MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM-O.

ZW 1957-006

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen van hoger standpunt belicht"
door
Prof.Dr N.H.Kuiper

28 maart 1957

De stelling van Desargues

Een projektief vlak is een verzameling V van elementen, genaamd punten (P,Q,..), en een verzameling v van deelverzamelingen van V, genaamd lijnen (p,q,..), waarvoor geldt:

P_1 Door twee punten hoe ook verschillend gekozen gaat één lijn.

P_2 Twee lijnen hoe ook verschillend gekozen hebben één punt gemeen.

P_3 Er zijn vier punten waarvan geen drie op een rechte lijn liggen.

Analoog kan men een meerdimensionale projektieve ruimte definiëren.

Voorbeelden:

a. V bestaat uit de punten en richtingen in een gewoon (euklidisch) vlak. v bestaat uit de gewone lijnen elk uitgebreid met zijn richting èn de verzameling van alle richtingen. (Een richting is een kompleet stel onderling evenwijdige gewone lijnen).

b. V bestaat uit de lijnen door een vast punt O in de gewone driedimensionale ruimte. v bestaat uit de vlakken door O.

c. V(v) bestaat uit de ééndimensionale (tweedimensionale), (rechts-) deelruimten van een driedimensionale vektorruimte over een willekeurig scheef lichaam L. $\{$ vektor (x_1,x_2,x_3); ééndimensionale ruimte $(x_1\rho, x_2\rho, x_3\rho)$ (ρ variabel in L)$\}$.

De bewering van Desargues luidt: Indien de overeenkomstige zijden van twee driehoeken elkaar snijden in drie kollineaire punten, dan zijn de verbindingslijnen van overeenkomstige hoekpunten concurrent, en omgekeerd.

De bewering van Desargues geldt niet bij de algemene boven gegeven definitie van een projektief vlak. Hij geldt wèl voor de genoemde voorbeelden en heet dan de stelling van Desargues.

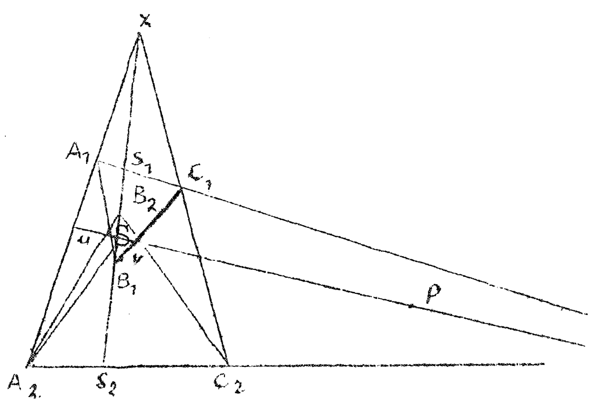
Bewijzen:

1. Een bekend analytisch bewijs ontstaat door herhaaldelijk gebruik te maken van de eigenschap dat drie lijnen dan en slechts dan concurrent zijn indien zij de nulniveaux zijn van (links-) lineair afhankelijke (links-) lineaire homogene functies in de koordinaten. Dit bewijs geldt voor geval c.

2. De figuur van Desargues kan worden opgevat als centrale projektie van twee driehoeken in een vlak met evenwijdige zijden, die dan een gelijkvormigheidspunt hebben. Dit geeft een bewijs dat geldt voor a, b en c.

3. De figuur van Desargues kan worden opgevat als de projektie van de snijlijnen van vijf vlakken in een driedimensionale ruimte. Dit geeft een bewijs dat geldt indien het gegeven vlak ingebed kan worden in een projektieve driedimensionale ruimte (zoals dat het geval is bij a, b en c).

4. Een elegant bewijs dat geldt voor geval c berust op de invariantie van de dubbelverhouding bij projekties (zie fig.)



Voor een willekeurig punt P op UV geldt bij de volgende projekties, na elkaar uitgevoerd, dat het beeld weer P is.

