STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1962 - 005

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

Prof.dr. W. Peremans

9 mei 1962

LINEAIRE AFHANKELIJKHEID

1962

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZUIVERE WISKUNDE

ZW 1962-005

Voordracht in de serie "Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

door

Prof.dr. W. Peremans

9 mei 1962

LINEAIRE AFHANKELIJKHEID

In de theorie van de vectorruimten speelt het begrip lineaire afhankelijkheid een belangrijke rol. Het wordt in twee vormen geformuleerd.

1°. Een vector a is lineair afhankelijk van een (eindige) verzameling A van vectoren; hiervoor voeren we de notatie $a < A$ in (ontkenning: $a \nless A$).

2°. Een (eindige) verzameling A van vectoren is lineair afhankelijk; hiervoor gebruiken we $< A$ (ontkenning: $\nless A$, A is lineair onafhankelijk).
Het tweede begrip is direct uit het eerste af te leiden als volgt:

$< A$ geldt dan en slechts dan als er een $a \in A$ bestaat, zo dat $a < A \setminus \{a\}$ geldt.

We bespreken een axiomatische opbouw voor deze begrippen. Voor het begrip 1° is deze te vinden in [1].

De letters, A,B,... duiden eindige deelverzamelingen en de letters a,b,... elementen aan van een vaste verzameling S. Het aantal elementen van A noemen we $|A|$. Er zij een relatie $a < A$ gedefinieerd; we definiëren $A < B$, als $a < B$ voor alle $a \in A$ geldt, en $A \diamond B$, als $A < B$ en $B < A$ geldt. We stellen de volgende axioma's op:

1. Uit $a \in A$ volgt $a < A$.
2. Uit $a < A$, $b \in A$ en $a \nless A \setminus \{b\}$ volgt $b < (A \setminus \{b\}) \cup \{a\}$.
3. Uit $a < A$ en $A < B$ volgt $a < B$.

Hieruit zijn de volgende stellingen af te leiden.

A. Als $a < A$ en $A \subset B$, dan $a < B$.

B. Als $< A$ en $A \subset B$, dan $< B$.

C. Als $< A$, $a \in A$ en $\not< A \setminus \{a\}$, dan $a < A \setminus \{a\}$.

D. Bij A bestaat een $B \subset A$, zodat $\not< B$ en $A < B$.

E. De relatie $\diamond$ is reflexief, symmetrisch en transitief.

F. (Uitwisselingsstelling). Als $\not< A$ en $A < B$, dan is er een $C \subset B$ met $|C| = |A|$, zo dat $A \cup (B \setminus C) \diamond B$ (i.h.b. geldt $|A| \leq |B|$).

Men heeft ook axiomastelsels opgesteld voor het begrip 2^{o} (zie [2]). Dit begrip is eenvoudiger, omdat het een eigenschap van één verzameling betreft in plaats van een relatie tussen een element en een verzameling (of tussen twee verzamelingen). Men kan dit geval ook beschrijven met een z.g. onafhankelijkheidsfunctie f : $f(A) = 0$ als $< A$, $f(A) = 1$ als $\not< A$.

$A, B, \ldots$ zijn weer eindige deelverzamelingen van een vaste verzameling S. Voor het begrip $< A$ stellen we de volgende axioma's op:

I. Uit $< A$ en $A \subset B$ volgt $< B$.

II. Uit $\not< A$, $\not< B$ en $|B| = |A| + 1$ volgt, dat er een $b \in B \setminus A$ bestaat, zo dat $\not< A \cup \{b\}$ geldt.

Uit de geldigheid van 1.,2. en 3. volgt de geldigheid van I. en II. We beperken ons nu verder tot het stelsel I., II. en noemen een verzameling met $<$, die aan I., II. voldoet een onafhankelijkheidsverzameling. Het volgende representatieprobleem kan nu gesteld worden.

Als S een eindige onafhankelijkheidsverzameling is, bestaat er dan een ééneénduidige afbeelding van S op een verzameling T van vectoren in een vectorruimte, zodat afhankelijke (resp. onafhankelijke) deelverzamelingen van S corresponderen met lineair afhankelijke (resp. onafhankelijke) verzamelingen van vectoren in de gebruikelijke zin?

Hierbij kunnen voor de scalaren van de vectorruimte nog verschillende veronderstellingen worden gemaakt; zoals voorgeschreven lichaam, willekeurig lichaam of delingsring.

In [5] is het negatieve antwoord op bovenstaande vraag in sterke zin gegeven: een voorbeeld van een onafhankelijkheidsverzameling die niet representeerbaar is in een vectorruimte over welke delingsring dan ook. In [6] staat een eenvoudiger voorbeeld, dat gebruik maakt van een vlakke, projectieve meetkunde, die niet aan het axioma van Desargues voldoet.

Na dit negatieve antwoord blijft de vraag naar extra-voorwaarden, die de representeerbaarheid waarborgen. Ook over de representeerbaarheid in vectorruimten over verschillende lichamen en de samenhang daartussen kunnen uitspraken worden gedaan. O.a. in [4] zijn hierover resultaten te vinden. We noemen enige voorbeelden.

Er is een betrekkelijk eenvoudige nodige en voldoende voorwaarde bekend voor representeerbaarheid in een vectorruimte over GF(2). Als een onafhankelijkheidsverzameling representeerbaar is in een vectorruimte over een lichaam K, dan ook over een eindige, algebraïsche uitbreiding van het priemlichaam van K en ook over GF(p) voor oneindig veel priemgetallen p.

Literatuur:

1. B.L. van der Waerden, Moderne Algebra, deel I.
2. H. Whitney, On the abstract properties of linear dependence, Amer.J.of math.57 (1935), 509-533.
3. R. Rado, A theorem on independence functions, Quart. J. math. (Oxford) 13 (1942), 83-89.
4. R. Rado, Note on independence functions, Proc.London math.soc. (3) 7 (1957), 300-320.
5. T. Lazarson, The representation problem for independence functions, J. London math.soc. 33 (1958), 21-25.
6. A.W. Ingleton, A note on independence functions and rank, J. London math.soc. 34 (1959), 49-56.