STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

ZW 1970-004

Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

door

Prof.Dr. J.C.H. Gerretsen

Syllogistiek

1.- De Aristotelische vormen.

Sinds Aristoteles is men steeds doende geweest te trachten om voor logische doeleinden proposities uit te drukken door middel van een volzin in één van de vier zogenaamde "logische vormen". Iedere dergelijke vorm bevat drie elementen: *subject*, *copula* en *predicaat*. De vormen zijn van elkaar onderscheiden door hun *qualiteit*: affirmatief of negatief, en *quantiteit*: universeel of particulier. De vier vormen met de letters, die volgens de traditie als hun namen fungeren, zijn:

a. Alle P zijn Q ; *universeel affirmatief*
i. Sommige P zijn Q ; *particulier affirmatief*
e. Geen P is Q ; *universeel negatief*
o. Sommige P zijn niet Q ; *particulier negatief*.

De letters in de eerste kolom, die de namen van de proposities zijn, ontlenen we aan de beide eerste klinkers van het woord *affirmo* voor de affirmatieve beweringen en de beide eerste klinkers van het woord *nego* voor de beide negatieve beweringen.

Vele proposities, met name die welke in de wiskunde voorkomen, zijn doorgaans uitgedrukt in vormen, waarvan die van Aristoteles paradigmata zijn. Bijvoorbeeld:

"Alle gelijkzijdige driehoeken zijn gelijkbenig"

is een a-vorm;

"Sommige gelijkbenige driehoeken zijn niet gelijkzijdig"

is een o-vorm;

"Geen gelijkzijdige driehoek is rechthoekig"

is een e-vorm;

"Sommige rechthoekige driehoeken zijn gelijkbenig"

is een i-vorm.

De klassificatie van Aristoteles berust op het feit, dat iedere propositie van de genoemde vormen kan worden geïnterpreteerd als een relatie tussen verzamelingen. Er is sprake van twee relaties tussen verzamelingen:

1) De verzamelingen overlappen elkaar, d.w.z. ze hebben een niet-lege doorsnede.
2) De verzamelingen zijn disjunct, d.w.z. hun doorsnede is leeg.

De subject- en predicaatterm specificeren de betreffende verzamelingen. De copula drukt met behulp van de quantitatieve en adverbiale symbolen de relatie van overlapping of niet overlapping uit.

De traditionele verdeling is niet wezenlijk. Iedere negatieve vorm heeft een equivalente affirmatieve vorm. "Geen P is Q" is equivalent met "Alle P zijn non-Q" en "Sommige P zijn niet Q" is equivalent met "Sommige P zijn non-Q".

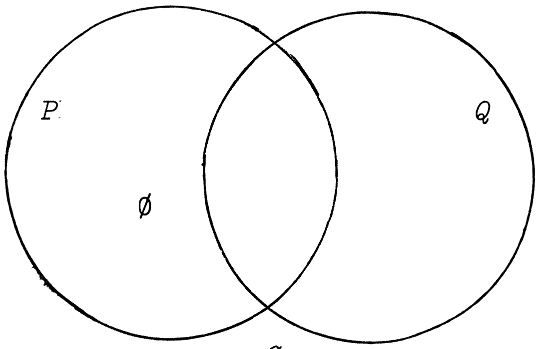
Dit blijkt duidelijk als we de proposities in mathematisch tekenschrift weergeven. Als P het predicaat $P(x)$ symboliseert en Q het predicaat $Q(x)$ en beschouwen we de verzamelingen

$$P = \{x \mid P(x)\}, \quad Q = \{x \mid Q(x)\}$$

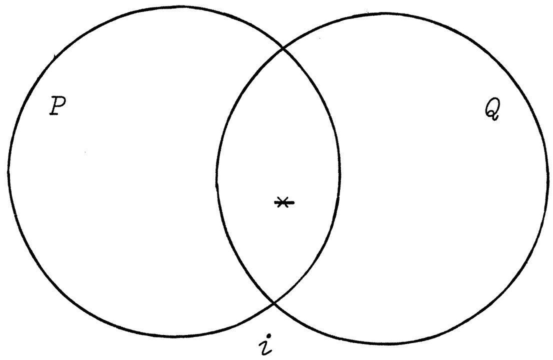
dan hebben we achtereenvolgens:

$$
(1) \qquad
\begin{array}{llll}
a. & P \subset Q\ , & \text{of} & P \cap Q' = \emptyset, \\
i. & P \not\subset Q', & \text{of} & P \cap Q \neq \emptyset, \\
e. & P \subset Q', & \text{of} & P \cap Q = \emptyset, \\
o. & P \not\subset Q\ , & \text{of} & P \cap Q' \neq \emptyset.
\end{array}
$$