Daaruit kan men concluderen dat de lijnen A_1C_1, A_2C_2 en UV concurrent zijn. De bedoelde projekties zijn bepaald door de werking:

$$(U\ S\ V) \rightarrow (A_1S_1C_1) \rightarrow (A_2S_2C_2) \rightarrow (U\ S\ V)$$

De stelling van Desargues neemt om de volgende reden een belangrijke plaats in:

Stelling: De volgende eigenschappen betreffende een projektief vlak (P_{123}) zijn gelijkwaardig:

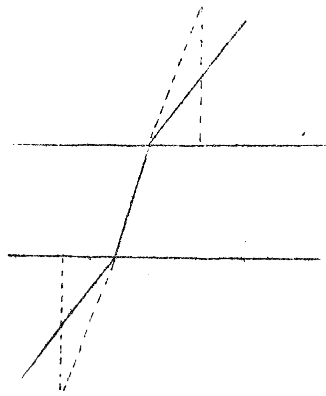
1. De bewering (stelling) van Desargues geldt.
2. Men kan koördinaten invoeren zó dat het vlak een koördinatenvlak is zoals onder c genoemd.
3. Zijn ABCDA'B'C'D' punten zó dat geen drie onder ABCD en geen drie onder A'B'C'D' kollineair zijn, dan bestaat een kollineaire afbeelding t met tA=A', tB=B', tC=C', tD=D'.

Er bestaat dus een grote groep kollineariteiten.

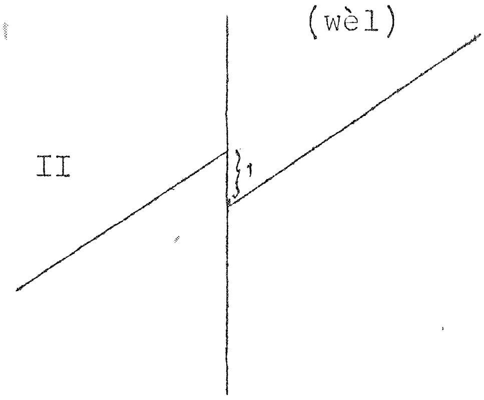
Als onderdeel van deze stelling wordt in de voordracht gedemonstreerd hoe men kollineaire afbeeldingen (translaties, meetkundige vermenigvuldigingen) kan construeren, indien de stelling van Desargues geldt.

Voorbeelden van vlakken waarvoor de bewering van Desargues wel en niet geldt.

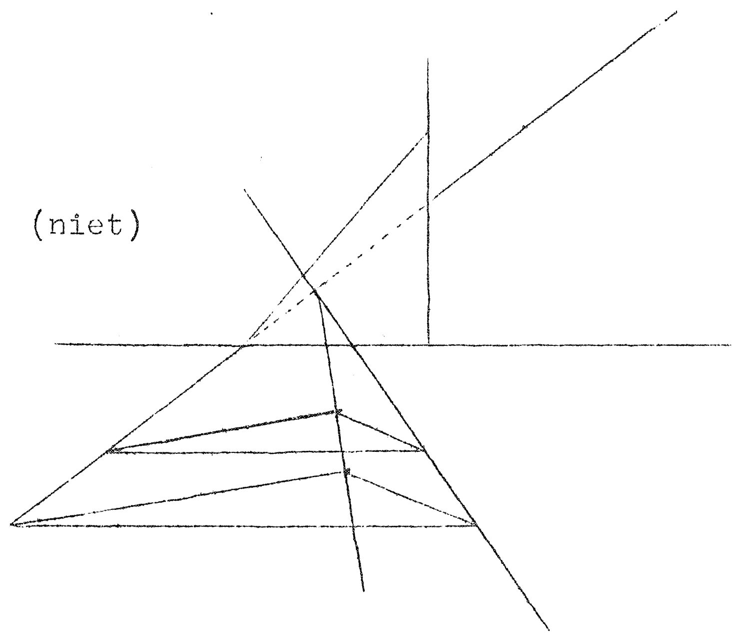
I (wèl)



II (wèl)



III (niet)



IV Een reëel analytisch niet-Desargues vlak is het volgende (zie [3]).

De "lijnen" zijn de deelverzamelingenpunten van een reëel projektief vlak, met de vergelijkingen

$$x = p + y \operatorname{cotg} \varphi + \frac{\rho\, y^2 \sin 2\varphi}{1+y^2} \qquad \rho = 0{,}01$$

of $x = p$, of $y = p$, alsmede de oneigenlijke lijn.

Litteratuur:

[1] H. Freudenthal: Proc. Int. Congress 1954,III, p.178-184.

[2] G. Pickert: Projektive Ebenen 1956.

[3] N.H. Kuiper: Nieuw Archief 1957.

[4] B. Segre: Math.Congres Bucarest 1956.