STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1961-006

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

Prof.dr. G.H.A. Grosheide F. Wzn.

26 april 1961

DE PROJECTIEVE NORMAAL

1961

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1961-006

Voordracht in de serie "Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

door

Prof.dr. G.H.A. Grosheide F.Wzn.

26 april 1961

DE PROJECTIEVE NORMAAL

De normaal van een oppervlak in de elementaire meetkunde bezit eigenschappen, die in staat stellen projectieve generalisaties van het begrip te definiëren.

In een drie-dimensionale projectieve ruimte met coördinaten (x^0, x^1, x^2, x^3) worden op het oppervlak

$$x^k(u,v) \qquad (k=0,1,2,3)$$

de asymptotische krommen bepaald door de differentiaalvergelijking

$$(\partial_u\partial_u x\ \partial_u x\ \partial_v x\ x)du^2 + 2(\partial_u\partial_v x\ \partial_u x\ \partial_v x\ x)du\,dv + (\partial_v\partial_v x\ \partial_u x\ \partial_v x\ x)dv^2=0$$

Zijn de asymptotische krommen - zoals wordt aangenomen - reëel, dan voldoen de functies $x^k(u,v)$ aan differentiaalvergelijkingen

$$\partial_u\partial_u x = \alpha\,\partial_u x + \beta\,\partial_v x + px$$
$$\partial_v\partial_v x = \gamma\,\partial_u x + \delta\,\partial_v x + qx\ .$$

Voor

$$e^{2\vartheta} = |(\partial_u\partial_v x\ \partial_u x\ \partial_v x\ x)|$$

volgt dan uit de integrabiliteitsvoorwaarde o.m.

$$\alpha = \partial_u\vartheta, \qquad \delta = \partial_v\vartheta.$$

Wij onderstellen verder $\beta\gamma \neq 0$, d.w.z. dat wij geen regelvlak hebben. Een rechte door x^k, die niet in het raakvlak aan het oppervlak ligt, is dan te beschouwen als verbindingsrechte van x^k met het punt

$$y^k = \partial_u\,\partial_v x^k - a\,\partial_u x^k - b\,\partial_v x^k\ .$$

De hierin optredende coefficienten $a(u,v)$ en $b(u,v)$ zijn invariant voor coördinatentransformaties, doch niet voor

normeringswijzigingen $\overline{x}=\rho\, x$ (1)

en

parametertransformaties $u' = u'(u)$, $v' = v'(v)$. (2)

$I_a = 2a - \partial_v(\vartheta - \log \beta\gamma)$ is absoluut invariant voor (1)
relatief invariant voor (2) met gewichten (0,1)

$I_b = 2b - \partial_u(\vartheta - \log \beta\gamma)$ is absoluut invariant voor (1)
relatief invariant voor (1) met gewichten (1,0).

Een invariante normalencongruentie wordt op eenvoudige wijze verkregen voor

$$I_a = c_1\, \partial_v \log \beta^2\gamma\,; \qquad I_b = c_2\, \partial_u \log \beta\gamma^2.$$

Voor

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0$$

heeft men de "<u>normaal van Fubini</u>" of "<u>projectieve normaal</u>";

De ontwikkelbare regelvlakken der congruentie bepalen dan op het oppervlak $x^k(u,v)$ een geconjugeerd net.

Na overgang op de euclidische ruimte, waarin $x^o=1$ wordt en het oppervlak de fundamentale tensoren $g_{\lambda\mu}$ en $h_{\lambda\mu}$ bezit, is

$$y^k = \partial_1\, \partial_2 x^k - a\, \partial_1 x^k - b\, \partial_2 x^k =$$
$$= h_{12}.n^k - \left[a - \left\{ {1 \atop 12} \right\} \right] \partial_1 x^k - \left[b - \left\{ {2 \atop 12} \right\} \right] \partial_2 x^k$$

een oneigenlijk punt, dat niet met $(0,n^1,n^2,n^3)$ behoeft samen te vallen.

De projectieve normaal valt dus niet steeds langs de "elementaire" normaal.

G. Fubini et E. Cech, Géométrie projective différentielle des surfaces, 1931.

G. Bol, Projektive Differentialgeometrie II, 1954.