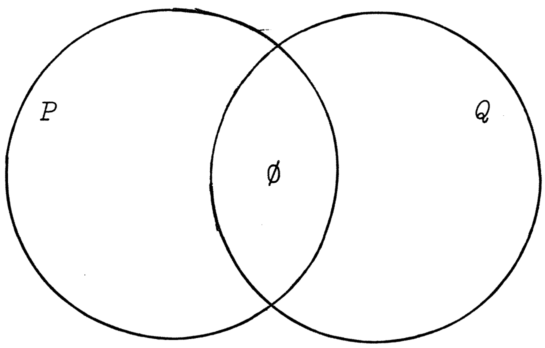
Daarbij stelt Q' het complement van Q voor. We kunnen dit ook schematisch weergeven door middel van Venn-diagrammen:



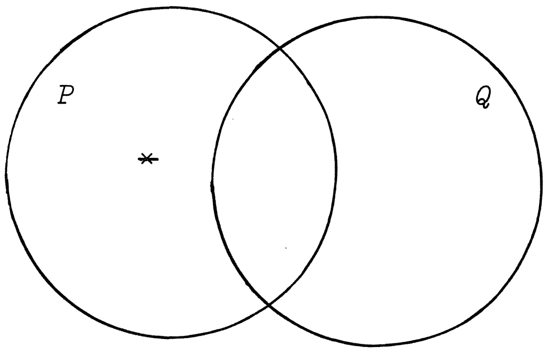
a



i



e



o

Met $\emptyset$ geven we aan dat het betreffende veld leeg is en met * geven we aan dat het niet leeg is.

DEFINITIE 1: Twee proposities heten *contrair* als de ene de ontkenning is van de andere.

Als we de letters *a*, *i*, *e* en *o* als copula gebruiken dan kunnen we de logische vormen van Aristoteles schrijven als

$$P\ a\ Q,\quad P\ i\ Q,\quad P\ e\ Q,\quad P\ o\ Q.$$

STELLING 1: *De a- en o-proposities zijn contrair, evenals de e- en i-proposities.*

Bewijs. Dit volgt onmiddellijk uit de formules (1).//

DEFINITIE 2: Onder *conversie* verstaan we het proces, dat uit een propositie een andere doet ontstaan door verwisseling van het *subject* P met het *predicaat* Q, dus de overgang van $P \alpha Q$ naar $Q \alpha P$, waarbij α voor een der letters a, i, e of o staat.

STELLING 2: *De e- en i-proposities zijn symmetrisch d.w.z. door conversie ontstaat uit ieder een daarmee logisch equivalente propositie.*

Bewijs. Volgt uit de tweede kolom van (1).//

De door conversie uit de a- en o-verkregen proposities zullen we aanduiden met de letters $\bar{a}$ en $\bar{o}$. Dus $P \bar{a} Q$ is logisch gelijkwaardig met $Q a P$ en $P \bar{o} Q$ is logisch gelijkwaardig met $Q \bar{o} P$.

DEFINITIE 3: Vervangen we in een propositie het predicaat door de ontkenning daarvan, dan ontstaat een propositie, die de *subcontraire* van de eerstgenoemde heet.

STELLING 3: *De a- en e-proposities zijn subcontrair, evenals de i- en o-proposities.*

Bewijs. Merk op dat als

$$Q = \{x \mid Q(x)\},$$

dat dan

$$Q' = \{x \mid \neg Q(x)\}.$$

De juistheid van de stelling is nu weer uit de formules (1) af te lezen.//

De inhoud van de stellingen 1 en 3 kan men overzichtelijk aldus in een schema weergeven:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
a \arrow[r, leftrightarrow, "\text{subcontrair}"] \arrow[dr, leftrightarrow] & e \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[d, phantom, ""] \\
i \arrow[r, leftrightarrow, swap, "\text{subcontrair}"] \arrow[ur, phantom, "\text{contrair}"] & o
\end{tikzcd}$$

2.- Syllogismen

Een *syllogisme* bestaat uit drie proposities, ieder in de traditionele vorm a, i, e en o en zo, dat een ervan, de *conclusie* genoemd, logisch afleidbaar is uit de conjunctie van de beide andere, die de *premissen* worden genoemd. Voorbeeld:

Alle mensen zijn stervelingen
Alle Grieken zijn mensen

Alle Grieken zijn stervelingen

Traditioneel wordt de conclusie steeds geschreven als $S\ \gamma\ P$. De eerste premisse bestaat uit de termen P en M, de tweede uit S en M. Men noemt S het *subject*, P het *predicaat* en M de *medius* van het syllogisme. De propositie met M en P heet de *propositio maior*, de propositie met S en M de *propositio minor*.

