STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1958 - 007
S 230 (V 19)

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

G. de Leve

22 februari 1958

Dynamische Voorraadproblemen

1958

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

ZW 1958-007
S 230 (V 19)

Voordracht in de serie

"Actualiteiten"

22 februari 1958

Dynamische Voorraadproblemen

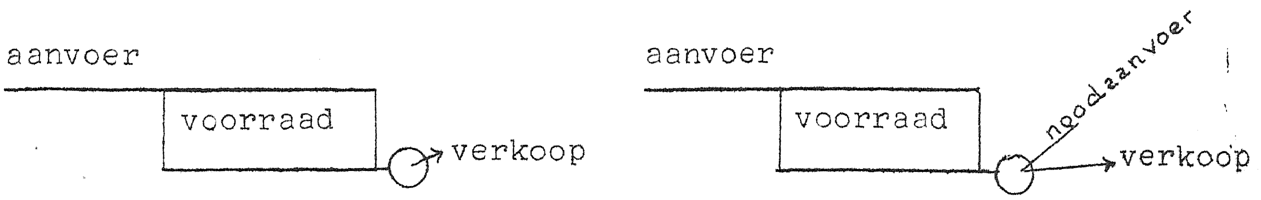
door G. de Leve

In deze voordracht zullen wij een paar voorraadproblemen bespreken, waarvan de oplossingsmethoden geheel met elkander overeenstemmen. De te beschouwen situaties kunnen als volgt worden gekarakteriseerd.

Om een verkoopproces gaande te houden moet een verkoper op van te voren onbekende tijdstippen één eenheid van een artikel aan een consument verstrekken. In iedere periode van de lengte T wordt de kans op een vraag $\underline{d}$ van de grootte i gegeven door:

$$P[\underline{d}=i] = \frac{e^{-\alpha T}(\alpha T)^i}{i!} \tag{1}$$

Deze artikelen zijn bij de verkoper opgeslagen en kunnen in ieder veelvoud van één eenheid op elk gewenst tijdstip worden besteld bij één leverancier. De levertijden van de orders zijn stochastisch, maar de kansverdeling van de levertijd is voor iedere order dezelfde. De orders worden in de zelfde volgorde afgeleverd als die, waarin zij zijn afgeleverd. Wij zullen in het hierna volgende twee verschillende modellen beschouwen. In het eerste model kan de voorraad van de verkoper slechts worden aangevuld met behulp van bestellingen met levertijd. In het tweede model kan de verkoper als de voorraad is uitgeput ook noodinkopen verrichten tegen een hogere inkoopprijs zonder levertijd.



model 1 model 2

fig. 1

Schematische voorstelling van beide modellen

Aan het verkoopproces zijn kosten verbonden, waarvan wij de volgende soorten zullen onderscheiden:

1e Inkoopkosten: Deze kosten zullen wij weergeven door een functie van q, t.w. $\varphi(q)$, waarbij q de omvang van de order aangeeft. Zij omvatten alle kosten, welke verband houden met de omvang en het bestaan van de order.

2e Opslagkosten: De opslagkosten bedragen C_1 voor iedere eenheid één tijdseenheid in voorraad.

3e Naleveringskosten: In model 1 worden naleveringskosten gemaakt, als de voorraad uitgeput is en men uitstel van aflevering moet vragen. De naleveringskosten bedragen C_2 voor iedere eenheid één tijdseenheid te laat afgeleverd aan de consument.

4e Noodinkoopkosten: In model 2 worden noodinkoopkosten gemaakt, als de voorraad uitgeput is en men elders één eenheid moet inkopen tegen de hoger inkoopprijs C_3 per eenheid.

Het probleem, waarvoor een oplossing wordt gezocht, kan als volgt worden geformuleerd:

"Een verkoper heeft op het rijdstip θ_{-1} een bestelling afgegeven en vraagt zich op dat tijdstip af, wanneer een nieuwe order moet worden afgegeven en hoe groot de omvang van deze order moet worden gekozen".

Aangenomen wordt dat het eerst volgende besteltijdstip θ_1 plaats zal vinden na θ_{-1}.

