STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1961 - 002

Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

Prof.dr. G.W. Veltkamp

22 februari 1961

# Eigenwaarden

1961

Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

door

Prof.dr.G.W.Veltkamp

22 februari 1961

## Eigenwaarden

1. In de theorie van matrices treedt het begrip eigenwaarde op : een getal $\lambda$ heet eigenwaarde van de matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

indien het homogene stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= \lambda x \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n &= \lambda x_n \end{aligned} \qquad (1)$$

een niet-triviale oplossing heeft. Dergelijke oplossingen heten eigenvectoren.

Is $\lambda$ geen eigenwaarde van A dan heeft het inhomogene stelsel

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n - \lambda x_1 &= y_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n - \lambda x_n &= y_n \end{aligned}$$

voor iedere keuze van $y_1, \dots, y_n$ een (eenduidige) oplossing, is $\lambda$ wel eigenwaarde dan heeft dit stelsel steeds dan een (niet eenduidige) oplossing indien $y_1, \dots, y_n$ aan zekere homogene lineaire vergelijkingen voldoen.

We kunnen (1) wat compacter schrijven als

$$Ax = \lambda x,$$

waarin met x de vector met componenten $x_1, \dots, x_n$ uit de n dimensionale ruimte $R_n$ is.

De eigenwaarden van A volgen uit de $n^{de}$-graadsvergelijking

$$\det\{A_{ij} - \lambda\delta_{ij}\} = 0. \qquad (2)$$

Heeft deze vergelijking n verschillende wortels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dan zijn er ook n eigenvectoren $x_1, \dots, x_n$ (niet te verwarren met componenten) die onafhankelijk zijn (d.w.z. $\Sigma \alpha_j x_j = o$ impliceert $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$) en $R_n$ opspannen, d.w.z. bij iedere y $R_n$ zijn er getallen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ zodat

$$y = \Sigma \alpha_j x_j .$$

Hieruit volgt direct

$$Ay = \sum \lambda_j \alpha_j x_j ,$$

zodat A een bijzonder eenvoudige gedaante heeft indien we $x_1, \dots, x_n$ als basis voor $R_n$ kiezen.

Heeft A samenvallende wortels dan kan de zaak gecompliceerder worden, er zijn dan soms minder dan n onafhankelijke eigenvectoren. Dit laatste doet zich echter niet voor indien A symmetrisch ($A_{ij} = \bar{A}_{ji}$) is. Bovendien zijn dan alle eigenwaarden reeel en kunnen de eigenvectoren onderling orthogonaal gekozen worden.

2. We generaliseren het geval van symmetrische matrices voor oneindig dimensionale ruimten.

Zij R een (complexe) lineaire ruimte met inproduct.

Dat is een verzameling van elementen x,y,... zodanig dat

A. Aan ieder tweetal elementen is een derde, z = x + y, toegevoegd. Aan ieder element x en ieder complex getal $\lambda$ is een element $\lambda x$ toegevoegd. De optelling is commutatief en associatief $(x + y = y + x,\ x + (y + z) = (x + y) + z)$, de vermenigvuldiging is associatief ( $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ ) en distributief ( $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$). Bovendien volgt uit $x + z = y + z$ dat $x = y$.

Uit dit laatste volgt dat er één element o in R is waarvoor geldt dat $x + (-1).x = o$, $0.x = o$. Voorts dat de aftrekking mogelijk is, etc.

B. Aan ieder tweetal elementen x en y is een complex getal (het inproduct) (x,y) toegevoegd zodanig dat

$$(x + y, z) = (x,z) + (y,z)$$
$$(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$$
$$(y,x) = \overline{(x,y)}$$
$$(x,x) > 0 \text{ als } x \neq o.$$

We definiëren de norm $|x|$ van $x$ door

$$|x| = \sqrt{(x,x)}\,.$$

Er geldt : $|(x,y)| \leq |x|.|y|$ (Schwarz)

$|x + y| \leq |x| + |y|$ (Minkowski).

We zeggen : $\lim x_n = x$ indien $\lim |x_n - x| = 0$. Hieruit volgt dat $\{x_n\}$ een fundamentaalrij is : $|x_n - x_m| < \varepsilon$ voor $n$ en $m > N(\varepsilon)$. R heet volledig (Hilbertruimte) indien omgekeerd iedere fundamentaalrij een limiet heeft. Dit veronderstellen we niet.