Men duidt van ouds een syllogisme aan met

$$\begin{array}{c} M\ \alpha\ P \\ S\ \beta\ M \\ \hline S\ \gamma\ P \end{array} \tag{2}$$

Daarbij zijn α, β en γ een der letters a, i, e of o..Het schema (2) kan betekenen de equivalentie

$$M\ \alpha\ P \wedge S\ \beta\ M \Longleftrightarrow S\ \gamma\ P$$

of de implicatie

$$M\,\alpha\,P \wedge S\,\beta\,M \Longrightarrow S\,\gamma\,P.$$

In het eerste geval heet het syllogisme *sterk*. Is slechts de implicatie geldig, dan heet het syllogisme *zwak*. Daar in de premissen omtrent de volgorde van de termen geen afspraak wordt gemaakt kunnen er vier figuren ontstaan als we er aan vasthouden dat de maior steeds boven de minor staat. Laten we gemakshalve de copula weg dan hebben we de figuren:

I	II	III	IV
MP	*PM*	*MP*	*PM*
SM	*SM*	*MS*	*MS*
—	—	—	—
SP	*SP*	*SP*	*SP*

Afhankelijk van de keuze van de copula kunnen we voor elke figuur 4×4×4 mogelijkheden realiseren en dus in totaal $4^4 = 256$ syllogismen. Dit zijn echter niet steeds conclusieregels, zodat het aantal geldige syllogismen veel kleiner is. Het is de taak van de syllogistiek deze geldige conclusieregels op te sporen.

Doordat door de toepassing van het proces van de conversie de figuren II, III en IV alle tot figuur I zijn terug te brengen, verdient deze figuur bizondere aandacht. Door passende keuze van de copula in elke propositie blijken er voor figuur I vier geldige syllogismen te bestaan - hetgeen we naderhand zullen bewijzen - waarvoor de volgende voorbeelden karakteristiek zijn:

a. Alle mensen zijn sterfelijk
a. Alle Atheners zijn mensen
―――――――――――――――― *b*
a. Alle Atheners zijn sterfelijk

e. Geen mens is onfeilbaar
a. Geleerden zijn mensen
―――――――――――――――― *c*
e. Geen geleerde is onfeilbaar

a. Alle Cretenzers zijn leugenaars
i. Sommige mensen zijn Cretenzers
——————————————— *d*
i. Sommige mensen zijn leugenaars

e. Geen Cretenzer is betrouwbaar
i. Sommige mensen zijn Cretenzers
——————————————— *f*
o. Niet alle mensen zijn betrouwbaar

Deze vier syllogismen noemt men de *modi* van figuur I. Elke modus heeft ook weer een door een letter aangegeven naam, die we rechts hebben aangegeven.

Volgens traditie wordt in figuur I de maior steeds universeel genomen. Zijn beide premissen universeel, dan neemt men voor de maior de negatieve propositie.

Uit het voorbeeld lezen we de volgende regels af, die, gelijk zal blijken, op alle geldige syllogismen van toepassing zijn:

Regels der *quantiteit*:
1) Tenminste een der premissen is universeel.
2) Is ook de minor universeel, dan is de conclusie universeel.
3) Is de minor particulier, dan is ook de conclusie particulier.

Regels der *qualiteit*:
1) Tenminste een der premissen is affirmatief.
2) Zijn beide premissen affirmatief dan is de conclusie affirmatief.
3) Is een der premissen negatief, dan is de conclusie negatief.

Men duidt de syllogismen aan met mnemotechnische woorden, waarvan de beginletters met de modi corresponderen. De klinkers corresponderen met de premissen en de conclusie. Voor de opgeschreven syllogismen zijn dit de woorden:

barbara, celarent, darii, ferio.

De overige medeklinkers hebben in deze woorden alleen eufonische waarde.

