STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

ZW 1957-007

Voordracht in de serie
"Actualiteiten"

door

J. Th. Runnenburg

30 Maart 1957

Een wachttijdprobleem bij machines.

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Voordracht in de serie

"Actualiteiten"

door

J.Th. Runnenburg

30 Maart 1957

Een wachttijdprobleem bij machines

Situatie: Een werkman loopt vanaf $T = 0$ ronden om n machines, die in een kring zijn opgesteld. De tussenruimten tussen de opeenvolgende machines zijn $c_1, \ldots, c_n$ minuten looptijd van de werkman lang, zodat de looptijd voor één ronde

$$c = \sum_{1}^{n} c_i$$

minuten is. Een machine die werkt heeft kans

$$P\left\{\underline{t} \leq t\right\} = 1 - e^{-\lambda t} \qquad (t \geq 0)$$

om binnen een tijd t stuk te gaan.[1] De werkman repareert de machines die bij op zijn ronde kapot aantreft en heeft daarvoor per machine een reparatietijd $\underline{s}$ (≥ 0) met verdelingsfunctie $B(s)$ nodig. De werktijden $\underline{t}$ en de reparatietijden $\underline{s}$ zijn allen onafhankelijk.

Vraag: Als de toestand ten tijde $T = 0$ gegeven is, (d.w.z. welke machines heel en welke machines kapot zijn en waar de werkman dan staat), wat is dan de gemiddelde rondeduur en de gemiddelde wachttijd per ronde van elk van de machines op de lange duur (d.w.z voor $T \to \infty$) en de bijbehorende verdelingsfuncties?

Antwoord: Door gebruik te maken van de theorie van de ingebedde Markovketens (D.G. Kendall) kunnen wij aantonen, dat de kans, dat van n opeenvolgende machines er $\underline{k} = k$ kapot worden aangetroffen, voor $T \to \infty$ nadert tot

$$p_k = A\binom{n}{k} \prod_{j=0}^{k-1} \left(e^{\lambda c} I^{-j} - 1\right) ,$$

waarbij A een normeringsconstante is ($\sum p_k = 1$) en

$$I = \int_{0-}^{\infty} e^{-\lambda s} dB(s) .$$

----

1) λ is een gegeven positief getal.

Hieruit kan de verdelingsfunctie van de rondeduur en van de wachttijd van een machine gedurende een ronde voor $T \to \infty$ berekend worden. De limieten zijn resp.

$$P\left\{\underline{r} \leq r\right\} = P\left\{c + \underline{s}_1 + \ldots + \underline{s}_{\underline{k}} \leq r\right\}$$

en

$$P\left\{\underline{w} \leq w\right\} = P\left\{c + \underline{s}_1 + \ldots + \underline{s}_{\underline{l}} \leq r\right\}.$$

Hierin zijn de $\underline{s}_i$ onafhankelijke variabelen, elk met verdelingsfunctie $B(s)$, $\underline{k}$ is het aantal machines, dat stuk wordt aangetroffen bij n opeenvolgende, $\underline{l}$ idem bij n-1 opeenvolgende machines, terwijl $\underline{t}$ onafhankelijk van de $\underline{s}_i$ is, met $P\left\{\underline{t} \leq t\right\} = 1 - e^{\lambda t}$.

Voor grote n kunnen wij de gemiddelde rondeduur ook als volgt bepalen: Laat $\underline{z}$ de tijd zijn, die de werkman nodig heeft om bij een bepaalde machine terug te keren. Als deze tijd constant (en gelijk z) is, dan geldt

$$\mathcal{E}\underline{r} = z + (1 - e^{-\lambda z})\mathcal{E}\underline{s}$$

$$\mathcal{E}\underline{w} = z - \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda z})$$

als $\mathcal{E}\underline{r}$, $\mathcal{E}\underline{s}$ en $\mathcal{E}\underline{w}$ resp. de gemiddelde rondeduur, reparatieduur en wachttijd per ronde zijn. Tevens is dan

$$z = c + (n - 1)(1 - e^{-\lambda z})\mathcal{E}\underline{s} \quad ,$$

waaruit z door iteratie gevonden kan worden.

Dat deze procedure correct is, blijkt wanneer wij $B(s)$ door $B(ns)$ vervangen en bij constante c

$$\lim_{n \to \infty} \underline{z}$$

bepalen. Behoudens een waarschijnlijkheid 0 bestaat deze limiet en is hij gelijk aan een constante, mits de eerste twee momenten van $B(s)$ eindig zijn.