STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1963 - 002

Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

Prof.dr. A. van der Sluis

19 februari 1963

# Het benaderd bepalen van nulpunten van functies en het principe van successieve approximatie

1963

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.),by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

ZW 1963-002.


**STICHTING**

**MATHEMATISCH CENTRUM**

**2e BOERHAAVESTRAAT 49**

**AMSTERDAM**


**AFDELING ZUIVERE WISKUNDE**

Voordracht in de

serie "Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

door

Prof.dr. A. van der Sluis

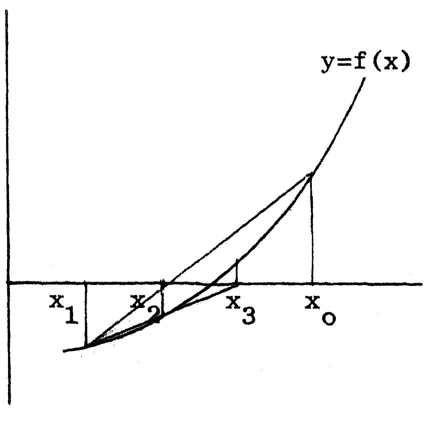
19 februari 1963

# Het benaderd bepalen van nulpunten van functies en het principe van successieve approximatie.

## Het elementaire onderwerp

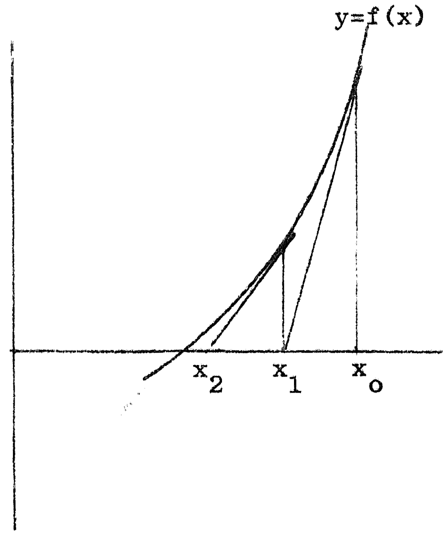
De eenvoudigste en meest gebruikte methoden om nulpunten van functies ofwel wortels van vergelijkingen benaderd te bepalen zijn wel de methode van successieve substitutie, de regula falsi en de methode van Newton.

Successieve substitutie: Op te lossen $\varphi(x) = x$. Uitgaande van een benaderde waarde $x_0$ bepaalt men $x_1 = \varphi(x_0)$, $x_2 = \varphi(x_1)$, etc. Als de rij $x_n$ convergeert naar $\xi$ en $\varphi$ is continu in $\xi$ dan geldt vanzelfsprekend $\xi = \varphi(\xi)$. Een bekende toepassing is $\varphi(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$, waarbij $\xi = \sqrt{a}$.




Regula Falsi: Op te lossen $f(x) = 0$. Uitgaande van benaderde waarden $x_0$ en $x_1$ bepaalt men $x_2$ als snijpunt van de door $x_0$ en $x_1$ bepaalde koorde met de x-as. Met $x_1$ en $x_2$ bepaalt men evenzo $x_3$ etc. In formule:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$$



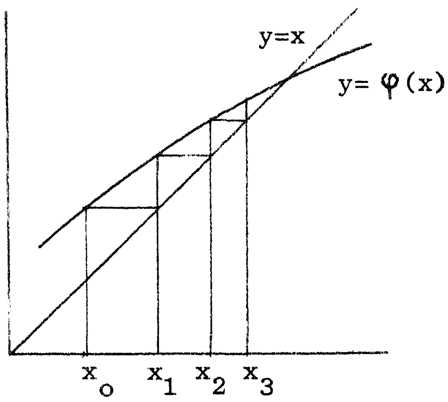

Methode van Newton: Op te lossen $f(x) = 0$. Uitgaande van een benaderde waarde $x_o$ bepaalt men $x_1$ als snijpunt van de door $x_o$ bepaalde raaklijn met de x-as. Uit $x_1$ bepaalt men evenzo $x_2$ etc. In formule:

