STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

ZW 1967-005

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

door

Prof. dr. H. de Vries

25 oktober 1967

Wiskundige begrippen en hun notatie

Het oudste wiskundige begrip is wel het begrip "getal"; hiermee bedoelen we dan wat ieder kind er onder verstaat, namelijk "natuurlijk getal". Vraagt men een wiskundige om een uitleg van dit begrip, dus laten we zeggen om een definitie, dan zijn er twee soorten antwoorden te verwachten. In het ene geval zal het antwoord beginnen met de verklaring dat het begrip een grondbegrip, dus (in een bepaalde zin) niet gedefinieerd wordt. In het andere geval komt er een definitie in termen van andere wiskundige termen, bijv. in termen van de (een of andere) verzamelingsleer. Zo'n definitie kan er bijv. als volgt uit zien (we definiëren ook meteen het getal nul). De lege verzameling is het getal nul ($0 = \emptyset$); als x een getal is, dan zal ook $\{ x \}$ een getal zijn. De opvolgerbetrekking wordt dan natuurlijk gedefiniëerd door te zeggen dat $\{ x \}$ de opvolger van x is. Deze definitie is ongebruikelijk. Een gebruikelijke definitie (zie bijv. [7], appendix) komt intuïtief neer op: $0 = \emptyset,\ 1 = \{\emptyset\},\ 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\},$

$$3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\}, \ldots\ldots$$

Na zo'n definitie voelt men zich dan verplicht de zgn. "axioma's" van Peano te verifiëren.

Ingeval men het begrip getal als grondbegrip neemt dan zal men de axioma's van Peano geldig verklaren, door welke axioma's dan het begrip in zekere zin impliciet gedefiniëerd wordt. Ook in dit geval zal men nog behoefte voelen aan een soort "definitie", die als het ware uiteen zet wat voor voorstelling men van het begrip dient te hebben, zonder dat deze echter naar de inhoud enige wiskundige betekenis heeft. Zo bijv.: het getal twee is datgene wat we voor gemeenschappelijks zien aan stellen van twee appels, twee paarden, twee mensen, twee stenen, enz. Volgens geschiedkundigen dienen ook bijv. de "definities" in de Elementen van Euklides van bijv. punt en getal ongeveer zo opgevat te worden, als wat men noemt nominale definities (zie bijv. [3], [4]).

Een definitie in termen van de verzamelingsleer is te verkiezen boven de aanname als grondbegrip als we ons even realizeren dat in de wiskunde de verzamelingsleer tot een algemeen goed is geworden, zo'n definitie blijkbaar mogelijk is en het aantal grondbegrippen klein gehouden dient te worden. Uit het bovenstaande zou dan echter blijken dat er verschillende stelsels natuurlijke getallen zijn (hoewel wel onderling isomorf). Dit rijmt niet met onze intuïtieve voorstelling van het stelsel der natuurlijke getallen. Verder lijkt 't me dat intuïtief een natuurlijk getal geen inwendige structuur heeft, zoals we die bijv. in de beschouwde definities aantreffen. Zo komt 't me voor dat geen wiskundige er in zijn beschouwingen en notaties rekening mee houdt, of zou willen houden, dat de lege verzameling en het getal nul identieke dingen zouden zijn, of dat $3 = \{0, 1, 2\}$ (hoewel dit laatste, gevolg van de definitie van natuurlijke getallen als bijzondere ordenialgetallen, in de verzamelingsleer wel weer nuttig is).

Een uitweg lijkt de definitie van natuurlijk getal (en 0) in de geest van Bourbaki [2]. Hierbij wordt gebruik gemaakt van een verzamelingsleer waarin steeds van alle verzamelingen met een bepaalde

8

MCPM 67 ZW—5

VRIES H de

Wiskundige begrippen en hun notatie.

