STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1956-007

Wiskundig advies over de constructie van een pomp

H.J.A. Duparc
C.G. Lekkerkerker

1956

2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM-O.

ZW 1956-007

Wiskundig advies over de constructie van een pomp

door

H.J.A. Duparc en C.G. Lekkerkerker

1. Inleiding.

In dit rapport is sprake van een pomp, bestaande uit vier schroefstangen, die op zodanige wijze tegen elkaar geplaatst zijn dat de doorsneden met een willekeurig vlak loodrecht op hun schroefassen aan elkaar raken en een figuur geheel insluiten, waarvan de oppervlakte met de plaats van het vlak variëert van 0 tot een zekere maximale waarde. De genoemde doorsneden blijven aan elkaar raken bij synchrone draaiïng der schroefstangen. Dientengevolge sluiten de schroefstangen één of meer holten in welke zich bij draaien van de schroefstangen in de ene of in de andere richting verplaatsen. Bij het plaatsen van de pomp in een vloeistof voeren deze holten dus de vloeistof mee.

De vloeistof treedt uit de pomp in een periodiek variërende hoeveelheid, uit een periodiek variërende opening. Het laatste kan op een hieronder in detail uiteen te zetten wijze worden vermeden. Ons werd de vraag voorgelegd of men er hierbij tevens voor kan zorgen, dat uit de pomp een constante hoeveelheid vloeistof stroomt en dit op zo eenvoudig mogelijke wijze te bewerkstelligen. In het volgende zal blijken dat een en ander inderdaad mogelijk is.

2. Vorm der schroefstangen.

De assen der schroefstangen vormen de opstaande ribben van een regelmatig vierzijdig prisma. We beschrijven eerst de doorsnede van de pomp met een vlak loodrecht op deze assen. Laten deze assen een dergelijk vlak snijden in de hoekpunten van een vierkant KLMN met middelpunt O en zijdelengte a. De doorsneden van de schroefstangen met het vlak zijn congruente ovalen met middelpunten in resp. K,L,M,N; de vorm van zo'n ovaal kan als volgt worden beschreven.

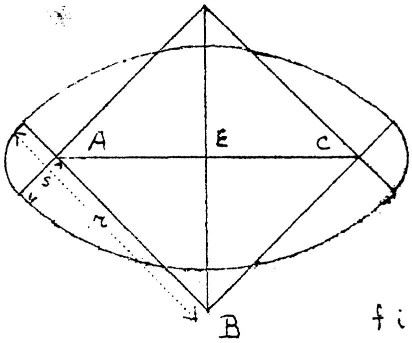
Laten r en s twee getallen zijn met

$$0 \leqq s \leqq r, \quad r + s = a.$$

Zij ABCD een vierkant met zijde r-s. Onze ovaal zal nu bestaan uit de kwartcirkels met middelpunten A,B,C,D en stralen resp. s,r,s,r, zoals is getekend in figuur 1. Het is duidelijk, dat de kwartcirkels in de overgangspunten een gemeenschappelijke raaklijn bezitten. Wij zullen het binnen de ovaal gelegen deel der rechte door B en D de korte as en het binnen de ovaal gelegen deel van de rechte door A en C de lange as

