx \rightarrow d \quad (x \rightarrow \infty).$$

Hieruit volgt:

$$\int_0^d \{f(xe^\varepsilon) - f(x)\} dx = d \{1 - f(x)\} + o(1),$$

$$|f(x) - 1| \leq \frac{1}{d} \int_0^d |f(xe^\varepsilon) - f(x)| dx + o(1).$$

Nu nadert $|f(xe^\varepsilon) - f(x)|$ begrens. tot 0 als $x \rightarrow \infty$ ($0 < \varepsilon < d$). (zie lemma's 1,3). De integraal nadert dus tot 0 als $x \rightarrow \infty$,

$$f(x) \rightarrow 1.$$

Bewijs van stelling 1. We stellen $f(x) = 1 + \delta(x)$, $\delta(x) \rightarrow 0$. Dit substitueren we in formule (1):

$$L(x) = M(1) \{1 + \delta(x)\} e^{\int_1^x \frac{\delta(t)}{t} dt} = M(1) \{1 + \delta(x)\} e^{\int_1^x \frac{\delta(t)}{t} dt}$$

Bewijs van stelling 2.

a) Direct duidelijk.

b)

$$\frac{L(x)}{L_0} = \frac{L_0(x)}{L_0} e^{\int_a^x \frac{1}{L_0} L_0'(t) dt}$$

We mogen zonder beperking onderstellen, dat ons interval is het interval

$[1, \infty)$. Laat $\varepsilon > 0$ gegeven zijn, $\varepsilon < \frac{1}{2} L_0$. Voor $x > A(\varepsilon)$ zal

$|L_0(x) - L_0| < \varepsilon$, $|L(x)| < \varepsilon$. Hieruit volgt, dat voor $x > A(\varepsilon)$, $1 \leq x \leq \infty$,

$$\frac{L_0 - \varepsilon}{L_0 + \varepsilon} e^{-\varepsilon \log a} < \frac{L(x)}{L_0} < \frac{L_0 + \varepsilon}{L_0 - \varepsilon} e^{\varepsilon \log a}.$$

20 Januari 1948.

J. Kroeveaar en F. v.d. Elst.