STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1951 - 003

Rapport betreffende een onderzoek van de afdeling Zuivere Wiskunde

1951

Rapport betreffende een onderzoek van de afdeling Zuivere Wiskunde.

1. Enige tijd geleden werd door Prof. Van Dantzig aan de afdeling Z.W. het volgende viertal vragen gesteld:
   a. Op welke wijze(n) kan de functie $e^{itx \log x}$ in de gedaante
   $$\int_C \varphi(z) e^{ix\psi(z)} dz$$
   worden voorgesteld.
   b. Kan in het bijzonder $\varphi(z) = \frac{t}{2\pi} \varrho(tz)$ genomen worden, waarin
   $$\varrho(\lambda) = \int_0^1 e^{i\lambda x \log x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i\lambda)^{n-1}}{n^n}$$
   is, terwijl $\psi(z) = t \log z$ is. (Men kan zonder beperking $t = 1$ nemen, maar het is gewenst, de juiste uitdrukkingen voor willekeurige t te bezitten).
   c. Onder welke voorwaarden kan de complexe integratiekromme tot de (halve) reële as worden herleid.
   d. Kunnen verdere eigenschappen worden aangegeven, die een analogie vertonen met de Fourier-transformaties van
   $$e^{\frac{1}{2}ax^2} \quad \text{en} \quad e^{\frac{1}{2}b(\log x)^2}.$$

2. N.a.v. vraag a. werd toen de volgende formule afgeleid (zie rapport Z.W. 1950 - 021 van Dr W. Peremans):
   $$(1) \qquad e^{itx \log x} = \frac{t}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{itx \log u} \int_0^{\infty} e^{itus \log s} ds\, du.$$
   Dit resultaat volgt weliswaar niet de vier bovengenoemde vragen op de voet, maar geeft naar het oordeel van de afdeling Z.W. precies een integraalvoorstelling van de functie $e^{itx \log x}$ (x en t reëel en positief), welke uiteindelijk met de vragen bedoeld is.

3. De gedachtengang, voorgesteld in de vier vragen, berust op een andere aanpakmethode, die naar het oordeel van de medewerkers der afdeling echter op grote moeilijkheden stuit als men haar in volle strengheid tracht toe te passen op de functie $e^{itx \log x}$ (x en t reëel).

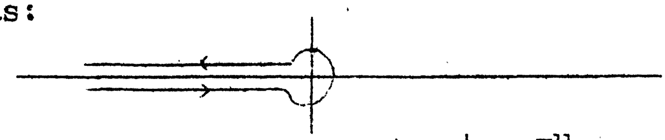
4. Desgevraagd verduidelijkte Prof. Van Dantzig zijn methode door het geven van de volgende formele herleiding:
   $$\int_0^{\infty} e^{-au} \frac{u^{b-1}}{\Gamma(b)} du = a^{-b} \quad (\mathrm{Re}\, a > 0, \ \mathrm{Re}\, b > 0).$$

Voor $x>0$, Re $t > 0$ geldt dan ook:

$$e^{-tx\log x} = \int_0^\infty e^{-ux}\, u^{xt-1}\, du \cdot \frac{1}{\Gamma(xt)} =$$

$$= \int_0^\infty e^{-ux}\, u^{xt-1}\, du \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_C \zeta^{-xt} e^{\zeta}\, d\zeta .$$

Hierbij is de integratieweg C voor ζ een lus om de negatief-reële as:



Door de substitutie $u \to ut, \zeta \to \zeta\, u e^{-u} t$ ontstaat:

$$e^{-tx\log x} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty u^{-1}\, du \cdot \int_{C_t} tu\, d\zeta \cdot e^{-u-xut+xt\log u+xt\log t} \cdot$$

$$\cdot\, e^{-xt\log\zeta - xt\log u + xtu - xt\log t + \zeta t u e^{-u}}$$

$$= \frac{t}{2\pi i}\int_0^\infty du \int_{C_t} d\zeta\, e^{-u-xt\log\zeta+\zeta t u e^{-u}}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_t} d\zeta \int_0^\infty \zeta^{-xt}\, e^{-u+\zeta t u e^{-u}}\, du .$$

De substitutie $e^{-u} = v$ levert tenslotte

$$(2)\quad e^{-tx\log x} = \frac{t}{2\pi i}\int_{C_t} d\zeta\, e^{-xt\log\zeta}\int_0^1 dv \cdot e^{-\zeta t v\log v} .$$

Voorts stelde hij de vraag of men hierin t door $-it$ mag vervangen en Im $t = 0$ mag nemen.

Het is duidelijk dat hier de functie $e^{-tx\log x}$ gebruikt wordt i.p.v. de functie $e^{itx\log x}$, waardoor enerzijds de bezwaren, onder 3. genoemd, komen te vervallen, maar waarbij anderzijds de vraag oprijst - door Prof. Van Dantzig ook uitdrukkelijk geformuleerd - of het resultaat geldig blijft, als men t door $-it$ vervangt en dan Im t naar nul laat gaan. Deze vraag is echter in een ietwat andere vorm juist de kwestie waar de medewerkers der afdeling op waren gestuit bij directe toepassing van de gedachtengang, die achter de vragen a. - d. ligt, op de functie $e^{itx\log x}$. Deze kwestie werd nu als uitgangspunt genomen voor verder onderzoek (zie rapport Lekkerkerker, 1951 - 004).

5. Prof. Van Dantzig verduidelijkte zijn gedachtengang nog in een uitvoeriger concept, waarin twee verschillende beschouwingen worden gegeven. Beide hebben betrekking op de functie $e^{-tx\log x}$, leveren een bewijsgang voor de formule (2), maar

laten de vraag aangaande de overgang van t op it nog open. Daar de tweede bewijsmethode aanmerkelijk korter is dan de eerste en niet minder levert, wanneer men het principe van de analytische voortzetting toepast, beperken wij ons tot die tweede methode. Zij is in alle details vermeld in het rapport Lekkerkerker, waar begonnen wordt met een ander, minder gekunsteld bewijs van (2), n.l. een directe rechtvaardiging van de onder 4. gegeven formele herleiding. We verkeren nu t.a.v. de aan het eind van 4. geschetste moeilijkheid, in de volgende situatie:

6. Formule (1) heeft, als men uitgaat van de functie $e^{-tx \log x}$ (x reëel), betrekking op het enerzijds zeer speciale, anderzijds toch zeer netelige grensgeval van zuiver imaginaire t. De betrekking (2) voor deze functie is geldig voor Re $t > 0$. Men vraagt zich af, of formule (1), die met geheel andere methoden is afgeleid dan formule (2), toch niet als grensgeval uit (2) zou kunnen worden verkregen, doordat men t tot de imaginaire as laat naderen. In dit verband wordt in het rapport Lekkerkerker bewezen, dat de integraal in het rechterlid van (2) voor x reëel, t zuiver imaginair geen betekenis heeft. Hiermede is de in 6. geopperde mogelijkheid nog niet uitgesloten, maar in elk geval is de door Prof. Van Dantzig aan het eind van zijn herleiding gestelde vraag (zie 4.) ontkennend beantwoord.