De verkoper beschikt op het tijdstip θ_{-1} over de volgende informatie:

1e de voorraad r_{-1} op θ_{-1}

2e de besteltijdstippen θ_{-j} $(j=1,\ldots,k)$ van de nog niet afgeleverde orders en de daarbij behorende ordergrootten q_{-j} $(j=1,\ldots,k)$.

ordergrootte				q_{-k}	q_{-1}
voorraad			r_{-1}		
tijdstip van aflevering				θ^{-k}	θ^{-1}
besteltijdstip	θ_{-k}	θ_{-2}	θ_{-1}		

fig.2

De beschikbare informatie op θ_0 1) voetnoot zie volgende blz.

De keuze van het besteltijdstip θ_1 en de ordergrootte q_1 zullen wij optimaal noemen, als voor die keuze van θ_1 en q_1 de verwachting op het tijdstip θ_1 van de totale kosten vanaf θ_{-1} minimaal is. Deze kosten zullen uiteraard ook afhangen van de toekomstige besteltijdstippen θ_i en de ordergrootte q_i $(i=2,3,\ldots)$, waarvan men op het tijdstip θ_{-1} slechts weet, dat zij t.z.t. ook optimaal gekozen zullen worden.

Zonder de algemeenheid te schaden kunnen wij aannemen, dat de goederen in dezelfde volgorde worden verkocht als die, waarin zij zijn afgeleverd.

Met het tijdstip ${}^{i}\theta$ geven wij dan in het eerste model het moment aan, waarop de laatste eenheid van de i^{de} order moet worden afgeleverd. Indien deze eenheid op het tijdstip ${}^{i}\theta$ in voorraad is, zal het worden verkocht. In de periode $(\theta_{-1}, {}^{i}\theta)$ [2] bedraagt de vraag dus $r_{-1} + \sum_{j=1}^{i} q_j$. Het aantal verkochte eenheden in die periode zal hieraan gelijk zijn, als θ^{i} plaats vindt voor het tijdstip ${}^{i}\theta$.

Met het tijdstip ${}^{i}\theta$ geven wij in het tweede model het moment aan, waarop de laatste eenheid van de i^{de} order wordt verkocht. Als in de periode $(\theta_{-1}, {}^{i}\theta)$ geen noodinkopen hebben plaats gevonden, dan zal de vraag in die periode $r_{-1} + \sum_{j=1}^{i} q_j$ bedragen. Zijn daarentegen wel noodinkopen verricht in de periode $(\theta_{-1}, {}^{i}\theta)$ dan is de vraag in die periode groter dan $r_{-1} + \sum_{j=1}^{i} q_j$.

Wij zullen nu de onkosten vanaf het tijdstip θ_{-1} splitsen in onkosten per bestelling. De bijdragen van de i^{de} order tot de totale kosten worden gegeven door:

1e de inkoopkosten $\varphi(q_i)$ op het tijdstip θ^{i}

2e de opslagkosten vanaf het tijdstip θ^{i} over de gehele order q_i tot ${}^{i-1}\theta$, als het tijdstip θ^{i} plaats vindt voor ${}^{i-1}\theta$ en verder over het resterend gedeelte tot het tijdstip ${}^{i}\theta$.

3e de naleveringskosten, als het tijdstip θ^{i} plaats vindt na

---

1) Besteltijdstippen: index rechts beneden b.v. θ_i
tijdstippen van aflevering: index rechts boven b.v. θ^{i}
Op θ_{-1} is van de afleveringstijdstippen θ^{-1} t/m θ^{-k} alleen de volgorde bekend.

2) De beschouwde intervallen zij steeds links open en rechts gesloten.

${}^{i-1}\theta$ over de hoeveelheid, die gevraagd wordt in de periode (${}^{i-1}\theta$, θ^{i}) (model 1).

4e de noodinkoopkosten, als het tijdstip θ^{i} plaats vindt na ${}^{i-1}\theta$, van de hoeveelheid, waaraan behoefte bestaat in de periode (${}^{i-1}\theta$, θ^{i}) (model 2).

