STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM
AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

ZW 1965-005

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

door

Prof.Dr. Ph. Dwinger

24 maart 1965

Toepassingen in de algebra en topologie van enige verzameling-theoretische resultaten

1.

In deze voordracht wordt een stelling uit de verzamelingenleer behandeld, die verscheidene interessante toepassingen heeft gevonden. De stelling is in verschillende vormen in de wiskunde "opgedoken" en daardoor ook enige malen door wiskundigen, onafhankelijk van elkaar bewezen (Fichtenholz en Kantorowitch (1934), Hausdorff (1936), Tarski (1939), Marczewski (1948), Mrowka (1959), Novak (1953)).

2.

Zij X een verzameling. De deelverzamelingen van X vormen een algebra onder de bekende verzameling-theoretische operaties, zoals:

$A \cup A = A$,

$A \cup \overline{A} = X$,

$A \cup (A \cap B) = A$,

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

$(A \cup B)^{-} = \overline{A} \cap \overline{B}$, enz. enz.

Voor het gemak zullen we van nu af schrijven voor $A \cup B$: $A + B$, en voor $A \cap B$: AB. Ook gebruiken we wel het symbool 0 i.p.v. $\emptyset$ en het symbool 1 i.p.v. X.

3. Onafhankelijke verzamelingen

Een intuïtieve definitie is de volgende:
Een verzameling $A_1, A_2, \dots, A_n$ van deelverzamelingen van X (X eindig) is onafhankelijk, indien er geen relatie tussen deze verzamelingen bestaat (behalve díe relaties, die uit de eigenschappen onder 2 vermeld, volgen). Noch 0, noch 1 kunnen tot zo'n verzameling behoren.

Voorbeelden:

$|X| = 1$. Gèèn onafhankelijke verzamelingen.

$|X| = 2$. Een onafhankelijke verzameling kan hoogstens één element bevatten.

$|X| = 3$, als $|X| = 2$.

$|X| = 4$. Er zijn onafhankelijke verzamelingen van hoogstens 2 elementen.

$|X| = 5,6,7$, als $|X| = 4$.

$|X| = 8$. Er zijn onafhankelijke verzamelingen van hoogstens 3 elementen.

4. Preciese definitie

Zij $A_1, A_2, \dots, A_n$ een verzameling deelverzamelingen van X (X eindig). Deze verzameling heet onafhankelijk, indien alle producten $\varepsilon A_{i_1} . \varepsilon A_{i_2} . \dots . \varepsilon A_{i_k} \neq 0$ zijn, waarbij $\varepsilon A_{i_j} = A_{i_j}$ of $\varepsilon A_{i_j} = \overline{A}_{i_j}$ en $i_j \neq i_m$ voor $j \neq m$.

5. Stelling 1

Zij $|X| = m$ (eindig), $m \geq 1$. Voor elk natuurlijk getal n, waarvoor $2^n \leq m$, bestaat een verzameling van n onafhankelijke deelverzamelingen van X.

Bewijs (schets).

(i) Zij $A_1, A_2, \ldots, A_n$ een onafhankelijke verzameling. Zij voor elke $i=1,2,\ldots,2^n$ $P_i = \mathcal{E}A_1 . \mathcal{E}A_2 . \ldots . \mathcal{E}A_n$, waarbij $\mathcal{E}A_i = A_i$ of $\mathcal{E}A_i = \overline{A}_i$. Dan is $P_i P_j = 0$ voor $i \neq j$ en elke $P_i \neq 0$. Dus $2^n \leq m$.

(ii) Zij $2^n \leq m$. De verzameling bestaande uit 2 elementen 0 en 1 wordt voorgesteld door 2. Zij C_n de "Cantor kubus", d.w.z. het Cartesische product van n verzamelingen 2. Dus $C_n = \{x : x_i = 0 \text{ of } 1\}$ $|C_n| = 2^n$. Zij $B_i = \{x : x_i = 1\}$, $i=1,2,\ldots,n$. De verzamelingen B_i zijn onafhankelijk. Zij f een functie van X op C_n. De verzameling $\{A_i : A_i = f^{-1}(B_i),\ i=1,2,\ldots,n\}$ is onafhankelijk en er zijn n elementen in.

