STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1952 - 005

Serie: Elementaire onderwerpen van hoger standpunt uit

Prof.dr. F. Loonstra

19 maart

BIJNA-PERIODIEKE FUNCTIES

1952

Rapport Z.W. 1952-005.

Serie: Elementaire onderwerpen van hoger standpunt uit.

19 Maart; voordracht door
Prof. Dr F. Loonstra

over:

BIJNA-PERIODIEKE FUNCTIES

Inleiding.

Zolang men zich alleen met reële functies bezighoudt, verstaat men onder "zuivere trilling" een functie zoals sin x, cos x of a cos x + b sin x, algemener a cos x + b sin x. In het vervolg zullen we onder een "zuivere trilling" verstaan een complexe functie $a\, e^{i\lambda x} = a(\cos \lambda x + i \sin \lambda x)$ van de reele veranderlijke x. De theorie van de bijna-periodieke functies houdt zich bezig met de vraag: welke (continue) functies f(x) kunnen worden "voorgesteld" door een trigonometrische reeks van de gedaante $\sum A_n\, e^{i\Lambda_n x}$? Wanneer we voor de Λ_n alleen gehele waarden toelaten, dan betreft de genoemde vraag de theorie van de periodieke functies: elke (continue) periodieke functie f(x) met periode 2π kan worden ontwikkeld in een reeks $\sum a_n\, e^{inx}$, de Fourier-reeks van f(x). Het grote verschil tussen het eerste en het laatste geval is gelegen in het feit, dat men in het eerste geval de Λ_n uit de (niet-aftelbare) verzameling van alle reële getallen kan kiezen; in het laatste geval kan Λ_n slechts geheel zijn. In § 1 worden nodige begrippen toegelicht, § 2 geeft een samenvatting betreffende periodieke functies, terwijl § 3 zich met bijna-periodieke functies bezighoudt.

§ 1. Enkele definities.

1). Zijn g(x) en h(x) complexe functies van de reele veranderlijke x, dan heten ze orthogonaal in het interval $a \leq x \leq b$ t.o.v. elkaar, als $\int_a^b g(x)\, \overline{h(x)}\, dx = 0$. (Vb.: $g(x) = e^{imx}$ en $h(x) = e^{inx}$, m,n geheel, $m \neq n$; interval $a \leq x \leq a + 2\pi$).

2). Onder de gemiddelde waarde van de continue functie f(x) in het interval $a \leq x \leq b$ verstaan we

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = M\left\{f(x)\right\} = M\left\{f\right\}.$$

De in 1) genoemde orthogonaliteit luidt dus: $M\{g\,\bar{h}\} = 0$.

3). De functie $f(x)$ heet <u>genormeerd</u> in het interval $a \leqq x \leqq b$, als: $M\{f\bar{f}\} = M\{|f|^2\} = 1$.

4). Een verzameling functies $f(x)$, $g(x)$, ..., continu voor $a \leqq x \leqq b$ heet een <u>orthogonaal</u> stelsel in dat interval, als elk tweetal verschillende functies f en g in genoemd interval orthogonaal t.o.v. elkaar zijn: $M\{f\bar{g}\} = 0$. Wanneer bovendien elke functie van het stelsel in dat interval genormeerd is, heet het stelsel <u>orthonormaal</u>. Vb.: het stelsel $\{e^{inx}\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ is orthonormaal in elk interval $a \leqq x \leqq a + 2\pi$.

5). Zij $\{\varphi(x)\}$ een orthonormaal stelsel voor $a \leqq x \leqq b$, $F(x)=U(x)+iV(x)$ een willekeurige continue functie voor $a \leqq x \leqq b$, dan heet

$$F_\varphi = M\{F_\varphi(x)\} = \frac{1}{b-a}\int_a^b F(x)\overline{\varphi(x)}\,dx$$

de Fourier-constante van $F(x)$ met betrekking tot een functie $\varphi(x)$ van het stelsel. Is nu $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ een eindig aantal functies van het stelsel $\{\varphi(x)\}$ en $S(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x)$, waarin c_i (complexe) constanten voorstellen, dan kan men zich afvragen: Hoe moeten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ worden gekozen, opdat $S(x)$ de functie $F(x)$ zo goed mogelijk benadert, in de zin van de methode van de kleinste kwadraten, d.w.z.:

$$M\{|F(x) - S(x)|^2\} \text{ moet minimaal zijn.}$$

Het antwoord luidt: Dan moeten de constanten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ juist de bij $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ behorende Fourier-constanten van $F(x)$ zijn:

$$c_i = F_{\varphi_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

§ 2. <u>Periodieke functies</u>.

1). Kies als orthonormaal stelsel: $\{\varphi_n\} = \{e^{inx}\}$, $n=0, \pm 1, \pm 2$, $0 \leqq x \leqq 2\pi$. Is $P(x)$ continue en periodiek (periode 2π), dan is

$$P_{\varphi_n} = a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(x)\,e^{-inx}\,dx.$$

Zodoende ontstaat een reeks $\sum a_n e^{inx}$, genaamd de Fourier-reeks van $P(x)$; op grond van de formele toevoeging schrijven we

$$P(x) \backsim \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx} \qquad (1).$$

Elke eindige som $\sum_{n=1}^{N} a_n e^{inx}$ van de reeks (1) benadert $P(x)$ (volgens de methode van de kleinste kwadraten) beter dan elke andere lineaire combinatie $\sum_{n=1}^{N} c_n e^{inx}$.