3.- Copula algebra

Zij V de verzameling bestaande uit de elementen a, $\bar{a}$, i, e, o, $\bar{o}$. We zullen zien dat op V een primitieve algebraïsche structuur kan worden gedefinieerd, bepaald door drie unaire operaties en een binaire operatie.

De *unaire* operaties zijn:

1) De *conversie*: $\alpha \to \bar{\alpha}$.

Dit proces is beschreven in definitie 2. Op grond van stelling 2 is $\bar{e} = e$, $\bar{i} = i$. De elementen a en $\bar{a}$ zijn verschillend, evenals o en $\bar{o}$.

2) De *omkering*, d.w.z. de overgang op het contraire element: $\alpha \to \alpha^{-1}$.

Dit proces is beschreven in definitie 1. Op grond van stelling 1 is $a^{-1} = o$, $o^{-1} = a$, $e^{-1} = i$, $i^{-1} = e$. Voorts is $\bar{a}^{-1} = \bar{o}$ en $\bar{o}^{-1} = \bar{a}$, gelijk uit (1) blijkt door verwisseling van P en Q.

3) De *subomkering*, d.w.z. de overgang op het subcontraire element: $\alpha \to \underline{\alpha}$.

Dit proces is beschreven in definitie 3. Op grond van stelling 3 is $\underline{a} = e$, $e = \underline{a}$, $\underline{i} = o$, $i = \underline{o}$. Evenwel is het proces niet van toepassing op $\bar{a}$ en $\bar{o}$. Immers:

$$a\colon P \cap Q' = \emptyset; \quad \bar{a}\colon P' \cap Q = \emptyset; \quad \underline{\bar{a}} = P' \cap Q' = \emptyset.$$

Evenwel correspondeert $\underline{\bar{a}}$ niet met een propositie in de traditionele vorm. Dezelfde redenering geldt voor $\bar{o}$.

De *binaire* operatie is het *product*, dat we aldus beschrijven.

DEFINITIE 4: We zullen zeggen dat het element $\gamma \in V$ het *product* is van de elementen $\alpha, \beta \in V$,

$$\gamma = \alpha \circ \beta \tag{3}$$

als bij de proposities S en P een propositie M kan worden gevonden zodanig, dat het schema (2) een sterk syllogisme voorstelt, m.a.w. de logische equivalentie

$$M \,\alpha\, P \wedge S \,\beta\, M \Longleftrightarrow S \,\gamma\, P. \tag{4}$$

Doordat we in (2) aan de traditionele vorm willen vasthouden is het product $\alpha \circ \beta$ niet noodzakelijk commutatief. Bovendien is niet bij ieder geordend paar (α,β) een element γ te vinden waarvoor (3) geldt.

STELLING 4: *Zijn* α, β *en* γ *elementen van* V *waarvoor* (3) *geldt, dan geldt ook*

$$\bar{\beta} \circ \bar{\alpha} = \bar{\gamma}. \qquad (5)$$

Bewijs. Krachtens onderstelling is

$$\begin{array}{c} M\ \alpha\ P \\ S\ \beta\ M \\ \hline S\ \gamma\ P \end{array}$$

een sterk syllogisme. Schrijven we S voor P en P voor S dan neemt dit de vorm aan

$$\begin{array}{c} M\ \alpha\ S \\ P\ \beta\ M \\ \hline P\ \gamma\ S \end{array}$$

Verwisseling van de premissen voert tot

$$\begin{array}{c} P\ \beta\ M \\ M\ \alpha\ S \\ \hline P\ \gamma\ S \end{array}$$

en daarvoor kunnen we schrijven:

$$\begin{array}{c} M\ \bar{\beta}\ P \\ S\ \bar{\alpha}\ M \\ \hline S\ \bar{\gamma}\ P \end{array}$$

waarmee (5) is aangetoond.//

STELLING 5: *Zijn* α, β *en* γ *elementen van* V *waarvoor (3) geldt, dan gelden ook*

$$\gamma^{-1} \circ \bar{\beta} = \alpha^{-1} \tag{6}$$

en

$$\bar{\alpha} \circ \gamma^{-1} = \beta^{-1}. \tag{7}$$

Bewijs. Het syllogisme

$$\begin{array}{l} M\ \alpha\ P \\ S\ \beta\ M \\ \hline S\ \gamma\ P \end{array}$$

is op grond van de regel van reductio ad absurdum logisch gelijkwaardig met

$$\begin{array}{l} S\ \gamma^{-1}\ P \\ S\ \beta\ M \\ \hline M\ \alpha^{-1}\ P\ . \end{array}$$