6. Het geval, dat $|X|$ is oneindig

Zij $|X| = \alpha$, (α een oneindig cardinaalgetal). Een verzameling $\{A_i : i \in I\}$ van deelverzamelingen van X is onafhankelijk, indien alle producten:

$$\mathcal{E}A_{i_1} . \mathcal{E}A_{i_2} . \ldots . \mathcal{E}A_{i_n} \neq 0 \quad \text{zijn}, \ (i_j \neq i_k),$$

$$(\mathcal{E}A_{i_j} = A_{i_j} \text{ of } \mathcal{E}A_{i_j} = \overline{A}_{i_j}).$$

Het is duidelijk, dat een onafhankelijke verzameling hoogstens 2^α elementen kan bevatten. In tegenstelling tot het eindige geval, wordt dit aantal altijd bereikt (zie stelling 2).

7. Verzamelingen lichaam

Een verzameling F van deelverzamelingen van een verzameling X is een verzamelingen lichaam, indien F "gesloten" is onder alle verzamelingtheoretische operaties.

F is gereduceerd, indien voor elk tweetal punten x en y van X, er een $A \in F$ bestaat, zó dat $x \in A$, $y \in \overline{A}$.

Lemma 1.

Stel $|X| = 2^\alpha$ (α oneindig). Er bestaat een gereduceerd verzamelingen lichaam van deelverzamelingen van X, wiens cardinaalgetal α is.

Bewijs (schets).

Zij C_α het cartesische product van α verzamelingen 2. Dus $C_\alpha = \{x : x_i = 0 \text{ of } 1\}$, $(i \in I, |I| = \alpha)$. Zij voor elke $i \in I$, $A_i = \{x : x_i = 1\}$. Dan heeft het kleinste verzamelingen lichaam, dat alle A_i bevat een cardinaalgetal α en is gereduceerd, en $|C_\alpha| = 2^\alpha$.

Lemma 2.

Zij F een gereduceerd verzamelingen lichaam van deelverzamelingen van X. Zij $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_m$ verschillende punten van X. Dan bestaat er een $A \in F$, zodat $x_i \in A$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $y_j \notin A$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Bewijs.

Volgt gemakkelijk uit de definitie van gereduceerd zijn.

8. Stelling 2

Zij X een oneindige verzameling. $|X| = \alpha$.
Dan heeft X een onafhankelijke verzameling van deelverzamelingen wiens cardinaal getal 2^α is.

Bewijs (schets).

Zij C_{2^α} het cartesische product van 2^α verzamelingen 2. Dus $C_{2^\alpha} = \{x : x_i = 0 \text{ of } 1\}$, waarbij $i \in I$, $|I| = 2^\alpha$. Volgens lemma 1, bestaat er een gereduceerd lichaam F van deelverzamelingen van I, zodat $|F| = \alpha$. Zij voor elke A, $A \in F$, x^A het punt van C_{2^α}, bepaald door $x_i^A = 1 \Leftrightarrow i \in A$.
Zij $X = \{x^A : A \in F\}$. Dan is $|X| = \alpha$. Zij voor elke $i \in I$, $B_i = \{x : x_i = 1\}$ en $C_i = X \cap B_i$. Dan is de verzameling $\{C_i : i \in I\}$ onafhankelijk en heeft een cardinaalgetal α.

9. Toepassingen

1) C_{2^α} kan getopologiseerd worden, door aan elke verzameling 2 de discrete topologie te geven en aan C_{2^α} de product topologie.
Dan volgt uit stelling 2:
C_{2^α} (α oneindig) heeft een dichte deelverzameling, wiens cardinaalgetal α is.

2) De Boole'se algebra van alle deelverzamelingen van een verzameling van α punten (α oneindig) heeft een deelalgebra, die vrij is op 2^α voortbrengenden. (Zie literatuur).

3) Filters en ultrafilters.

Zij F een lichaam. Een filter $\mathcal{F}$ van F is een niet-lege deelverzameling van F die voldoet aan de eigenschappen:

(i) Indien $B \in \mathcal{F}$ en $C \in \mathcal{F}$, dan $BC \in \mathcal{F}$.

(ii) Indien $B \in \mathcal{F}$ en $C \supset B$, dan $C \in \mathcal{F}$.

Een ultrafilter is een filter dat eigenlijk is en maximaal.
Het is niet moeilijk in te zien, dat indien X een eindige verzameling is, $|X| = m$, dan heeft X (bedoeld wordt: het lichaam van alle deelverzamelingen van X) precies m ultrafilters.
In het geval X oneindig is, is de situatie verschillend.

Stelling 3.

Zij X een oneindige verzameling $|X| = \alpha$. Dan heeft X, 2^{2^α} ultrafilters.

Het bewijs volgt uit stelling 2, met gebruikmaking van de eigenschappen van filters en ultrafilters.

4.

Uit stelling 3 volgt nog de bekende stelling, dat de Stone-Čech compactificatie van een discrete ruimte X, ($|X| = \alpha$, α oneindig) 2^{2^α} punten heeft.