Amsterdam, Mathematisch Centrum, 1967
A4 9 p ~~stencil~~ offset bibl

—Voordracht
Elementaire onderwerpen v. hoger standpunt belicht

INSCHRIJVING no 674.801

aangevraagd door :

naar aanl. van :

(paraaf ass.) dd

KLASSIFICATIE

aan Afd./MW : ZW / Wattel

klass./codering : H_5

spec. aandacht v. :

(paraaf MW) dd 21-3-'68

UITVOERING ZW

AUK	TWK	SYK	CTC		DIV	TOT

flexowriter :

(paraaf typiste) dd

AANTEKENINGEN

B 07/65

eigenschap er één (niet nader aan te duiden overigens) a.h.w. model staat ofwel uitverkoren is. Dan kan men het getal twee definiëren als de modelverzameling van twee elementen, wat ook goed aansluit bij de gegeven intuïtieve voorstelling. Dit betekent echter maar een verschuiving van het genoemde bezwaar van de slechte aansluiting bij de intuïtie, namelijk naar de verzamelingsleer zelf. Dit uitverkiezingsbegrip is in het geheel niet intuïtief gefundeerd; deze uitverkiezing (of het keuze-axioma) is dan ook voor vele wiskundigen een teer punt en wordt door hun zo veel mogelijk buiten beschouwing gelaten.

In de wiskundige praktijk blijkt, dat iedereen slechts díe eigenschappen der natuurlijke getallen gebruikt die uit de "axioma's" van Peano kunnen worden afgeleid, zonder er zich veel om te bekommeren wat dit precies inhoudt. Door het opzettelijk "vergeten" van wat voor definitie dan ook worden de bezwaren van de definities uit de weg geruimd.

Bij de verdere ontwikkeling van het getalbegrip door middel van definities is het opportuun om eerdere definities te laten vervallen. Zo bijv. bij de definitie van de rationale getallen door middel van bepaalde equivalentieklassen van zekere paren gehele getallen; hier vindt men het systeem der gehele getallen isomorf terug in dat der rationale getallen en dan vergeet men liever het oude systeem. Dit lijkt me de beste oplossing om te zorgen dat ieder geheel getal ook een rationaal getal is en om de moeilijkheden te vermijden bij de "identificatie" van het oude systeem der gehele getallen met het nieuwe er mee isomorfe. Vervolgens zal men ook weer de eigenlijke definitie der rationale getallen graag vergeten en in 't vervolg alleen enkele kenmerkende eigenschappen ervan gebruiken (die niets te maken hebben met de definitie).

Analoog bij de definitie der reële getallen uit de rationale getallen, d.m.v. de sneden van Dedekind (aansluitend bij de oudste methode, afkomstig van Eudoxos, zie bijv. [4, 10]), intervalschakelingen of cauchyrijen. Hierbij verdient de rechtstreekse constructie der reële getallen in [9] uitgaande van de gehele getallen meer bekendheid.

Een fundamentele rol speelt het begrip (geordend) paar in de wiskunde. Het (geordende) paar gevormd door x en y, zeg genoteerd als (x, y), moet iets zijn met de volgende "kenmerkende" eigenschap:

$$(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow x = u \text{ en } y = v.$$

Het is niet bijzonder moeilijk hier iets voor te verzinnen, bijv. $(x, y) = \{\{ x \}, \{ x, y \}\}$. (zie bijv. [7], appendix). Men kan weer een gebrek aan natuurlijkheid opmerken, zoals bij de eerdere definities. In de bourbakistische verzamelingsleer wordt dit ondervangen door het begrip in de verzamelingsleer als grondbegrip op te nemen [1].

Bij het begrip paar treedt nog een essentiële moeilijkheid op die door de wiskundigen verdoezeld (of niet onderkend) wordt. Deze is als volgt.