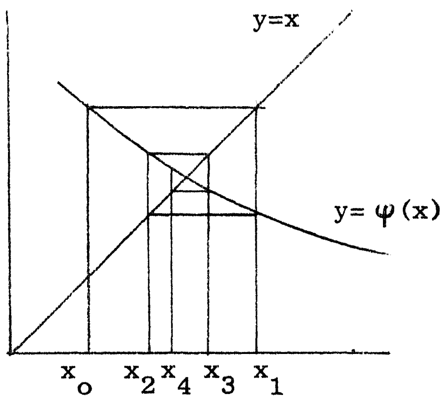
$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{f'(x_n)} f(x_n).$$

Opmerking: met $f(x) = x^2 - a$ genereert Newton dezelfde rij $x_n$ als bovenvermelde toepassing van successieve substitutie uitgaande van dezelfde $x_o$.

De methode van Newton transformeert in feite een gegeven vergelijking in een van de vorm $\varphi(x) = x$ , en lost die vergelijking middels succ.subst. op, terwijl regula falsi een generalisatie aanduidt: men kan een hele familie oplosmethoden beschouwen van de vorm $x_{n+1} = \varphi(x_n, x_{n-1}, \ldots)$, waarbij $\varphi$ een functie is die op geschikte wijze van f(x) afhangt, zodanig dat een wortel $\xi$ van $f(x) = 0$ ook voldoet aan $\xi = \varphi(\xi, \xi, \ldots)$.

De methode van succ.subst. is dus blijkbaar de omvattende oplosmethode, die we daarom wat nader bestuderen. Met wat



proberen aan grafische voorstellingen ziet men gemakkelijk in dat de methode convergeert voor $|\varphi'| < 1$ en divergeert voor $|\varphi'| < 1$ in het gebied van interesse. Analytisch bewijs: Zij $\varphi$ voldoend vaak differentiëerbaar en zij $h_n = x_n - \xi$, $\varphi(\xi) = \xi$. Dan geldt

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) = \varphi(\xi) + h_n\varphi'(\xi) + \tfrac{1}{2}h_n^2\varphi''(\xi) + \ldots, \text{ zodat}$$

$$h_{n+1} = h_n\varphi'(\xi) + \tfrac{1}{2}h_n^2\varphi''(\xi) + \ldots$$

Als $\varphi'(\xi) \neq 0$ dan geldt dus $h_{n+1} = h_n\varphi'(\xi)\,[1 + o(1)]$. Als dus $|\varphi'(\xi)| < 1$ zal het proces convergeren mits $h_o$ klein genoeg is, terwijl als $|\varphi'(\xi)| > 1$ kleine afwijkingen h vergroot worden.

We zien uit dit bewijs tevens dat als $|\varphi'(\xi)| < 1$ maar $\neq 0$, de verhouding tussen $h_{n+1}$ en $h_n$ op den duur min of meer constant is; wat huiselijker: van de fout gaat bij elke stap ongeveer dezelfde fractie af. Men spreekt dan van eerste orde of lineaire convergentie en noemt de verhouding van $h_{n+1}$ en $h_n$ de convergentiefactor. Die is dus ongeveer $\varphi'(\xi)$. Bijv. met een convergentiefactor $\frac{1}{2}$ heeft men 10 iteratiestappen nodig om de beginfout tot 1‰ te reduceren. Het zal dus zaak zijn bij gegeven f $\varphi$ zodanig te kiezen dat de convergentiefactor heel klein wordt.

Een voor de hand liggende manier om $f(x) = 0$ te schrijven als $\varphi(x) = x$ is $\varphi(x) = x + f(x)$. Dan is echter $\varphi'(\xi) = 1 + f'(\xi)$, zodat de methode slechts werkt voor $-2 < f'(\xi) < 0$.

Slimmer is $\varphi(x) = x + g(x)f(x)$, $g(x)$ een geschikte , van f afhangende functie. Dan is $\varphi'(\xi) = 1 + g(\xi)f'(\xi)$. Heel prettig zou nu zijn $g(\xi) = -\frac{1}{f'(\xi)}$ (geeft $\varphi'(\xi) = 0$ ).