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

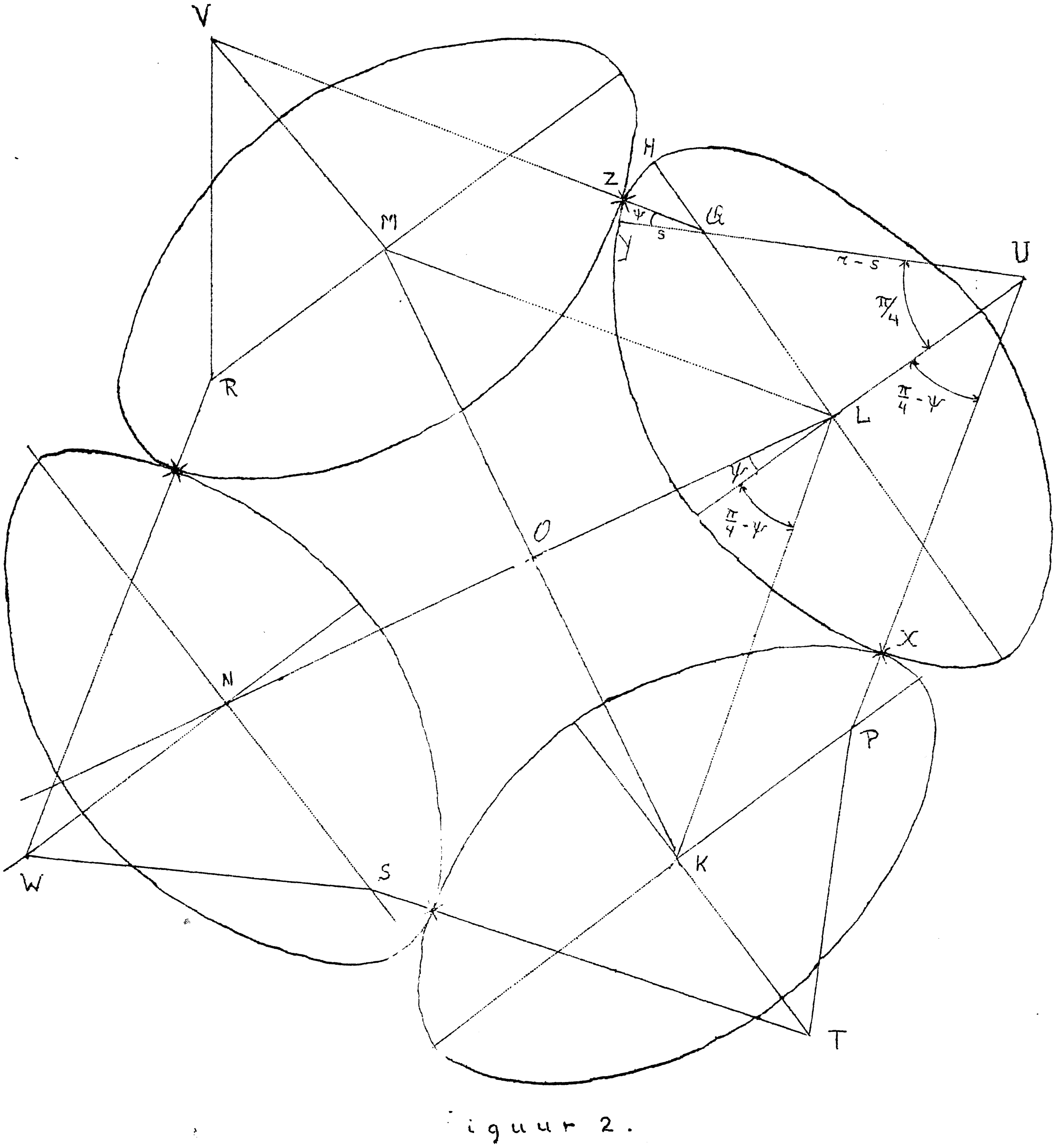
van de ovaal noemen.



figuur 1.

Zij ψ een willekeurige hoek. Wij plaatsen nu de vier ovalen zodanig dat hun korte as telkens een hoek ψ maakt met de diagonaal van het vierkant KLMN die door hun middelpunt gaat.

Laten daarbij de punten A en D en het middelpunt E van het vierkant ABCD resp. terechtkomen in P,T en K; Q,U en L; R,V en M; S,W en N (zie figuur 2). De korte assen van twee op elkaar volgende ovalen staan loodrecht op elkaar.



iguur 2.

Wij bewijzen thans dat twee opeenvolgende ovalen elkaar raken. Het is hiervoor geen bezwaar te onderstellen dat $0 \leq \psi < \frac{\pi}{2}$. De vierhoek MLQV is een parallelogram, want VM en QL zijn gelijk (nl. beiden gelijk aan de afstand van het middelpunt van een kwartcirkel tot het middelpunt van de bijbehorende ovaal) en evenwijdig (want ze liggen langs de korte resp. lange as van twee opeenvolgende ovalen). Dus VQ=ML=a=r+s.