Kan $P(x)$ in een reeks $\sum b_n e^{inx}$ worden ontwikkeld, die gelijkmatig convergeert voor alle x (onverschillig de volgorde van de termen), dan moet deze reeks de Fourier-reeks van zijn som $P(x)$ zijn.

2). Eenduidigheidsstelling: Zijn $P_1(x)$, $P_2(x)$ twee verschillende (periodieke) functies met periode 2π, dan behoren daarbij ook verschillende Fourier-reeksen. Anders gezegd: Er bestaat geen (niet-verdwijnende) functie $P(x)$, waarvan alle Fourier-coëfficiënten nul zijn. Omdat elke niet-verdwijnende functie $P(x)$ kan worden genormeerd door vermenigvuldiging met een geschikte constante, kan men de stelling ook zo uitspreken: Er bestaat geen periodieke functie $P(x)$ met periode 2π, die voldoet aan:

$$M\{P(x)\,e^{-inx}\} = 0 \text{ voor } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ èn } M\{|P(x)|^2\} = 1.$$

Het orthonormale stelsel $\{e^{inx}\}$ kan dus niet worden uitgebreid door toevoeging van een nieuwe periodieke functie met periode 2π: Het stelsel e^{inx} is volledig!

3). Aequivalent met de in 2) genoemde eenduidgheid is de zg. gelijkheid van Parseval: Is $P(x)$ weer een (continue) periodieke functie (periode 2π) en

$$P(x) \sim \sum a_n e^{inx}, \text{ dan geldt } \sum_{-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 = M\{|P(x)|^2\}.$$

Deze gelijkheid houdt in zich, dat elke continue periodieke functie $P(x)$ (met periode 2π) tot op elke graad van nauwkeurigheid (volgens de kleinste kwadraten) kan worden benaderd door trigonometrische polynomen.

4). Stelling van Weierstrasz.

Beschouwt men de verzameling $\{S(x)\}$ van eindige sommen $S(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n e^{-inx}$ en breidt men deze verzameling uit door toevoeging van die functies $f(x)$, die door gelijkmatige approximatie van functies uit de klasse $\{S(x)\}$ ontstaan (voor alle waarden van x), dan noemt men die klasse de afsluiting van de klasse $\{S(x)\}$. De stelling van Weierstrasz zegt nu: De klasse $H\{S(x)\}$ (d.i. dus de afsluiting van $\{S(x)\}$) is identiek met de klasse van alle continue periodieke functies met periode 2π.

§ 3. Bijna-periodieke functies.

1). Beschouw de verzameling $\{s(x)\}$ van alle eindige sommen $s(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n e^{i\lambda_n x}$ $(-\infty < x < +\infty)$, waarin a_n complexe, λ_n reële getallen voorstellen. De klasse $\{s(x)\}$ wordt afgesloten, d.w.z. $H\{s(x)\}$ is de verzameling van alle functies $f(x) = u(x) + i\,v(x)$, die gelijkmatig (voor alle x) door sommen $s(x)$ kunnen worden benaderd. Het hoofdprobleem is nu: hoe kunnen de functies uit de klasse $H\{s(x)\}$ nog op andere wijze worden gekenmerkt?

2). Beschouw $s(x)= e^{i\lambda_1 x} + e^{i\lambda_2 x}$; is $\lambda_1 : \lambda_2$ rationaal, dan is s(x) periodiek. Is echter $\lambda_1 : \lambda_2$ irrationaal, dan is s(x) niet periodiek; is $2\pi/|\lambda_1| = p_1$, $2\pi/|\lambda_2| = p_2$, dan zijn voor elke $\delta > 0$ twee gehele getallen n_1 en n_2 te bepalen, zodanig, dat $|n_1p_1 - n_2p_2| < \delta$. Is dan t een getal "in de buurt" van n_1p_1 en n_2p_2, dan is t "bijna" een periode van $e^{i\lambda_1 x}$ en van $e^{i\lambda_2 x}$, dus ook van s(x), in die zin, dat $|s(x+t)- s(x)|$ erg klein is voor alle x. Bovendien liggen de getallen t, die hiervan in aanmerking komen "relatief dicht", d.w.z. er is voor elke ε een $L = L(\varepsilon)$ aan te geven, zodat elk interval van de lengte L minstens één getal t bevat, waarvoor $|s(x+t)- s(x)| < \varepsilon$. Zo'n getal t heet "verschuivingsgetal" van s(x), behorende bij $\varepsilon > 0$. De functie s(x) heet "bijna-periodiek".