Nadat men het begrip paar heeft, wordt het begrip functie ingevoerd als een bijzonder soort verzameling paren. En dan wil men een paar zien als een bijzonder soort"tal", n.l. als een tweetal, waarbij dan een tal (ofwel een al of niet eindige rij) een functie is waarvan het definitiegebied een beginstuk is van de verzameling der natuurlijke getallen. Dit nu is onmogelijk, hoe men het begrip paar ook neemt: er zou bijv. gelden $(1, 1) = \{ (1, 1), \{ 2, 1 \}\}$, en we zouden een verzameling hebben die element is van zichzelf, wat niet toegestaan is. Strikt genomen zijn de begrippen paar en tweetal (als boven gedefinieerd) dus noodzakelijk verschillend en zouden er ook verschillende notaties voor gebruikt moeten worden, tenminste bij de zojuist genoemde definitie van functie.

Als fundamentele eigenschap van een functie van een verzameling A naar een verzameling B kan men stellen, dat deze bij ieder element van A één element van B aanwijst, welk aangewezen element a priori willekeurig is en niet afhangt van de bij andere elementen van A aangewezen elementen van B. Voor de keuze van een definitie van het begrip functie bestaan er natuurlijk weer vele mogelijkheden. De bovengenoemde definitie wordt algemeen gebruikt en doet wel natuurlijk aan, ook al omdat zo een functie een bijzonder geval van een relatie is (maar vgl. [5]). Niettemin heeft het zin aan een axiomatiek te denken waarin het begrip functie een grondbegrip is. De gewenstheid van zo 'n axiomatiek wordt ook duidelijk gesuggereerd door de theorie der categorieën. Ik ben niet op de hoogte van de resultaten van het onderzoek in deze richting; in ieder geval is een dergelijk standpunt nog weinig doorgedrongen.

De bezwaren van onnatuurlijkheid of 't niet aansluiten bij de intuïtie bij definities voor "getal", "paar", "functie", enz., schijnen hoofdzakelijk te ontspruiten uit het feit dat we deze dingen als iets eenduidig bepaalds ervaren. Deze ervaring blijkt echter in de tijd niet constant te zijn, en lijkt me bijv. niet meer van toepassing op het begrip euklidische ruimte (zie bijv. [6]). Zo blijkt ook wel eens de behoefte bij de beschouwing van een of ander vast lichaam met karakteristiek 0 over diens kleinste deellichaam te spreken als over het lichaam der rationale getallen.

Dat we algemeen geen rekening (willen) houden met de inwendige verzamelingstheoretische structuur, of algemener met verzamelingstheoretische "coïncidenties", zij nog geïllustreerd door het volgende voorbeeld. Zoals gebruikelijk definiëren we het product $A \circ B$ van deelverzamelingen A, B van de verzameling der natuurlijke getallen met 0 erbij als

$$A \circ B = \{ x \mid \exists\, a \in A,\ b \in B \text{ met } x = a \circ b \} .$$

Dan krijgen we echter, met $A = \{ 0 \}$ en $B = \{ 0, 1, 2 \}$

enerzijds $A \circ B = 1 \circ 3 = 3$,

anderzijds $A \circ B = \{ 0 \circ 0, 0 \circ 1, 0 \circ 2 \} = \{ 0 \} = 1$.

Misschien is dit een reden om bij bepaalde definities zekere bijkomende eisen te stellen die deze schijnbare tegenspraken voorkomen.

Laten we nu enkele notaties beschouwen.

Voor "A deelverzameling van B" opvolgend "A echte deelverzameling van B" komt men tegen $A \subseteq B$ opv. $A \subset B$, maar ook (en vaker) $A \subset B$ opv. $A \subset B$, $A \neq B$. De eerste notatie verdient dunkt mij de voorkeur, vanwege diens beknoptheid, de aansluiting bij de notatie $\leq$ opv. $<$, en de betere aansluiting bij de intuïtieve voorstelling. 't Lijkt verder zinvol $A \subseteq B$ te lezen als A is gevat in B ter onderscheiding van $b \in B$ (b is bevat in B).