Wij merken op dat de rechten door V die een hoek $\leq \frac{\pi}{4}$ met VM maken juist de rechten door V zijn, die de kwartcirkel met middelpunt V treffen, Evenzo zijn de rechten door Q die een hoek $\leq \frac{\pi}{4}$ met QH maken (H zij uiteinde van lange as van ovaal om L) juist de rechten door Q die de kwartcirkel met middelpunt Q treffen. Wij hebben

$$\angle OLM = \frac{\pi}{4}\ , \text{ dus } \angle MLQ = \frac{\pi}{2} - \psi - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \psi\ ,$$

dus $\angle QVM = \angle VQH = \frac{\pi}{4} - \psi$.

Derhalve snijdt VQ de beide genoemde kwartcirkels. De zoëven gevonden relatie VQ=r+s leert ons dan dat deze kwartcirkels elkaar raken. Dus raken elke twee opeenvolgende ovalen elkaar.

In het bovenstaande is de doorsnede van de schroefstangen met een vlak loodrecht op de assen beschreven. Deze doorsnede hangt af van de gekozen hoek ψ en b.v. de straal r. Wij krijgen derhalve een beschrijving van de gehele pomp als wij aangeven hoe ψ en r afhangen van de (van teken voorziene) afstand z van de doorsnede tot een vast te kiezen doorsnede.

Laten p en h twee positieve getallen zijn. Laat de afstand z variëren van -p-h tot +h. Zij f(z) een later te bepalen functie van z, die gedefinieerd is en monotoon afneemt van 1 tot 0 voor $0 \leq z \leq h$. Wij bepalen dan r(z) als volgt

$$\begin{aligned} r(z) &= a && \text{als } -p \leq z \leq 0; \\ r(z) &= \tfrac{1}{2}a(1+f(z)) && \text{als } 0 \leq z \leq h; \\ r(z) &= r(-z-p) && \text{als } -p-h \leq z \leq -p. \end{aligned}$$

Is r(z) bepaald dan kennen wij ook s=s(z) wegens r+s=a. In het bijzonder geldt nog

$$r^2 - s^2 = a^2 f(z).$$

Aan de functie ψ die behalve van z ook van de tijd t afhangt leggen wij de volgende eisen op:

1^o: $\qquad \dfrac{\partial \psi}{\partial z} = b$; $\qquad 2^o$: $\qquad \dfrac{\partial \psi}{\partial t} = -bv$,

waarbij b en v zekere positieve constanten zijn. De eis 1^o houdt in dat bij vaste t de hoek ψ lineair varieert met z; men kan $\frac{2\pi}{b}$ opvatten als de spoed der schroefstangen. De eis 2^o houdt in dat de schroefstangen met constante hoeksnelheid -bv draaien. Uit 1^o en 2^o volgt dat ψ op een additieve constante na gegeven wordt door

$$\psi = \psi\,(z,t) = b(z-vt).$$

Dus verplaatsen zich de holten in de pomp met een snelheid v.

3. Grootte van de doorsnede.

Wij hebben hierboven gezien, dat de doorsneden van de schroefstangen met een vlak loodrecht op de assen afhangen van ψ en r. Wij zullen de oppervlakte van de door deze doorsneden omsloten figuur aangeven met $D(r,\psi)$. Wij bepalen de functie $D(r,\psi)$.

Voorlopig onderstellen wij $0 \leqslant \psi < \frac{\pi}{2}$. Zij E de oppervlakte van de achthoek PUQVRWST. Dan heeft men

E=opp.vierkant PQRS + 4 opp.driehoek PUQ = $PQ^2 + 2.PU.QU.\sin \angle PUQ$.
Wegens PU = r+s, QU = r-s en $\angle PUQ = \frac{\pi}{2} - \psi$ (immers KL//PU) heeft men

$$PQ^2=(r+s)^2+(r-s)^2-2(r+s)(r-s)\sin\psi =2(r^2+s^2)-2(r^2-s^2)\sin\psi .$$

Dus

$$E = 2(r^2+s^2) - 2(r^2-s^2)\sin\psi + 2(r^2-s^2)\cos\psi .$$

Verder heeft men

$$D(r,\psi) = E-4 \text{ opp.sector } XUY - 4 \text{ opp. } YQZ.$$

Dus

$$D(r,\psi) = E-2\,r^2\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right) - 2\,s^2\psi$$
$$= 2(r^2+s^2) -\pi r^2 + 2(r^2-s^2)(\cos\psi - \sin\psi +\psi).$$