<u>Definitie</u>: Een functie f(x), continu voor alle x, wordt bijna-periodiek (b.p.) genoemd, indien voor elke $\varepsilon > 0$ een relatief-dichte verzameling van verschuivingsgetallen van f(x) bestaat, behorende bij $\varepsilon > 0$. M.a.w. voor elke $\varepsilon > 0$ bestaat een $L = L(\varepsilon)$, zodat in elk interval van de lengte L ten minste een getal $t=t(\varepsilon)$ ligt, waarvoor $|f(x+t)-f(x)| < \varepsilon$ voor alle x.

Alle continue periodieke functies zijn bijna-periodiek. De hoofdstelling van de theorie van bijna-periodieke functies nu luidt: De verzameling van alle bijna-periodieke functies is identiek met de klasse $H\{s(x)\}$.

Stelling A: Een bijna-periodieke functie is begrensd!

Stelling B: Een bijna-periodieke functie is gelijkmatig continu!

Stelling C: Stellen f(x) en g(x) bijna-periodieke functies voor, dan zijn eveneens $f(x) \pm g(x)$ en $f(x)\cdot g(x)$ bijna-periodiek. Hieruit volgt, dat elke eindige som $\sum_{n=1}^{N} a_n e^{i\lambda_n x}$ bijna-periodiek is.

Stelling D: Is $\{f_n(x)\}$ een rij van bijna-periodieke functies, die gelijkmatig (voor alle x) convergeert tot een functie f(x), dan is ook f(x) bijna-periodiek. Daaruit volgt, dat elke functie f(x) uit de klasse $H\{s(x)\}$ bijna-periodiek is. Dit is de ene helft van de hoofdstelling.

3). <u>De Fourier-reeks van een bijna-periodieke functie</u>.

Stelling E: Voor elke bijna-periodieke functie f(x) bestaat de "gemiddelde waarde"

$$\lim \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx = M\{f(x)\}$$

Is f(x) periodiek met periode p, dan is $M\{f(x)\} = \frac{1}{p}\int_0^p f(x)dx$, dus in overeenstemming met een vroegere afspraak.

Beschouw nu het stelsel $\{e^{i\lambda x}\}$, met λ reëel. Dit stelsel is in het interval $-\infty < x < \infty$ orthonormaal, in die zin, dat

$$M\{e^{i\lambda_1 x}\, e^{-i\lambda_2 x}\} = \begin{cases} 0 \text{ voor } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ 1 \text{ voor } \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}.$$

Stel nu, dat $f(x)$ een bijna-periodieke functie is, dan is voor elke reële λ ook $g(x) = f(x)\, e^{-i\lambda x}$ bijna-periodiek, dus bestaat $M\{f(x)\, e^{-i\lambda x}\} = a(\lambda)$, de zg. Fouriercoëfficienten van $f(x)$, behorende bij λ. Voor alle reële λ is dus een $a(\lambda)$ gedefinieerd. Nu geldt: $a(\lambda)$ is nul voor <u>alle</u> waarden van λ met uitzondering van een hoogstens aftelbare verzameling van getallen λ. Zijn nl. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ verschillende reële getallen en $a(\lambda_n)$ de (voor λ_n) bij $f(x)$ behorende Fouriercoëfficiënten, dan geldt

$$\sum_{n=1}^{N} |a(\lambda_n)|^2 \leq M\{|f(x)|^2\},$$

zodat voor elke positieve d hoogstens een eindig aantal λ-waarden bestaat, waarvoor $|a(\lambda)| > d$. Kies nu achtereenvolgens $d = 1, 1/2, 1/3, \ldots$ enz., dan krijgt men de verzameling van alle λ's, waarvoor $|a(\lambda)| > 0$, dus $a(\lambda) \neq 0$.

De λ's welke $\neq 0$, duiden we aan door $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n, \ldots$ en we noemen ze de Fourierexponenten van $f(x)$; de overeenkomende waarden $a(\Lambda_i) = a_i$ heten de Fouriercoëfficienten van $f(x)$. Bij $f(x)$ behoort dus een Fourier-reeks $\sum a_k\, e^{i\Lambda_k x}$.

Eenduidigheidsstelling: een bijna-periodieke functie is eenduidig door zijn Fourier-reeks bepaald, of: twee verschillende functies $f(x)$ en $g(x)$ bepalen steeds twee verschillende Fourier-reeksen. Men kan de stelling nog in een andere vorm uitspreken: er is geen bijna-periodieke functie $f(x)$ (die niet identiek nul is) met de eigenschap, dat $M\{f(x)\, e^{-i\lambda x}\} = 0$ voor elke λ. Het stelsel $\{e^{i\lambda x}\}$ in het interval $-\infty < x < +\infty$ is dus weer volledig in de klasse van de bijna-periodieke functies. Voor elke bijna-periodieke functie geldt weer de zg. <u>Gelijkheid van Parseval:</u>

$$\sum |a_n|^2 = M\{|f(x)|^2\},$$

wanneer $f(x) \sim \sum a_n\, e^{i\lambda_n x}$.

De eenduidigheidsstelling en de gelijkheid van Parseval zijn ook nu weer aequivalent.