Indien wij op deze wijze te werk gaan zijn alle onkosten, welke gemaakt worden na θ_{-1} toegewezen, hetzij aan een reeds afgegeven hetzij aan een nog te bestellen order. Bovendien zal het gedeelte van de totale kosten dat komt ten laste van de i^{de} order niet worden beïnvloed door de keuzen van (θ_k, q_k) (k=i+1,....), maar wel door de keuzen van (θ_j, q_j) (j=1,...,i). Aangezien de bijdragen tot de totale kosten van de reeds op θ_{-1} afgegeven orders niet afhangen van de keuzen van (θ_i, q_i) (i=1,2....) kan men volstaan met de bijdragen vanaf i=1 te beschouwen.

Aangezien het gebruikelijk is om aan onkosten in het verre verschiet minder gewicht toe te kennen, dan aan uitgaven van gelijke grootte in de nabije toekomst zullen alle uitgaven met een passende verdisconteringsfactor worden vermenigvuldigd. De waarde een uitgave op het tijdstip θ berekend voor het tijdstip θ_*, wordt verkregen door deze uitgave te vermenigvuldigen met $\delta_{\theta_*}(\theta)$.

Indien wij met $\underline{C}_i(\theta, \theta_i, q_i)$ de kosten aangeven, welke op rekening komen van de i^{de} order en gemaakt zijn tot het tijdstip θ,dan vinden wij voor de verdisconteerde waarde van de totale kosten van de i^{de} order berekend voor het tijdstip θ_*:

$$S_{\theta_*}^{\theta}\ \underline{C}_i(\theta,\theta_i,q_i) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{\theta_*}(\theta)\ d\underline{C}_i(\theta,\theta_i,q_i) \qquad (2)$$

waarbij het rechterlid een Stieltjes-integraal voorstelt. De verdisconteringsfactor (δ_{θ_*} ,θ) dient men zodanig te kiezen, dat als $\ell(\theta,\theta_{**})$ de lengte voorstelt van het interval ($\theta_{**}\theta$) de beide uitdrukkingen:

$$S_{\theta_*}^{\theta}\ \underline{C}_i(\theta,\theta_i,q_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{\theta_*}(\theta)\ d\underline{C}_i(\theta,\theta_i,q_i) \qquad (3)$$

$$(\theta,\ \theta_{**}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{\theta_*}(\theta)\ d\,\ell(\theta,\ \theta_{**}) \qquad (4)$$

bestaan voor iedere i en elke eindige waarde van θ_*, θ_{**}, θ_i en q_i, terwijl bovendien moet gelden;

$$\delta_{\theta_*}(\theta) \quad \begin{array}{ll} < 1 & \text{voor } \theta > \theta_* \\ = 1 & \text{voor } \theta = \theta_* \\ > 1 & \text{voor } \theta < \theta_* \end{array} \qquad (5)$$

en

$$\delta_{\theta_*}(\theta_{**})\,\delta_{\theta_{**}}(\theta) = \delta_{\theta_*}(\theta) \quad \text{voor iedere } \theta, \theta_* \text{ en } \theta_{**} \qquad (6)$$

Uit (5) en (6) volgt:

$$\delta_{\theta_*}(\theta_{**})\,\delta_{\theta_{**}}(\theta_*) = 1 \quad \text{voor iedere waarde van } \theta_* \text{ en } \theta_{**} \qquad (7)$$

De verwachting van de verdisconteerde waarde, berekend voor θ_1, van de bijdragen tot de totale kosten van de op θ_{-1} nog niet afgegeven orders, wordt gegeven door:

$$E\underline{C}_{\theta_1}(\theta_1, q_1;\ \theta_2, q_2; \ldots) = E \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{\theta_1}(\theta_i)\, S_{\theta_i}^{\infty}\, \underline{C}_i(\theta, \theta_i, q_i) \qquad (8)$$

<u>Voor de optimale keuzen van θ_i en q_i (i=1,2...) zullen dus de volgende uitdrukkingen minimaal zijn</u>:

$$E\underline{C}_{\theta_j}(\theta_j, q_j;\ \theta_{j+1}, q_{j+1}; \ldots\ldots) \qquad (j=1,2,\ldots i) \qquad (9)$$

Hierbij dient te worden opgemerkt, dat de verwachting van $\underline{C}_{\theta_j}(\theta_1, q_1; \theta_2, q_2; \ldots)$ in uitdrukking (9) berekend is op het tijdstip θ_j.

