STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1949-007

Convexe functies

Dr. J. Ridder

1949

Rapport ZW; 1949-007

Voordracht van Dr J. Ridder, op 28 Sept. 1949.

Convexe functies

De eindige functie $f(x)$ heet convex op (a,b), als voor $a<x<b$, $a<y<b$ steeds $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq 1/2\,[f(x)+f(y)]$ is (definitie van Jensen).
Voor p rationaal en $0<p<1$ laat zich dan afleiden:

(1) $$f\,[px+(1-p)y] \leq p.f(x)+(1-p).f(y).$$

Is $f(x)$ bovendien continu op (a,b), zo is (1) ook geldig bij p reëel.

A. $f(x)$ continu en convex.

Is voor één waarde van p tussen 0 en 1 (1) waar met het gelijkteken, zo geldt in (1) het gelijkteken voor iedere p tussen 0 en 1, m.a.w. het de punten $(x,f(x))$ en $(y,f(y))$ verbindend lijnsegment is deel der grafiek van $y=f(x)$.

Noemen we $f(x)$ concaaf voor $-f(x)$ convex, zo laat zich deze eig. generaliseren tot:

Een in (a,b) continue functie is daar dan en dan alleen convex of concaaf, zo haar grafiek met iedere rechte hoogstens een segment of halfgesloten interval en geen verdere punten, of hoogstens 2 verschillende punten gemeen heeft.

Een in (a,b) continue convexe functie is òf monotoon in (a,b) òf heeft een minimum $f(x_0)$ met $a<x_0<b$, in welk geval ze niet toenemend is voor $a<x\leq x_0$ niet afnemend voor $x_0 \leq x<b$.

Lit.: Bonnesen, Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes. Coll. Borel 1929, chap. 2. —— Haupt u. Aumann, Differential- und Integralrechnung. Band I (1938), Nr. 3.8.

B. Differentieerbaarheidseigenschappen.

I. Een in (a,b) continue convexe functie $f(x)$ bezit daar niet afnemende linkszijdige en niet afnemende rechtszijdige afgeleiden, $D_l f(x)$, $D_r f(x)$, met $D_l f(x) \leq D_r f(x)$.
Behalve in aftelbaar veel punten is $f(x)$ in (a,b) overal differentieerbaar.

Lemma. Is $f(x)$ continu op segment $[a,b]$ en l. en r. differentieerbaar op interval (a,b), zo is er een punt ξ op (a,b) met de eig, dat $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ligt "tussen" $D_l f(\xi)$ en $D_r f(\xi)$.
Uit dit lemma en de knikkenstelling voor functies (zie b.v. Haupt, l.c.p. 151) volgt:

I^{bis}. Heeft $f(x)$ op (a,b) niet afnemende l. en niet afnemende r. afgeleiden, zo is $f(x)$ daar convex.

Definitie der Symmetrische afgeleide: $D_{symm} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$

II. Een in (a,b) continue convexe functie bezit daar een niet afn. symmetrische afgeleide. (Volgt uit I).

Lemma. Is f(x) continu op [a,b] en symmetrisch differentieerbaar op (a,b), zo zijn er op (a,b) punten ξ_1, ξ_2 met de eig. dat $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ligt"tussen" $D_{symm.}f(\xi_1)$ en $D_{symm.}f(\xi_2)$.

Dit geeft met de definitie van Jensen:

II^{bis}. Is f(x) op (a,b) continu en symm.diffbaar met $D_{symm.}f(x)$ niet afnemend, zo is f(x) daar convex.

III e. III^{bis}. Nodig en voldoende voor de convexiteit van een in (a,b) continue functie f(x) is dat in ieder punt x van (a,b)

$$\limsup_{h \to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} \geqq 0 \text{ is.}$$

Gevolg: het lemma van Schwarz over de gegeneraliseerde 2e afgeleid..

Lit.: Haupt u. Aumann, Band II (1938), Nr.2.1.——Iyengar,C.r.Soc. Sci Varsovie 31 (1938), p.108 e.v.

C. Is f(x) convex in (a,b) en in één deelsegment niet begrensd naar boven (naar beneden), zo geldt dit voor ieder deelsegment.

Is f(x) convex in (a,b) en in één deelsegment begrensd naar boven, zo is ze in ieder punt van (a,b) continu.

Gevolg:Een in één punt discontinue convexe functie is overal discontinu; ze is in ieder deelsegment niet begrensd naar boven en daarin òf steeds begrensd naar beneden òf steeds niet begrensd naar beneden.

Beide typen van discontinue convexe functies bestaan (onder aanname van het keuzeaxioma).

Lit.: Haupt u. Aumann, Band I, Nr.3.8.—— F. Bernstein u. Doetsch, Math.Ann. 76 (1915).——— Voor additieve functies: Sierpinski en Banach in Fund.math. I (1920), van der Corput in Euclides 17 (1940).

Voor toepassingen en generalisaties lit.: Haupt u. Aumann,Bd.I, Nr.4.6; Bd II,Nr.2.3. —— Hardy, Littlewood a. Polya, Inequalities, Cambridge 1934. ——— Popoviciu, Les fonctions convexes, Act.sci. 992 (1945) (met uitvoerige bibliografie).

x x x x