Om nu de waarde van $D(r,\psi)$ voor willekeurige waarden van ψ te krijgen merken wij op dat $D(r,\psi)$ ten duidelijkste periodiek in ψ is mod π en verder een even functie van ψ is. Voor willekeurige ψ stellen wij

$$\psi_1 = \psi - \pi\left[\frac{\psi}{\pi}+\tfrac{1}{2}\right] ,$$

waarin $\left[\frac{\psi}{\pi}+\frac{1}{2}\right]$ het grootste gehele getal aangeeft, dat $\leqslant \frac{\psi}{\pi}+\frac{1}{2}$ is. Dan verschillen ψ_1 en ψ een veelvoud van π en is bovendien $-\frac{\pi}{2} \leqslant \psi_1 < \frac{\pi}{2}$.
Tenslotte is dan

$$D(r,\psi) = 2(r^2+s^2)-\pi r^2 + 2(r^2-s^2)(\cos|\psi_1| - \sin|\psi_1| + |\psi_1|)$$
$$= \left(2-\frac{\pi}{2}\right)(r^2+s^2) + 2(r^2-s^2)\,T(\psi),$$

waarbij

$$T(\psi) = \cos|\psi_1| - \sin|\psi_1| + |\psi_1| - \frac{\pi}{4} .$$

Wij zien hieruit dat $D(r,\psi)$ de som is van twee termen, waarvan de eerste alleen van r afhangt en de tweede het product is van een functie van r en een functie van ψ. Deze laatste functie, $T(\psi)$, hangt van z en t af krachtens $\psi=\psi(z,t)=b(z-vt)$.

Voor het volgende merken wij op dat

$$\int_0^h \mathcal{T}(\psi)\,dz = \int_0^h \mathcal{T}(\psi(z,t))\,dz = 0 \qquad \text{voor alle } t,$$

als h een veelvoud is van $\frac{\pi}{b}$. Immers men heeft dan

$$\int_0^h \mathcal{T}(\psi(z,t))dz = \frac{1}{b}\int_{-bvt}^{bh-bvt} \mathcal{T}(\psi)d\psi$$

$$= \frac{1}{b}\int_{-bvt}^{k\pi-bvt} \mathcal{T}(\psi)d\psi = \frac{1}{b}\int_0^{k\pi} \mathcal{T}(\psi)d\psi = 0,$$

omdat $\mathcal{T}(\psi)$ periodiek is mod π en verder omdat

$$\int_0^{\pi} \mathcal{T}(\psi)d\psi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\psi_1 - \sin\psi_1 + \psi_1 - \tfrac{\pi}{4})d\psi_1 = 0.$$

4. Bepaling van de functie f(z).

Wij gaan thans de voorwaarde dat de hoeveelheid uitstromende vloeistof constant is, in analytische vorm brengen. Zij $V(t)$ het volume ten tijde t van het gedeelte van de pomp tussen de vlakken $z=0$ en $z=h$. Zij $B(t)$ de waarde van $D(r,\psi)$ op de plaats $z=0$ ten tijde t. Dan wordt de hoeveelheid vloeistof die per tijdseenheid door het uiteinde van de pomp stroomt, gegeven door de uitdrukking

$$B(t)v - V'(t).$$

De eis is nu dat deze uitdrukking constant is.