Door verwisseling van S en M komt er

$$\begin{array}{l} M\ \gamma^{-1}\ P \\ M\ \beta\ S \\ \hline S\ \alpha^{-1}\ P \end{array}$$

waarvoor we schrijven

$$\begin{array}{l} M\ \gamma^{-1}\ P \\ S\ \bar{\beta}\ M \\ \hline S\ \alpha^{-1}\ P\ , \end{array}$$

waarmee (6) is aangetoond.

We kunnen echter het eerste syllogisme ook omvormen tot

$$\frac{\begin{array}{l} M \;\alpha\; P \\ S \;\gamma^{-1}\; P \end{array}}{S \;\beta^{-1}\; M}$$

en verwisseling van M en P voert tot

$$\frac{\begin{array}{l} P \;\alpha\; M \\ S \;\gamma^{-1}\; M \end{array}}{S \;\beta^{-1}\; M}$$

en daarvoor schrijven we

$$\frac{\begin{array}{l} M \;\bar{\alpha}\; P \\ S \;\gamma^{-1}\; M \end{array}}{S \;\beta^{-1}\; P\,.}$$

Daarmee is (7) aangetoond.//

STELLING 6: *Zijn* α, β *en* γ *elementen van* V *waarvoor (3) geldt, bezitten voorts* α *en* γ *subcontraire elementen, dan geldt ook*

(8) $$\underline{\alpha} \bullet \beta = \gamma .$$

Bewijs. Vervangen we in

$$\frac{\begin{array}{l} M \;\alpha\; P \\ S \;\beta\; M \end{array}}{S \;\gamma\; P}$$

de propositie P door de ontkenning $\neg P$, dan komt er

$$\begin{array}{l} M \ \alpha \ \neg P \\ S \ \ \beta \ \ M \\ \hline S \ \gamma \ \neg P \end{array}$$

en dus

$$\begin{array}{l} M \ \underline{\alpha} \ P \\ S \ \beta \ M \\ \hline S \ \underline{\gamma} \ P \ . \end{array}$$

Daarmee is (8) bewezen.//

4.- De multiplicatie tabel

Op grond van de stellingen van §3 zijn we in staat een aantal producten van elementen van V uit te rekenen. Het zal blijken dat we op deze wijze alle bestaande producten kunnen verkrijgen. Daarbij steunen we op een tweetal stellingen betrekking hebbende op het element a.

STELLING 7: *Het product van de elementen* a *en* a *is* a:

(9) $$a \circ a = a.$$

Bewijs. We interpreteren S, M en P als verzamelingen. Nemen we als premissen $M \subset P$ en $S \subset P$, dan is wegens de transitiviteit van de inclusie ook voldaan aan $S \subset P$, dus uit $M \; a \; P$ en $S \; a \; M$ volgt $S \; a \; P$. Is omgekeerd aan $S \; a \; P$ voldaan, dus $S \subset P$ en nemen we $M = P$, dan is stellig $M \subset P$ en $S \subset M$, zodat $M \; a \; P$ en $S \; a \; M$ beide gelden.//

STELLING 8: *Het product van de elementen* a *en* $\bar{a}$ *is* i:

(10) $$a \circ \bar{a} = i$$

mits in de definitie voor product de medius als niet leeg wordt ondersteld.

Bewijs. De premissen zijn nu $M = P$ en $M \subset S$. Dan is $M \subset S \cap P$ en dus $S \cap P \neq \emptyset$, krachtens de omtrent M gemaakte onderstelling. Is omgekeerd $S \cap P \neq \emptyset$ en kiezen we $M = S \cap P$, dan is $M \subset S$ en $M \subset P$.//

We kunnen nu de volgende lijst van producten opstellen:

(11) $a \circ a = a$. Dit is (9).

(12) $o \circ \bar{a} = o$. Toepassing van (6) op (11).

(13) $\bar{a} \circ o = o$. Toepassing van (7) op (11).

(14) $a \circ i = i$. Toepassing van (7) op (12).

(15) $e \circ a = e$. Toepassing van (8) op (14).

(16) $e \circ i = o$. Toepassing van (8) op (15).

(17) $a \circ \bar{a} = i$. Dit is (10).