Hieruit volgt, dat men voor de bepaling van het optimale besteltijdstip θ_1 en ordergrootte q_1 moet beschikken over de informatie, welke men pas op latere tijdstippen kent.

In het hierna volgende zullen wij aantonen, dat als men een extra voorwaarde oplegt, <u>zonder</u> deze informatie optimale besteltijdstippen en ordergrootten kunnen worden bepaald.

De periode $({}^{i-1}\theta, {}^{i}\theta)$ (i=2,3...) omspannen het gehele interval $({}^{-1}\theta, \infty)$.

Wij zullen met de grootheid $\underline{\tau}(\theta, \theta_i, q_i)$ de lengte vastleggen van het gedeelte van de periode $({}^{i-1}\theta, {}^{i}\theta)$, dat binnen het interval $(-\infty, \theta)$ ligt. Vervolgens beschouwen wij het quotiënt:

$$\frac{E\{S_{\theta_i}^{\infty}\, \underline{C}_i(\theta, \theta_i, q_i) / \mathfrak{I}(\theta_i)\}}{E\{S_{\theta_i}^{\infty}\, \underline{\tau}_i(\theta, \theta_i, q_i) / \mathfrak{I}(\theta_i)\}} \qquad (10)$$

waarbij $\mathfrak{I}(\theta_i)$ de beschikbare informatie aangeeft op θ_i.

$\mathfrak{I}(\theta_i)$ wordt dus gegeven door:

$$\mathfrak{I}(\theta_i) = \begin{bmatrix} r_i = r_i(\theta_i) & & \\ \theta_{i-k} = \theta'_{i-k} & \cdots\cdots & \theta_{i-1} = \theta'_{i-1} \\ q_{i-k} = q'_{i-k} & & q_{i-1} = q'_{i-1} \end{bmatrix} \qquad (11)$$

waarbij k het aantal nog niet afgeleverde orders op θ_i aangeeft en r_i de op dat tijdstip aanwezige voorraad.

Het minimum van (10) met betrekking tot θ_i en q_i zullen wij aanduiden door $m_i(\theta_1,q_1;\theta_2,q_2;\ldots)$.

<u>Hulpstelling 1</u>

Als het minimum van (10) bereikt voor een waarde van θ_i waarvoor geldt k=0, dan zal dit minimum m_i niet afhangen van de keuzen van θ_k en q_k $(k=1,\ldots,i-1)$.

<u>Bewijs</u>: Als k=0, dan wordt de beschikbare informatie op θ_i gegeven door $I(\theta_i) = r_i=r_i(\theta)$. Voor ieder stelsel waarden van θ_k en q_k $(k=1,\ldots,i-1)$ zijn de tijdstippen θ_i waarvoor geldt k=0 slechts van elkander te onderscheiden door de waarden van r_i op die tijdstippen. Het quotiënt, vermeld in (10), zal dan ook slechts een functie zijn van r_i en q_i. Indien het quotiënt haar minimum m_i bereikt voor $r_i = r_o$ en $q_i=q_o$, dan zal op het tijdstip θ, waarvoor (10) haar absoluut minimum bereikt de voorraad dalen tot r_o.

<u>Hulpstelling 2</u>

Als zowel voor $i=1$, als $i=i_2$ het absolute minimum van (10) bereikt wordt voor een waarde van θ_i waarvoor geldt r=0, dan geldt bovendien $m_{i_1} = m_{i_2} = m_o$.