Voorbeelden

1. n-dimensionale complexe cartesische ruimte $R_n$.
   Elementen $x = \{x_1,\ldots,x_n\}$. Optelling en vermenigvuldiging coördinaatsgewijs. Inproduct : $(x,y) = \sum_1^n x_j\bar{y}_j$.
2. Ruimte $\ell^2$. Elementen $x = \{x_1,x_2,\ldots\}$, zo dat $\sum_1^\infty |x_j|^2 < \infty$. Optelling vermenigvuldiging coördinaatsgewijs. Inproduct : $(x,y) = \sum_1^\infty x_j\bar{y}_j$.
3. Ruimte C van continue functies op eindig interval. Elementen x = continue functie van t voor $a \leq t \leq b$. Optellen en vermenigvuldigen gewoon. Inproduct $(x,y) = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt$.

Een lineaire afbeelding A van R in R voegt aan ieder element x van R eenduidig een element Ax toe zodanig dat $A(x + y) = Ax + Ay$, $A(\alpha x) = \alpha Ax$.

A heet symmetrisch indien voor alle x en $y \in R$

$$(Ax,y) = (x,Ay).$$

A heet compact indien bij iedere begrensde rij $\{x_n\}$ (dus $|x_n| < M$, alle n) de rij $Ax_n$ een convergente deelrij heeft (dus er is een $y \in R$ en een rij indices $n_1,n_2,\ldots$, zodanig dat $\lim_{j\to\infty} Ax_{n_j} = y$).

Voorbeelden van compacte symmetrische afbeeldingen

1. In $R_n$ : afbeeldingen voortgebracht door symmetrische matrices
2. In $l_2$ : afbeeldingen voortgebracht door symmetrische oneindige matrices $\{A_{ij}\}$ zodanig dat $\sum_{i,j} |A_{ij}|^2 < \infty$
3. In C : afbeeldingen voortgebracht door een continue integraalterm : zij K continue functie van t en s voor $a \leq t,\ s \leq b$ en rij $K(t,s) = \overline{K(s,t)}$. Zij voor $x \in C$ Ax gedefinieerd door

$$(Ax)(t) = \int_a^b K(t,s)\, x(s) ds$$

3. Lemma. Is A compact dan is

$$|A| \stackrel{def}{=} \sup_{|x|=1} |Ax|$$

een eindig getal. Is A bovendien symmetrisch dan is

$$\sup_{|x|=1} |(Ax,x)| = |A|$$

en minstens of $|A|$ of $-|A|$ is eigenwaarde van A.

Stelling. Is A compact en symmetrisch en $|A| \neq 0$ dan zijn er eindig of aftelbaar oneindig veel van nul verschillende reële getallen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ en elementen $x_1, x_2, \ldots$ van R zodanig dat

a) $|A| = |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots$

b) als de rij $\{\lambda_j\}$ oneindig is dan is $\lim_j \lambda_j = 0$

c) $(x_i, x_j) = \delta_{ij}$

d) $Ax_j = \lambda_j x_j$

e) voor iedere x R geldt $\sum_1^\infty \lambda_j (x,x_j) x_j = Ax_j$ (1)

f) is $\lambda \neq \lambda_j$ $(j = 1,\ldots,n)$ dan heeft de vergelijking

$$Ax - \lambda x = y$$

voor iedere $y \in R$ een eenduidige oplossing, is $\lambda = \lambda_j$ dan heeft deze vergelijking dan en slechts dan een (niet eenduidige) oplossing indien $(y,z) = 0$ voor alle z die voldoen aan $Az = \lambda_j z$.

Opmerkingen

1. De eigenschap (1) is in zekere zin ook karakteristiek voor compacte symmetrische afbeeldingen. Zij $\{x_j\}$ een orthonormaalrij en $\{\lambda_j\}$ een rij reële getallen met $\lim \lambda_j = 0$. En zij voor alle $x \in R$ de reeks

$$Bx = \sum_{1}^{\infty} \lambda_j (x, x_j) x_j$$

convergent. Dan is B een compacte symmetrische afbeelding.

2. Is de ruimte R volledig dan convergeert voor iedere x R de reeks $\sum_{1}^{\infty} (x, x_j) x_j$ naar een $y$ R en er geldt $A(x - y) = o$.

3. In het geval van een afbeelding in C, voortgebracht door een continue symmetrische integraalkern, convergeert de reeks

$$\sum_{1}^{\infty} \lambda_j x_j(t) \int_a^b x(s) \overline{x_j(s)} dx$$

zelfs uniform (naar $\int_a^b K(t,s)x(s)ds$).