(18) $e \circ \bar{a} = o$. Toepassing van (8) op (17).

Passen we (5) toe op de reeds verkregen resultaten dan levert (17) niets nieuws op. Uit de overige producten leiden we af

(19) $\bar{a} \circ \bar{a} = \bar{a}$.

(20) $a \circ \bar{o} = \bar{o}$.

(21) $\bar{o} \circ a = \bar{o}$.

(22) $i \circ \bar{a} = i$.

(23) $\bar{a} \circ e = e$.

(24) $i \circ e = \bar{o}$.

(25) $a \circ e = \bar{o}$.

We kunnen alles overzichtelijk samenvatten in een tabel, waarin opgenomen zijn de producten van telkens een element van de eerste kolom en een element van de eerste rij. De tabel bezit een eigenaardige symmetrie: spiegeling aan de hoofddiagonaal doet nl. ieder element in zijn converse overgaan.

(26)

	$\bar{a}$	a	i	e	o	$\bar{o}$
a	i	a	i	$\bar{o}$		$\bar{o}$
$\bar{a}$	$\bar{a}$			e	o	
i	i			$\bar{o}$		
e	o	e	o			
$\bar{o}$		$\bar{o}$				
o	o					

Niet alle producten geven aanleiding tot de opstelling van de klassieke syllogismen, omdat daarin de conclusies $S\ \bar{a}\ P$ en $S\ \bar{o}\ P$ niet worden toegelaten.

5.- De traditionele syllogismen

De vier figuren van de traditionele syllogismen ontstaan uit elkaar door telken op een der premissen conversie toe te passen. We rangschikken de producten, die niet tot uitkomst geven $\bar{a}$ of $\bar{o}$ in vier kolommen:

$a \circ a = a$	$\bar{a} \circ o = o$	$o \circ \bar{a} = o$	
$e \circ a = e$	$e \circ a = e$		
	$\bar{a} \circ e = e$		$\bar{a} \circ \bar{e} = e$
$a \circ i = i$		$a \circ \bar{i} = i$	
		$i \circ \bar{a} = i$	$\bar{i} \circ \bar{a} = i$
		$a \circ \bar{a} = i$	
$e \circ i = o$	$\bar{e} \circ i = o$	$e \circ \bar{i} = o$	$\bar{e} \circ \bar{i} = o$
		$e \circ \bar{a} = o$	$\bar{e} \circ \bar{a} = o$

Dit schema is in overeenstemming gebracht met de mnemotechnische woorden, waarmee de syllogismen worden aangeduid.

barbara	baroco	bocardo	
celarent	cesare		calemes
	camestres		
darii		datisi	
		disamis	dimatis
		darapti	
ferio	festino	ferison	fresison
		felapton	fesapo

De syllogismen in de tweede, derde en vierde kolom kunnen door bepaalde omvormingen uit die van de eerste kolom worden verkregen. Zo ontstaat bijvoorbeeld uit $a \circ a = a$ door toepassing van stelling 5 $\bar{a} \circ o = o$ en $o \circ \bar{a} = o$. In het bewijs van stelling 5 is reductio ad absurdum toegepast. Men noemt de overgang ook wel *contrapositie*. In het mnemotechnische woord wordt dit proces aangeduid met de letter *c* achter de betreffende copula.

Gelijk in stelling 2 is opgemerkt zijn de copulae *e* en *i* symmetrisch. Ze kunnen dus geconverteerd worden zonder te veranderen. Men kan dit in het mnemotechnische woord voor de aldus verkregen syllogismen zien door het optreden van een of meer letter *s*.

Het in stelling 4 beschreven proces heet *metathese*. De met behulp van dit proces verkregen syllogismen hebben in hun trefwoord de letter *m*.

In stelling 8 is het product $a \circ a = a$ omgezet in $a \circ \bar{a} = i$. De conversie van de tweede *a* bleek mogelijk te zijn door aan te nemen dat de medius niet leeg is. Men spreekt van een *conversio per accidens* en in het trefwoord van een daarmee verkregen syllogisme wordt dit met de letter *p* aangeduid.

6.- De zwakke syllogismen

We vermelden eerst de

HULPSTELLING: *Zijn P en Q niet leeg dan gelden de implicaties*

(26) $$P\ a\ Q \Longrightarrow P\ i\ Q\ ,$$

(27) $P \bar{a} Q \Longrightarrow P i Q$,

(28) $P e Q \Longrightarrow P o Q$,

(29) $P e Q \Longrightarrow P \bar{o} Q$.