Probeer $g(x) = -\frac{1}{f'(x)}$ (Newton): wegens

$$0 = f(\xi) = f(x) + (\xi - x)f'(x) + \tfrac{1}{2}(\xi - x)^2 f''(\eta) \quad \text{geldt dan}$$

$$\varphi(x) = \xi + \frac{1}{2}\frac{f''(\eta)}{f'(x)}(\xi - x)^2.$$

Als f" begrensd is in de buurt van $\xi$ en f' is begrensd van 0 weg geldt dus $h_{n+1} = O(h_n^2)$. Als bijv. $f''/f' \approx 2$ en $h_0 = 10^{-2}$ dan is $h_1 = 10^{-4}$, $h_2 = 10^{-8}$, $h_3 = 10^{-16}$ etc. Newton's methode heeft dus kwadratische convergentie (men noemt een methode van de k-de orde als $\varphi'(\xi), \ldots \varphi^{(k-1)}(\xi) = 0$, $\varphi^{(k)}(\xi) \neq 0$ ).

De ontwikkeling van f nog iets verder voortzettend, ziet men dat

$$\varphi(x) = \xi + \frac{1}{2}\frac{f''(x)}{f'(x)}(\xi - x)^2 + \ldots$$

Wegens $f^2(x) = (\xi - x)^2[f'(x)]^2 + \ldots$ kan de term met $(\xi - x)^2$ in de ontwikkeling van $\varphi$ weggewerkt worden door $\frac{1}{2}f^2f''/[f']^3$ af te trekken, waardoor men derde orde convergentie krijgt. Men heeft dan

$$\varphi(x) = x - \frac{f}{f'} - \frac{f^2f''}{2[f']^3}$$

Zo kan men doorgaan.

<u>Existentiestelling.</u> <u>Voorwaarden:</u>

1) Zij D het definitiegebied van $\varphi$ en zij $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \alpha|x-y|$ voor alle $x,y \in D$ en zij $0 < \alpha < 1$.

2) Zij $x_0$ zodanig dat de verzameling S: $|x - x_0| \leq r$ met $r = \frac{1}{1-\alpha}|\varphi(x_0) - x_0|$ geheel tot D behoort.

<u>Bewering:</u> $\varphi(x) = x$ heeft op D precies één wortel $\xi$ en de rij $\{x_n\}$ gedefinieerd door $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ convergeert naar $\xi$.

<u>Bewijs:</u> a) $\varphi$ is continu op D; triviaal.

b) $x_n \in S$ voor alle n:

$|x_1 - x_0| = |\varphi(x_0) - x_0| = (1-\alpha)r < r$, dus $x_1 \in S$

$|x_2 - x_1| = |\varphi(x_1) - \varphi(x_0)| \leq \alpha\,|x_1 - x_0| < \alpha(1-\alpha)r$, dus

$|x_2 - x_0| \leq |x_2 - x_1| + |x_1 - x_0| < (\alpha + 1)(1-\alpha)r < r$, dus $x_2 \in S$

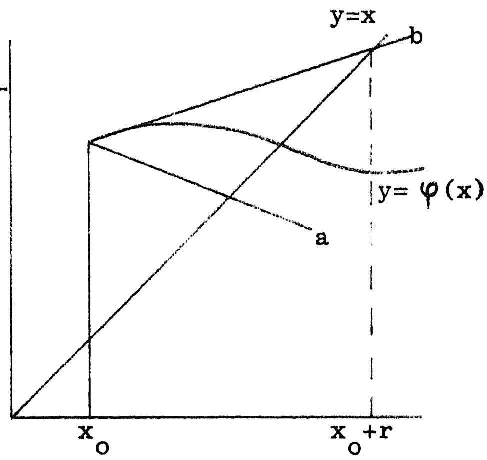
......

$|x_{n+1} - x_n| < \alpha^n(1-\alpha)r$, dus $|x_{n+1} - x_0| < (\alpha^n + \alpha^{n-1} + \ldots + \alpha + 1)(1-\alpha)r < r$.

c) $\{x_n\}$ is een Cauchy-rij, dus convergent: $|x_{n+p}-x_n| <$
$(\alpha^{n+p-1}+\ldots+\alpha^n)(1-\alpha)r = \alpha^n(1-\alpha^p)r < \alpha^n r$, en dit is willekeurig klein als n voldoende groot is.

d) Zij $\xi = \lim x_n$. Dan geldt $\xi = \lim \varphi(x_{n-1}) = \varphi(\xi)$ wegens de continuiteit van $\varphi$.

e) Zij $\eta \neq \xi$, $\eta \in D$, een andere wortel van $\varphi(x) = x$. Dan geldt $|\xi-\eta| = |\varphi(\xi) - \varphi(\eta)| \leq \alpha\,|\xi-\eta| < |\xi-\eta|$, een tegenspraak.




