STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW-006

Over stellingen van Wolstenholme en Leudesdorf

H.J.A. Duparc, C.G. Lekkerkerker,
W. Peremans

1955

Over stellingen van Wolstenholme en Leudesdorf
door
H.J.A.Duparc, C.G.Lekkerkerker, W.Peremans.

Verscheidene auteurs (met name Leudesdorf) hebben artikelen gepubliceerd over generalisaties van de volgende stelling van Wolstenholme:

$$\sum_{a=1}^{p-1} \frac{1}{a} \equiv 0 \pmod{p^2}$$

voor priemgetallen $p \geq 5$. In dit rapport geven wij stellingen, die de resultaten van zes artikelen over dit onderwerp omvatten. Voor bewijzen zij de lezer verwezen naar een artikel dat zal verschijnen in de Proceedings van de Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen.

In het volgende zeggen we dat een rationaal getal u deelbaar is door een natuurlijk getal m als er gehele getallen r en s bestaan zodat $u = \frac{r}{s}$, $(s,m) = 1$ en $m \mid r$.

Bedoelde stellingen luiden als volgt.

Stelling 1. Als p een priemgetal is, als s een geheel getal is en als n een natuurlijk getal is, dan is

$$T_s(p^n) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,p)=1}}^{p^n} a^{-s}$$

deelbaar door p^k; hierin is $k = k(n)$ op de volgende wijze bepaald:

I. als $2 \nmid s$, $p \neq 2$, $p-1 \mid s+1$, $p \nmid s$, dan $k = 2n-1$;
II. als $2 \nmid s$, $p-1 \nmid s+1$ of $p \mid s$, dan $k = 2n$;
III. als $2 \nmid s$, $p = 2$, dan $k = 2n-2$;
IV. als $2 \mid s$, $p-1 \mid s$, dan $k = n-1$;
V. als $2 \mid s$, $p-1 \nmid s$, dan $k = n$.

In de gevallen I, III en IV geldt bovendien $p^{k+1} \nmid T_s(p^n)$. Als verder in de gevallen II en V voor een of ander natuurlijk getal m de relatie $p^{k(m)+1} \nmid T_s(p^m)$ geldt, dan geldt $p^{k(n)+1} \nmid T_s(p^n)$ voor alle natuurlijke n.

Stelling 2. a) Als M een natuurlijk getal is, als p een priemgetal en n een natuurlijk getal is dusdanig dat $p^n \mid M$ en $p^{n+1} \nmid M$, als verder s een geheel getal is en als k de in stelling 1 ingevoerde exponent is, dan geldt

$$p^k \mid T_s(M) = \sum_{\substack{a=1\\(a,M)=1}}^{M} a^{-s} .$$

b). Als bovendien in de gevallen I, III of IV van stelling 1 geldt $p \nmid \varphi(Mp^{-n})$ (d.w.z. als voor iedere priemfactor q van Mp^{-n} geldt $p \nmid q-1$), dan geldt $p^{k+1} \nmid T_s(M)$.

c). Als daarentegen in de gevallen I, III of IV van stelling 1 geldt $p \mid \varphi(Mp^{-n})$, dan geldt $p^{k+1} \mid T_s(M)$.

De resultaten der in de aanhef bedoelde auteurs kunnen als volgt geformuleerd worden.

J.Wolstenholme, On certain properties of prime numbers, Quart. J. of Math. 5 (1862), 35-39 bewees voor $p > 3$, dat $p^2 \mid T_1(p)$.

C.Leudesdorf, Some results in the elementary theory of numbers, Proc.London Math.Soc. (1)20 (1889), 199-212 bewees de volgende twee resultaten:

Stel s oneven, $M = p^n m$ en $p \nmid m$.

Als $p > 2$, $p \mid s$ of $p-1 \nmid s+1$, dan $p^{2n} \mid T_s(M)$.

Als $p = 2$ en $m \neq 1$, dan $p^{2n-1} \mid T_s(M)$.

S.D.Chowla, A generalization of a theorem of Wolstenholme, J.London Math.Soc. 5 (1930), 158-160, bewees de volgende twee resultaten:

Als $p > 3$, dan $p^{2n} \mid T_1(p^n)$.

Als $p = 3$, dan $p^{2n-1} \mid T_1(p^n)$.

G.H.Hardy en E.M.Wright, Leudesdorf's extension of Wolstenholme's theorem, J.London Math.Soc. 9 (1934), 38-41, bewezen de volgende vijf resultaten:

Als $2 \nmid M$, $3 \nmid M$, dan $M^2 \mid T_1(M)$.

Als $2 \nmid M$, $3 \mid M$, dan $\frac{1}{3} M^2 \mid T_1(M)$.

Als $2 \mid M$, $3 \nmid M$ en M geen macht van 2, dan $\frac{1}{2}M^2 \mid T_1(M)$.

Als $2 \mid M$, $3 \mid M$, dan $\frac{1}{6} M^2 \mid T_1(M)$.

Als M een macht van 2 is, dan $\frac{1}{4} M^2 \mid T_1(M)$.

S.D.Chowla, Leudesdorf's generalization of Wolstenholme's theorem, J.London Math.Soc. 9 (1934),246, bewees:

Als $2 \nmid M$, $3 \nmid M$, dan $M^2 \mid T_1(M)$.

N.Rama Rao, An extension of Leudesdorf's theorem, J.London Math.Soc. 12 (1937), 247-250, bewees de volgende twee resultaten:

Laat s oneven zijn. Stel dat voor ieder priemgetal p, waarvoor geldt $p-1 \mid s+1$, ook geldt $p \nmid M/(M,s)$. Dan geldt $M^2 \mid T_s(M)$. Stel dat voor ieder priemgetal p, waarvoor geldt $p-1 \mid s$, ook geldt $p \nmid M$. Dan geldt $M \mid T_s(M)$.

Men kan gemakkelijk laten zien dat genoemde resultaten bevat zijn in de stellingen 1 en 2.