Bij een partieel geordende verzameling (een geordende verzameling in de boubakistische woordenkeus) met $\leq$ als partiële ordening, betekent $a < b$ algemeen: $a \leq b$ en $a \neq b$; 't lijkt me duidelijk dat $a < b$ gelezen moet worden als "a is kleiner dan b" (en niet $a \leq b$ als "a is kleiner dan b", zoals Bourbaki [2] doet; immers, 't ware al te dwaas te zeggen dat 1 kleiner is dan 1).

Voor het complement van B in A komt men tegen $A \setminus B$ en ook $A - B$; gezien 't feit dat voor alle andere belangrijke verzamelingstheoretische bewerkingen de rekenkundige aanduidingen vervangen zijn, lijkt 't me juist dit ook voor het complement te doen; dus $A \setminus B$ i.p.v. $A - B$.

Voor de algemene vereniging (en analoog de doorsnede) bestaan er de volgende twee verschillende conventies: het begrip wordt toegepast

1°. op een familie (ofwel geïndiceerd stelsel) van verzamelingen, zeg $(V_i)_{i \in I}$:

$$\bigcup_{i \in I} V_i = \{ x \mid \exists i \in I \text{ met } x \in V_i \};$$

2°. op een verzameling S van verzamelingen:

$$\bigcup S = \{ x \mid \exists V \in S \text{ met } x \in V \},$$

waarbij daarnaast voor een familie $(V_i)_{i \in I}$ als daarnet

$$\bigcup_{i \in I} V_i = \bigcup \operatorname{im} V$$

(waarbij als gebruikelijk met V de functie bedoeld wordt die aan i (in I) V_i toevoegt en met im V 't beeld van V. 't Schijnt dat 1° vaker voorkomt; maar de eerste onder 2° voorkomende vereniging moet in de notatie van 1° ingewikkelder als $\bigcup_{V \in S} V$ genoteerd worden. Gezien het feit dat de vereniging als onder 1° alleen van im V afhangt komt mij de interpretatie als onder 2° gewenster voor. Bij het begrip som bijvoorbeeld, zeg in een abelse groep, geldt de hiermee analoge uitspraak niet zodat dan wèl als onder 1° slechts het begrip som van een familie zinvol kan zijn (bij het begrip product, zeg in een niet-commutatieve groep moet 't weer anders).

Bij functies en afbeeldingen bestaan er meerdere variaties voor termen en notaties. Voor sommige doeleinden is het gewenst in het begrip functie meer informatie te stoppen, n.l. de verzameling waarnaar de functie de functie afbeeldt. Men zou (in navolging van Bourbaki) bijv. voor het kale functiebegrip het woord "functie" kunnen handhaven en voor het uitgebreidere begrip het woord "afbeelding" kunnen gebruiken. (In het hedendaagse spraakgebruik bestaat er een ander, overigens onmathematisch, verschil in het gebruik van beide termen, welk verschil lijkt me niet erg nuttig is).

Ik zou willen spreken van een afbeelding f van A naar B (i.p.v. van A in B); als nu elk element van B als beeld optreedt, dan is f een afbeelding van A op B, ofwel f is een surjectie van A naar (of "op") B. Als $x \in A$, dan kan men het beeld van x onder f op vele manieren genoteerd vinden, bijv.: $f(x)$, fx, f_x (zoals bij de bespreking van het begrip vereniging), x^f (als f bijv. de kwadratering is), $\frac{f}{x}$ (als f bijv. de complexe conjugatie is), x_f (als f bijv. de projectie op een coördinaatas is), $(x)f$, xf. Ieder van deze notaties is wel eens handig. Wel is 't uit de notatie alleen niet op te maken wat 't argument is en wat de functie.

