STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1962 - 002

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

Prof.dr. F. Loonstra

31 maart 1962

Toepassing van subdirecte produkten

1962

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1962-002

ZUIVERE WISKUNDE

Voordracht in de serie "Actualiteiten" door

Prof.dr. F. Loonstra

31 maart 1962

Toepassing van subdirekte produkten

§ 1. Inleiding

Subdirekte produkten van algebra's laten zich (evenals direkte produkten) beschrijven met behulp van congruenties op een algebra A. Elke congruentie θ op A bepaalt een homomorf beeld A_θ van A; omgekeerd wordt door elke homomorfie van A op B een congruentie op A bepaald. De congruenties op een algebra A vormen een netwerk $\mathcal{L}(A)$, dat een nulelement O en een één-element I heeft. Het produkt van twee congruenties op A wordt bepaald door $a \equiv b(\theta\theta')$, wanneer er een $c \in A$ is, zodat $a \equiv c(\theta)$, $c \equiv b(\theta')$. In een groep zijn congruenties verwisselbaar, d.w.z. $\theta\theta'=\theta'\theta$. De congruentierelaties op A met verwisselbare congruenties vormen een modulair netwerk, terwijl $\theta\theta'=\theta \cup \theta'$.

Veronderstel, dat θ_1, θ_2 twee verwisselbare congruenties op A zijn, terwijl $\theta_1 \cap \theta_2 = 0$, $\theta_1 \cup \theta_2 = I$; dan is A isomorf met het direkte produkt $A_1 \times A_2$, waarin A_i het homomorfe beeld van A modulo θ_i is $(i=1,2)$. Algemeen corresponderen de voorstellingen van een algebra A als direkt produkt $A_1 \times \ldots \times A_r$ een-eenduidig met de stelsels (verwisselbare) congruenties $\theta_1, \ldots, \theta_r$ op A, waarvoor

$$\theta_1 \cap \ldots \cap \theta_r = 0, \quad (\theta_1 \cap \ldots \cap \theta_{i-1}) \cup \theta_i = I \quad (i=1,\ldots,r).$$

§ 2.

Is S een subalgebra van het direkte produkt van algebra's A_i $(i=1,2,\ldots)$, dan is S tevens subalgebra van het direkte produkt van zijn komponenten $S_i (i=1,2,\ldots)$;

men zegt, dat S een subdirekt produkt van de algebra's S_i $(i=1,2,\dots)$ is, wanneer de "projecties" van de elementen $s \in S$ op de i-de komponent s_i epimorfismen van S op S_i zijn $(i=1,2,\dots)$. Men bewijst nu eenvoudig:
De voorstellingen van een algebra A als subdirekt produkt corresponderen een-eenduidig met de stelsels congruenties op A, die voldoen aan $\bigcap_i \theta_i=0$. We noemen A subdirekt irreducibel, als voor elke schrijfwijze van A als subdirekt produkt van algebra's A_i tenminste één van de epimorfismen van $a \in A$ op zijn komponenten A_i een isomorfie is. Dit is gelijkwaardig met: de doorsnede van alle congruenties $\theta > 0$ (met $\theta \neq 0$) op A is een congruentie $\theta' > 0$ $(\neq 0)$. Algemeen geldt: <u>Elke algebra A is voor te stellen als subdirekt produkt van subdirekt irreducibele algebra's</u>. Het tot dusverre behandelde vindt men bij G. Birkhoff, Lattice theory, Ch.VI.
Voor ringen vindt men desbetreffende resultaten bij McCoy (zie lit.): Zij (A_i) een stelsel idealen van een ring R met $\bigcap_i A_i=(0)$, dan is R isomorf met een subdirekte som van de ringen R/A_i.
Een ring R is subdirekt irreducibel, dan en slechts dan als de doorsnede van alle idealen $\neq(0)$ uit R een ideaal $\neq(0)$ is. Elke ring is isomorf met een subdirekte som van subdirekt irreducibele ringen. McCoy klassificeerde de subdirekt irreducibele comm. ringen.