Bewijs. Uit $P \subseteq Q$ of $Q \subset P$ volgt $P \cap Q \neq \emptyset$. Daarmee staat de juistheid van (26) en (27) reeds vast. Uit $P \cap Q = \emptyset$ volgt $P \cap Q' \neq \emptyset$ of $P' \cap Q \neq \emptyset$, waarmee ook (28) en (29) zijn bewezen.//

We kunnen nu de lijst met syllogismen aanvullen, aldus

I	II	III	IV
barbari			bamalip
celaront	cesaro		
	camestros		calemos

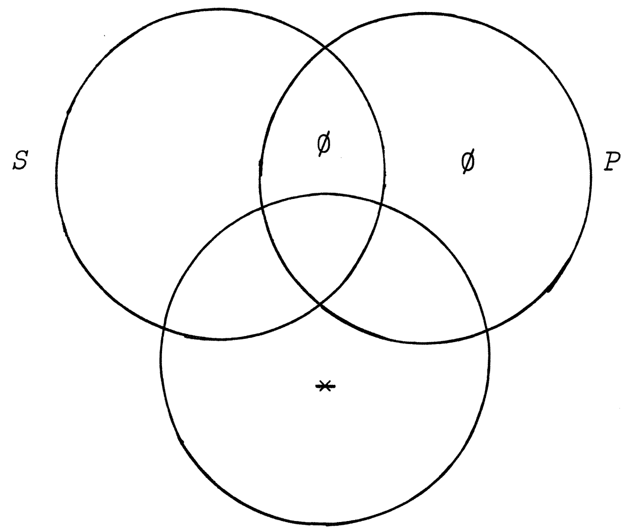
Met uitzondering van bamalip heten de gevonden syllogismen *suballem*, omdat ze uit de hoofdsyllogismen worden verkregen door toepassing van de hulpstelling op de conclusie. Bamalip ontstaat door conversie uit a $\circ$ a = a, dus $\bar{a} \circ \bar{a} = \bar{a}$ en daarna toepassing van (27). Daar $\bar{a}, \bar{a}, \bar{a}$ in de klassieke logica niet wordt toegelaten is bamalip geen suballem syllogisme. De *p* duidt wederom op conversio per accidens.

7.- <u>De niet bestaande producten</u>

Als het mogelijk is uit de premissen $M\ \alpha\ P$ en $S\ \beta\ M$ twee tegenstrijdige conclusies te trekken, dan bestaat het product $\alpha \circ \beta$ niet.

Met behulp van Venn diagrammen bewijzen we nu achtereenvolgens:

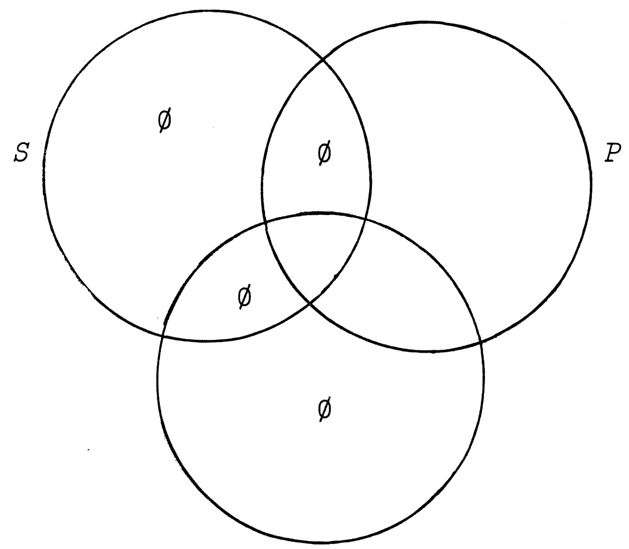
1) Het paar der proposities *a* en *o* laat geen conclusie toe.



Immers, zowel de conclusie *e* als *i* zijn mogelijk. Met gebruikmaking van de hulpstelling hebben we dan:

De producten $a \circ o$ en $i \circ o$ bestaan niet.