Als f een afbeelding van A naar B, en g een afbeelding van B naar C, dan wordt de samenstelling van f en g aangeduid als $g \circ g$, gf, $f \circ g$ of fg. In tegenstelling met de variaties van zoëven, geven deze mogelijkheden aanleiding tot verwarring (bijv. als $A = B = C$), beter gezegd, men moet duidelijk afspreken wat bedoeld wordt. Iemand die $f \circ g$ of fg schrijft zal ook vaak (ofschoon helemaal niet noodzakelijk) $(x)f$ (of xf) schrijven. De notaties $f \circ g$ en fg hebben het voordeel dat de in overeenstemming zijn met onze leesrichting van links naar rechts, terwijl $g \circ f$ en gf beter passen bij de overgeleverde argumentnotatie. In incidentele gevallen kan de keus tussen "$f(x)$" en "$(x)f$" bepaald worden door de overweging dat "$f(x)$" suggereert dat men pas na de keus van de functie een argument kiest, en bij $(x)f$ juist andersom.

Een van de dingen die bij de functienotatie al velen aanstoot gegeven zal hebben, is het ontbreken van een algemeen gebruikelijke eenvoudige notatie voor de eenvoudigste functie, n.l. de functie die aan elk element van een verzameling A zichzelf toevoegt (een wel gebruikte notatie is id_A). Deze dient nu aangegeven te worden door $A \ni x \mapsto x$, of, in de door Freudenthal gesuggereerde notatie, $\Upsilon_{x \in A}\, x$. Hadden we zo 'n notatie, bijv. I_A (of als de verzameling A vast is), zeg voor A = R, de verzameling der reële getallen, dan heeft men bijv.

$$aI^2 + bI + C \quad \text{i.p.v.} \quad \Upsilon_{x \in R}\, ax^2 + bx + c.$$

Natuurlijk zijn er dan nog wel enkele afspraken ingevoerd, bijv. $I^2 = \Upsilon_{x \in R}\, x^2$; in dit geval verdient 't dan aanbeveling $f \circ g$ en fg te bewaren voor de functie $\Upsilon_{x \in R}\, f(x)\, g(x)$, en niet te gebruiken voor de samenstelling.

Een begrip als groep definieert men vaak als een paar $(G, \circ)$, waarbij $\circ$, de groepsvermenigvuldiging, een afbeelding $G \times G \to G$ is met bepaalde eigenschappen. Hierbij is echter de hele zaak al door de groepsvermenigvuldiging vastgelegd. 't Lijkt me daarom handiger een groepsvermenigvuldiging te definiëren, en dan het woord "groep" op informele manier gebruiken als het beeld van de groepsvermenigvuldiging (Bij de eerste definitie doet men dit in de praktijk in feite ook).

Voor begrippen als inwendig direct product, uitwendig direct product, categoraal product is het gewenst uniforme handige notaties te hebben bijv. voor groepen: $G \odot H$, $G \otimes H$, $G \,\Pi\, H$.

In een tralie gebruikt men meestal de aanduidingen $a \wedge b$ en $a \vee b$ voor opvolgend het infimum en het supremum van $\{ a, b \}$, waarbij de tekens $\wedge$ en $\vee$ aan de wiskundige logika ontleend zijn. De logici gaan desondanks door met deze symbolen te gebruiken. Dit kan tot verwarring aanleiding geven, nu de logika ook in de wiskunde meer gebruikt gaat worden (zie bijv. [8]).

Bibliografie:

[1]	N. Bourbaki	Théorie des Ensembles Ch. I, II, Herman 1954.
[2]	Idem	Idem, Ch. III, Hermann 1956.
[3]	Idem	Eléments d'histoire des mathématiques, Hermann 1960.
[4]	F.J. Dijksterhuis	De Elementen van Euclides, I, II, P. Noordhoff 1929.
[5]	H. Freudenthal	Functies en functie-notaties, Euclides 41, 144-151.
[6]	A. Heyting	Axiomatic Projective Geometry, P. Noordhoff 1963.
[7]	J.L. Kelley	General Topology, Van Nostrand 1955.
[8]	G. Kreisel & J.L. Krivine	Eléments de Logique Mathematique, Dunod 1967.
[9]	W.V.O. Quine	Set Theory and Its Logic, Harvard Un.Pr. 1963.
[10]	D.J. Struik	A Concise History of Mathematics, G. Bell & Sons 1962.

7290 NL