Men heeft, wegens $r=a$ en $s=0$ voor $z=0$,

$B(t) = D(r(0),\psi(0,t)) = (2-\frac{\pi}{2})a^2 + 2a^2\mathcal{T}(\psi(0,t)).$

Verder is $V(t) = \int_0^h D(r(z),\psi(z,t))dz$,

dus

$$V'(t) = \int_0^h \frac{\partial}{\partial t} D(r(z),\psi(z,t))dz = \int_0^h 2(r^2-s^2)\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{T}(\psi)dz.$$

Wegens

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{T}(\psi) = -v\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{T}(\psi) \quad \text{en} \quad r^2-s^2 = a^2 f(z)$$

vindt men

$$V'(t) = -v\int_0^h 2(r^2-s^2)\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{T}(\psi)dz$$

$$= -2v(r^2-s^2)\mathcal{T}(\psi(z,t))\Big|_0^h + 2a^2v\int_0^h f'(z)\mathcal{T}(\psi)dz$$

$$= 2a^2v\mathcal{T}(\psi(0,t)) + 2a^2v\int_0^h f'(z)\mathcal{T}(\psi)dz,$$

waarbij gebruikt is dat $r^2-s^2=0$ voor $z=h$ en $r^2-s^2=a^2$ voor $z=0$.

Al met al hebben wij

$$B(t)v - V'(t) = (2-\frac{\pi}{2})a^2v - 2a^2v\int_0^h f'(z)\,\mathcal{T}(\psi)dz.$$

Onze eis komt nu hierop neer dat wij het positieve getal h en de functie f(z) zodanig moeten bepalen dat de integraal

$$\int_0^h f'(z)\ \mathcal{T}(\psi(z,t))dz$$

constant is. Bovendien wensen wij hierbij een zo eenvoudig mogelijke keuze te doen voor de functie f(z).

Wij herinneren eraan dat tot nu toe van f(z) alleen geëist is dat f(z) monotoon afneemt van 1 naar 0 als z loopt van 0 tot h. De eenvoudigste manier waarop men dit kan bereiken, is f(z) lineair te laten afnemen. Uit de tot nog toe verkregen resultaten volgt dat inderdaad door een dergelijke keuze van f(z) aan de eis is te voldoen. Immers dan is f'(z) oonstant, terwijl wij reeds hebben gezien dat

$$\int_0^h \mathcal{T}(\psi(z,t))dz = 0 \quad \text{voor alle } t,$$

mits h een veelvoud is van $\frac{\pi}{b}$.

Wij komen tot de volgende

<u>Conclusie</u>. Uit de pomp in werking treedt een constante hoeveelheid vloeistof, indien het gedeelte van de pomp tussen de vlakken z=0 en z=h (het afsluitstuk van de pomp) een lengte heeft die een veelvoud is van de halve spoed $\frac{\pi}{b}$ en in dat afsluitstuk de hierboven genoemde straal r lineair afneemt van a tot $\frac{1}{2}$a (dus s toeneemt van 0 tot $\frac{1}{2}$a).

<u>Opmerking</u>. In het hoofddeel van de pomp (het gedeelte tussen de vlakken z=-p en z=0) heeft de vloeistof een constante snelheid v. Wij zullen laten zien, dat de uitstroomsnelheid groter is en wel gelijk aan 2v. Laten wij hiertoe het gemiddelde bepalen van $D(r(z),\psi(z,t))$ als functie van t bij vaste z. Allereerst is $\mathcal{T}(\psi)$ periodiek in ψ met periode π, dus, bij vaste z, periodiek in t met periode $\frac{\pi}{bv}$. Daarbij is (zie eind §3)

$$\int_0^{\frac{\pi}{bv}} \mathcal{T}(\psi(z,t))dt = \frac{1}{v}\int_0^{\frac{\pi}{b}} \mathcal{T}(\psi(z,t))dz = 0.$$

Uit de formule voor $D(r(z),\psi(z,t))$ volgt dus dat het gemiddelde van deze uitdrukking over t gelijk is aan $(2-\frac{\pi}{2})(r^2+s^2)$. In het hoofddeel van de pomp is dit gemiddelde dus gelijk aan $(2-\frac{\pi}{2})a^2$. Het uiteinde van het sluitstuk heeft een constante oppervlakte $\frac{1}{2}(2-\frac{\pi}{2})a^2$. Hieruit volgen onmiddellijk de beweringen over de stroomsnelheid.