§ 3. Subdirekte produkten van groepen

Zij G een subdirekt produkt van de groepen A en B, terwijl $A_0 = G \cap A$, $B_0 = G \cap B$; dan is $A/A_0 \cong B/B_0$. Zij verder F een groep, isomorf met beide factorgroepen; stellen we de nevenklasse aA_0 voor door $\bar{a} \in F$, de nevenklasse bB_0 door $\bar{b} \in F$, dan zal, als

$$\varphi : a \rightarrow \bar{a}\ ,\quad \psi : b \rightarrow \bar{b}\ ,$$

de groep G juist bestaan uit die paren $(a,b) \in A \times B$ met $a\varphi = b\psi$ (stelling van Klein-Fricke).

Bezit G normaaldelers D_i $(i \in I)$, waarvan de doorsnede (e) is, dan is G subdirekt produkt van de groepen G/D_i $(i \in I)$.
Bezit een groep G normaaldelers C_i, waarvan het produkt een direkt produkt is, dan is G een subdirekt produkt met gemeenschappelijke komponentenfaktorgroep.
Zij nu A_i $(i \in I)$ een stelsel groepen, α_i een epimorfie van A_i op een vast gekozen groep F; de elementen g van het (volledige) direkte produkt $\mathfrak{A} = \times_i A_i$, $g=(\ldots,a_i,\ldots,a_j,\ldots)$ waarvoor

$$a_i \alpha_i = a_j \alpha_j \quad (i \neq j)$$

vormen een subdirekt produkt G der A_i met gemeenschappelijke komponentenfaktorgroep F. Als $G \cap A_i = C_i$, dan is $A_i/C_i \cong F$ $(i \in I)$.
We bewijzen nu omgekeerd:
Zij $\mathfrak{A} = \times_i A_i$ het volledige direkte produkt van een stelsel groepen A_i $(i \in I)$ en G een subdirekt produkt der A_i met de volgende eigenschap: als $G \cap A_i = C_i$, $G \cap (\times_{j \neq i} A_j) = D_i$, dan is

$$D_i \subseteq \times_i C_i \ .$$

In dat geval bestaat een groep F en een stelsel epimorfismen $\alpha_i : A_i \to F$, zodat G juist de groep van alle $g \in \mathfrak{A}$ is, waarvan de komponenten op F hetzelfde beeld hebben.
Als toepassingen bewijzen we de volgende stellingen:

I. Is G een ondergroep van het direkte produkt $P=A \times B$, zodat $G \cap A$ normaaldeler van A, $G \cap B$ normaaldeler van B is, dan bestaat een groep F en twee homomorfismen α, β van A in F, resp. van B in F, zodat G precies de groep van alle elementen (a,b) uit P is met $a\alpha=b\beta$.

II. Zij G ondergroep van het volledige direkte produkt $P = \times A_i$, zodat
   1° $C_i = G \cap A_i$ normaaldeler is van A_i $(i \in I)$;
   2° als $G \cap (\times_{j \neq i} A_j) = D_i$, dan is $D_i \subseteq \times_i C_i$;

Noemen we de komponent van G in A_i kortweg B_i, dan bestaat op grond van 2^o een groep F en epimorfismen $\alpha_i : B_i \rightarrow F$, zodat G juist de groep is van alle elementen $g = (\ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots)$ uit $\underset{i}{\times} B_i$ waarvoor $a_i\alpha_i = a_j\alpha_j$ $(i \neq j)$. We breiden nu de epimorfismen α_i uit tot homomorfe afbeeldingen $\bar{\alpha}_i$ van A_i op een groep F_i, waarin F_i op dezelfde wijze uit F is afgeleid als in (I).

Noemen we nu Φ het vrije produkt van alle F_i met gemeenschappelijke ondergroep F, dan is G precies de verzameling van alle

$$g = (\ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots) \text{ met } a_i\bar{\alpha}_i = \ldots = a_j\bar{\alpha}_j = \ldots .$$