Eenvoudige meetkundige toelichtingen:

Als a en b richtingscoëfficiënten $\alpha$ resp $-\alpha$ hebben is r als in de figuur aangegeven. De grafiek van $\varphi(x)$ verloopt tussen a en b, en krachtens de doorlopendheidsstelling voor continue functies moet er dus een wortel zijn. Dat $x_n \in S$ voor alle n is ook meetkundig duidelijk. We zien tevens dat aanname 2 het gebied S veel groter neemt dan nodig is.

Een wat hoger standpunt.

We beschouwden tot dusverre een reële functie $\varphi$ van een reële variabele. Maar men kan natuurlijk algemener $\varphi$ als afbeelding van de een of andere verzameling R in zichzelf beschouwen en dan vragen naar oplossingen van $\varphi(x) = x$. Bijvoorbeeld: R is een n-dim. vectorruimte, en men lost dan dus in feite n vergelijkingen met n onbekenden op.

In de existentiestelling dient het van elkaar aftrekken van elementen van R en het modulus nemen slechts als afstandsbepaling van twee elementen van R. De existentiestelling laat zich dan ook zonder moeite uitbreiden tot het geval van een volledige metrische ruimte (= verzameling) R. We zeggen dat R metrisch is als er in R een reële functie $d(x,y)$ gedefinieerd is voor elk paar $x,y \in R$ (deftiger: d is een afbeelding van $R \times R$ in de reële getallen) zodat

a) $d(x,y) = o$ als en slechts als $x = y$

b) $d(x,y) \leq d(z,x) + d(z,y)$ voor alle $x,y,z \in R$.

(dan is vanzelf $d(x,y) = d(y,x)$ en $d(x,y) \geq 0$ voor alle $x,y \in R$).

d noemt men wel de afstandsfunctie of de metriek.

R heet volledig als elke rij $x_n$ die in de zin van de metriek een Cauchy rij is (d.w.z. $\varepsilon > 0 \rightarrow N$ zodat $d(x_n,x_m) < \varepsilon$ voor alle $m,n > N$), een limiet heeft in R.

Toepassing op $R = R_n$, de n-dimensionale Cartesische ruimte. Omdat deze ruimte lineair is kan men de metriek plezierig invoeren, m.b.v. de vector norm $\|x\|$. Veelgebruikte normen zijn $\|x\|_1 = \sum_1^n |\xi_k|$ (als $x = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$), $\|x\|_2 = \sqrt{\Sigma |\xi_k|^2}$, $\|x\|_\infty = \max |\xi_k|$.

Als metriek kan men dan nemen $d(x,y) = \|x-y\|$.

Zij nu op te lossen $Ax = b$, A een $n \times n$ matrix. Schrijf A als $B+D$, D een diagonaal matrix met dezelfde diagonaalelementen als A. Dan kan men schrijven $(B+D)x = b$ of $x = D^{-1}(b-Bx)$. Dus $\varphi(x) = D^{-1}(b-Bx)$. De zo ontstane oplosmethode heet Gauss-Jacobi iteratie. Eis 1 van de existentiestelling luidt dan $\|D^{-1}B(x-y)\| \leq \alpha\|x-y\|$ voor alle x en y ofwel $\|D^{-1}Bx\| \leq \alpha\|x\|$ voor alle x. Als $D^{-1}B$ de elementen $p_{ij}$ heeft, ziet men zonder veel moeite in dat

$\|D^{-1}Bx\|_1 \leq \max_j \sum_i |p_{ij}| \, \|x\|_1$ (zodat er dan zeker convergentie is als elk diagonaalelement > som van de moduli der overige elementen in dezelfde rij)

$\|D^{-1}Bx\|_\infty \leq \max_i \sum_j |p_{ij}| \, \|x\|_\infty$

$\|D^{-1}Bx\|_2 \leq \sqrt{\Sigma |p_{ij}|} \, \|x\|_2$

De tweede eis van de existentiestelling biedt geen probleem.

