STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW-004

Enige opmerkingen betreffende een manuscript over een deelbaarheidseigenschap bij binomiaalcoëfficiënten

Dr. J.J.A. Duparc en Dr. W. Peremans

[1955]

~~Enige opmerkingen betreffende een manuscript over een deelbaarheids-eigenschap bij binomiaalcoëfficiënten.~~ (Dr H.J.A. Duparc & Dr W. Peremans)

De Heer Mr C.C.J. de Ridder beschouwde de formule van Fjeldstad en Ljunggren

$$2^{3n} \,\Big|\, \binom{2^{n+1}}{2^n} - \binom{2^n}{2^{n-1}} \qquad \text{(n geheel positief} \geq 2),$$

en gaf hiervan zelfstandig een elementair bewijs. Hij legde aan de afd. ZW. de vraag voor of dit bewijs reeds bekend was. Daarop is de literatuur over deze formule en over verwante formules nader onderzocht met de volgende resultaten.

W. Ljunggren bewees in zijn artikel

"En egenskap ved de midtre binomialkoeffisienter"
(Norsk Mat. Tidsskr. 24 (1942), 18–22) de volgende formule

$$p^{3n+1} \,\Big|\, \binom{p^{n+1}}{p^n} - \binom{p^n}{p^{n-1}},$$

geldig voor iedere natuurlijke n en voor ieder oneven priemgetal p. Hij merkt verder op dat voor $p \geq 5$ de exponent $3n+1$ vervangen mag worden door $3n+2$. Dit laatste wordt bewezen door E. Jacobsthal (Norske Vid. Selsk., Skr., Trondhjem 1942, no 4 (1945)), die bij zijn bewijs o.a. gebruik maakt van eigenschappen van getallen van Bernoulli. In dit rapport brengen wij het probleem op elementaire wijze terug op een ander probleem analoog met de werkwijze voor p = 2 van Mr de Ridder en voor willekeurige p van Ljunggren. Van dit andere probleem zullen wij eveneens met elementaire hulpmiddelen een generalisatie behandelen in een andere publicatie.

Ljunggren bewees door een eenvoudige omvorming, dat het aantal factoren p in

$$d_{p,n} = \binom{p^{n+1}}{p^n} - \binom{p^n}{p^{n-1}}$$

één meer is dan het aantal factoren p in

$$(1) \qquad \prod_{\substack{k=p^n(p-1) \\ p \nmid k}}^{p^{n+1}} k - \prod_{\substack{k=1 \\ p \nmid k}}^{p^n} k = \prod_{\substack{k=1 \\ p \nmid k}}^{p^n} (p^{n+1}-k) - \prod_{\substack{k=1 \\ p \nmid k}}^{p^n} k.$$

Mr de Ridder bewees op analoge wijze dit resultaat voor p=2.

De auteurs werden zo gevoerd tot het onderzoek van de uitdrukking in het rechterlid van (1). Volgen wij hierin verder Ljunggren dan geschiedt dit gemakkelijk door te stellen

(2) $$\prod_{\substack{k=1\\ p\nmid k}}^{p^n} (y-k) = \sum_{h=0}^{p^n-p^{n-1}} a_h y^h .$$

Hieruit vindt men voor $y = p^n$ (mits $n \neq 1$ ingeval $p = 2$):

$$a_0 = \prod_{\substack{k=1\\ p\nmid k}}^{p^n} k = \sum_{h=0}^{p^n-p^{n-1}} a_h p^{nh},$$

waaruit volgt

(3) $$a_1 p^n + a_2 p^{2n} \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\, p^{3n}).$$

Door nu $y = p^{n+1}$ in (2) te stellen, vindt men dat het rechterlid van (1) gelijk is aan

$$\sum_{h=1}^{p^n-p^{n-1}} a_h p^{(n+1)h} \equiv a_1 p^{n+1} + a_2 p^{2n+2} \quad (\mathrm{mod.}\, p^{3n+3}),$$

hetgeen met behulp van (3)

(4) $$\sum_{h=1}^{p^n-p^{n-1}} a_h p^{(n+1)h} \equiv a_1 (p^{n+1} - p^{n+2}) \quad (\mathrm{mod.}\, p^{3n+2})$$

oplevert.

Hierin is

$$a_1 = - \Big(\prod_{\substack{k=1\\ p\nmid k}}^{p^n} k \Big) \sum_{\substack{a=1\\ p\nmid a}}^{p^n} \frac{1}{a}.$$

Het onderzoek naar het aantal priemfactoren p in het rechterlid van (1) is nu teruggebracht tot een onderzoek naar het aantal priemfactoren p van a_1.

Ljunggren besloot nu zijn onderzoek met het bewijs van $p^{2n-1} | a_1$ voor oneven p en van $p^{2n-2} | a_1$ voor $p = 2$. Dit laatste is op iets andere wijze ook door Mr de Ridder gedaan.

Wij stellen ons voor om in een ander rapport nader op deze quaestie in te gaan. Daarin bewijzen wij dan de volgende resultaten

$$2^{n-2} \| T_1(2^n), \quad 3^{2n-1} \| T_1(3^n)$$

en voor priemgetallen $p > 3$

$$p^{2n} | T_1(p^n).$$

Hierin is

$$T_1(M) = \sum_{\substack{a=1\\ (a,M)=1}}^{M} \frac{1}{a}$$

en $p^k \| u$ betekent $p^k | u$, $p^{k+1} \nmid u$.

Ook voor willekeurige M worden in dat rapport nog resultaten

Uit het bovenstaande volgt met behulp van (4) direct

$$2^{3n} \,\|\, d_{2,n} \text{ (voor } n \quad 1\text{)}, \quad 3^{3n+1} \,\|\, d_{3,n}$$

en voor priemgetallen $p > 3$

$$p^{3n+2} \mid d_{p,n} \quad .$$