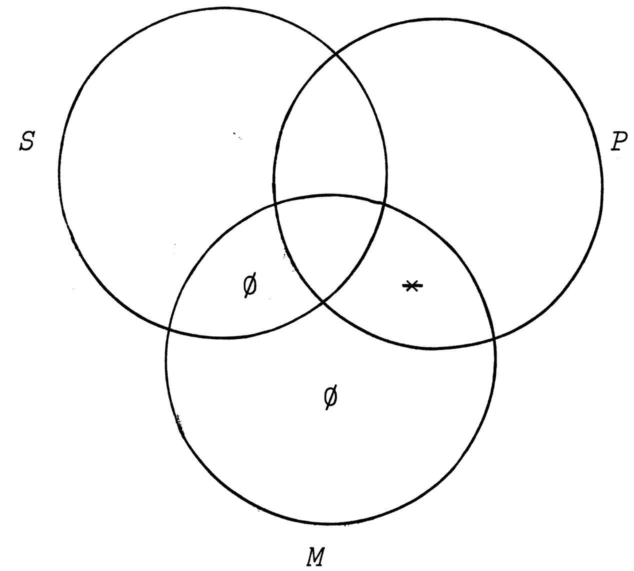
2) Het paar der proposities $\bar{a}$ en a laat geen conclusie toe.



Dus:

De producten $\bar{a} \circ a$, $\bar{a} \circ i$ en ii bestaan niet.

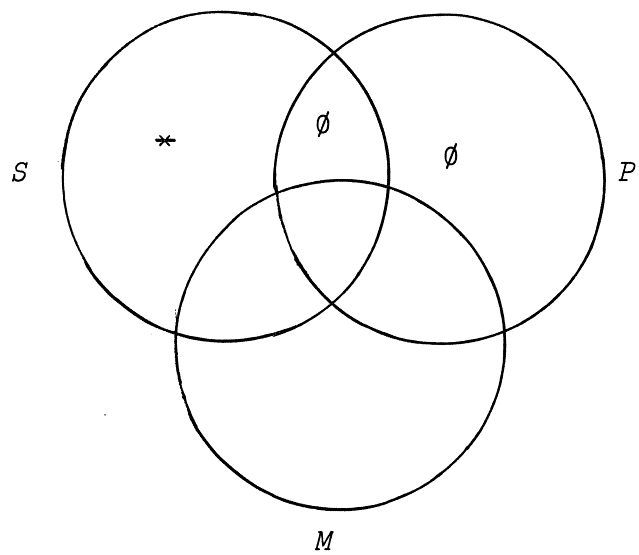
3) Het paar der proposities $\bar{a}$ en $\bar{o}$ laat geen conclusie toe.



Dus:

De producten $\bar{a} \circ \bar{o}$ en $i \circ \bar{o}$ bestaan niet.

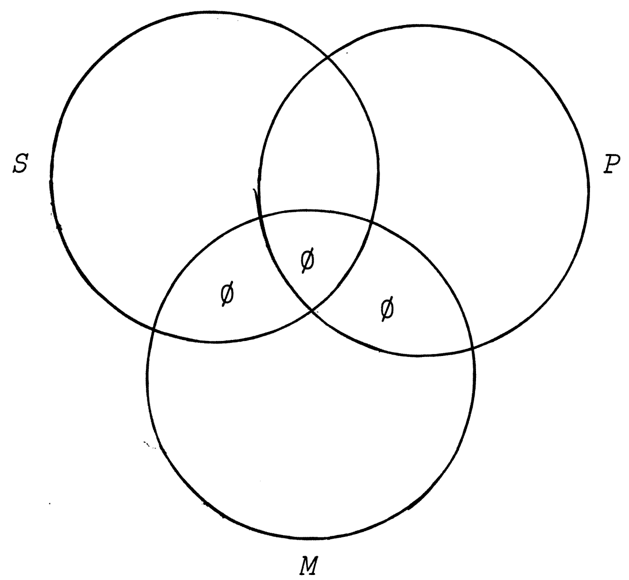
4) Het paar der proposities a en o laat geen conclusie toe.



Dus:

De producten $a \circ o$ en $i \circ o$ bestaan niet.

5) Het paar der proposities e en o laat geen conclusie toe.



Dus:

De producten $e \circ e$, $e \circ o$, $e \circ \bar{o}$, $\bar{o} \circ o$, $\bar{o} \circ \bar{o}$ en $o \circ \bar{o}$ bestaan niet.

Met een beroep op stelling 4 en de overweging dat de multiplicatietabel (26) symmetrisch is t.o.v. de hoofddiagonaal concluderen we dat de leeggelaten hokjes in (26) niet kunnen worden ingevuld.