Een verdere toepassing vindt men in de theorie der integraalvergelijkingen, in feite het continue analogon van het vorige voorbeeld. Bekendste voorbeeld: existentie theorema van Picard voor differentiaalvergelijkingen. Zij R de verzameling van continue functies op een segment [a,b]. Deze vormen weer een lineaire ruimte zodat de metriek weer van een norm afgeleid kan worden. Neem als norm van een functie f(x) $\max |f(x)|$. Onder deze norm is de ruimte volledig (uniform conv. rij van cont. functies). Op te lossen $y' = f(x,y)$ ofwel $y(x) = \int_a^x f(t,y(t))dt$.
Dus $\varphi(y) = \int_a^x f(t,y(t))dt$.

Eis 1 bevat de grootheid

$$\|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)\| = \max_x \left| \int_a^x \{f(t,y_1(t)) - f(t,y_2(t))\}\, dt \right| .$$

Als nu $|f(t,y) - f(t,z)| \leq C|y-z|$ (Lipschitz voorwaarde) voor alle getallen t,y en z is $\|\varphi(y_1)-\varphi(y_2)\| \leq C(b-a)\|y_1-y_2\|$.
Er is dus convergentie als $C(b-a) < 1$. Het is niet moeilijk de argumentatie zodanig te verfijnen (in feite door b-a te verkleinen) dat men inziet dat er convergentie optreedt ongeacht de waarde van C.
Eis 2 is weer geen probleem.

Methode van Newton. Natuurlijk doet zich weer de vraag voor een gegeven vergelijking $f(x) = 0$ zo voordelig mogelijk over te voeren in een van de vorm $\varphi(x) = x$, en met name kan men Newton's methode goed generaliseren. In die generalisatie komt echter de inverse van de afgeleide van f voor (zie ook de "gewone" Newton); bijv. bij het oplossen van n vergelijkingen met n onbekenden de inverse van de Jacobiaan, een $n \times n$ matrix. Dit maakt het gebruik nogal beperkt.

Een nog wat hoger standpunt.

We kunnen een nog wat verdergaande generalisatie bereiken door als metriek niet slechts een afbeelding van $R \times R$ in de reële getallen toe te laten, maar een afbeelding in een partiëel geordende lineaire ruimte N, d.w.z. een lineaire ruimte waarvan de elementen van een zekere deelverzameling $\geq 0$ genoemd worden, zodanig dat $a \geq 0$ en $-a \geq 0$ slechts voor $a = 0$ vervuld is, dat uit $a \geq 0$ en $b \geq 0$ volgt $a+b \geq 0$ en uit $\alpha$ (reeel getal) $\geq 0$ en $a \geq 0$ volgt $\alpha a \geq 0$. Voorbeeld: $N = R_n$ en $\geq 0$ noemen we alle vectoren met uitsluitend niet-negatieve coordinaten.
N.B. Men ziet hieruit dat niet voor alle elementen van N hoeft

te gelden dat zij of hun tegengestelde $\geq 0$ zijn; vandaar: partieel geordend. Met behulp van deze N kan men nu weer een $R_n$ gaan metriseren: $d(x,y)$ is de vector $(|\xi_1 - \eta_1|, \ldots, |\xi_n - \eta_n|)$, en eis 1 kan nu wat subtieler geformuleerd worden dan in het eerste voorbeeld: men kan nu eisen dat $d(\varphi(x),\varphi(y)) \leq Pd(x,y)$, waarin P een nxn-matrix is met positieve elementen, die natuurlijk nog aan een eis moet voldoen corresponderend met $\alpha < 1$.

## Litteratuur

F.B.Hildebrand, Introduction to Numerical Analysis (Hoofdstuk 10), Mc-Graw-Hill 1956.

J.Todd (ed), A Survey of Numerical Analysis (Hoofdstuk 14), Mc-Graw-Hill 1962

J.Schröder, Das Iterationsverfahren bei allgemeinem Abstandsbegriff, Math.Zeitschrift 66 (1956) 111-116

J.Schröder, Über das Newtonsche Verfahren, Arch.Rat.Mech.Anal. 1 (1957) 154-180