<u>Bewijs</u>: Als k=0, dan zijn de functies $\underline{C}_{i_1}(\theta,\theta_{i_1},q_{i_1})$ en $\underline{\tau}_{i_1}(\theta,\theta_{i_1},q_{i_1})$ van vorm identiek met $\underline{C}_{i_2}(\theta,\theta_{i_2},q_{i_2})$ en $\underline{\tau}_{i_2}(\theta,\theta_{i_2},q_{i_2})$. Aangezien het quotiënt (10) slechts afhangt van r_i en q_i zal het minimum van (10) bereikt worden voor $r_{i_1}=r_o$ en $q_{i_1}=q_o$ resp. $r_{i_2}=r_o$ en $q_{i_2}=q_o$. Hieruit volgt, dat m_{i_1} gelijk moet zijn aan m_{i_2}.

<u>Stelling I</u>

Indien voor iedere waarde van i en voor ieder gegeven stelsel waarden van θ_{i-1}, θ_k en q_k $(k=1,\ldots,i-2)$ de waarde van

$m_i(\theta_{i-1};q_{i-1};\ldots)$ niet afhangt van de keuze van q_{i-1}, dan geldt:

$$m_i(\theta_{i-1},q_{i-1};\ \theta_{i-2},q_{i-2};\ldots) = m_o \qquad (12)$$

Bewijs:

De optimale keuze van het besteltijdstip θ_i wordt mede be paald door de heoveelheden in bestelling. Door q_{i-1} uitzonderlijk groot te kiezen kan men het optimale besteltijdstip θ_i laten plaats vinden na het afleveringstijdstip van de vorige order θ^{i-1}. Indien uit het afgeven van een order van de grootte q'_{i-1} op θ_{i-1} volgt, dat het optimale besteltijdstip θ_i plaats vindt na het tijdstip θ^{i-1} (m.a.w. k=0) dan geldt volgens het gegeven en hulpstellingen 1 en 2:

$$m_i(\theta_{i-1},q'_{i-1};\theta_{i-2},q_{i-2}\ldots) = m_i(\theta_{i-1},q_{i-1};\theta_{i-2},q_{i-2};\ldots) = m_o \qquad (13)$$

Stelling II

Indien voor iedere waarde van i voor ieder gegeven stelsel waarden van θ_{i-1},θ_k en q_k $(k=1,\ldots,i-1)$ de waarde van $m_i(\theta_{i-1},q_{i-1};\underline{\theta}_{i-2},q_{i-2};\ldots)$ niet afhangt van de keuze van q_{i-1} en de grootheden (θ_i,q_i) $(i=1,2,3\ldots)$ steeds zodanig worden gekozen, dat voor die keuzen van (θ_i,q_i) het quotiënt vermeld in (10) minimaal is, dan zal voor deze waarden van (θ_i,q_i) ook $E\underline{C}_{\theta_1}(\theta_1,q_1;\theta_2,q_2\ldots)$ minimaal zijn.

Bewijs:

Uit $E\underline{C}_{\theta_1}(\theta_1,q_1;\theta_2,q_2;\ldots) = E\sum_{i=1}^{\infty} \delta_{\theta_1}(\theta_i) S_{\theta_i}^{\theta}\, \underline{C}_i(\theta,\theta_i,q_i)$

volgt:

$$E\underline{C}_{\theta_1}(\theta_1,q_1;\theta_2,q_2;\ldots) = E\sum_{i=1}^{\infty} \delta_{\theta_1}(\theta_i)\frac{E\{S_{\theta_i}^{\theta}\, \underline{C}_i(\theta,\theta_i,q_i)/J(\theta_i)\}}{E\{S_{\theta_i}^{\theta}\, \underline{\tau}_i(\theta,\theta_i,q_i)/J(\theta_i)\}}\ \times$$

$$\times\ E\{S_{\theta_i}^{\theta}\, \underline{\tau}_i(\theta,\theta_i,q_i)/J(\theta_i)\} \qquad (14)$$

Hiervoor kan men ook schrijven:

$E\underline{C}_{\theta_1}(\theta_1,q_1;\theta_2,q_2;\ldots) =$

$$E \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{\Theta_1}(\Theta_i) \left[\frac{E\{S_{\Theta_i}^{\Theta} \underline{C}_i(\Theta,\Theta_i,q_i)/\mathcal{J}(\Theta_i)\varphi}{E\{S_{\Theta_i}^{\Theta} \underline{\tau}_i(\Theta,\Theta_i,q_i)/\mathcal{J}(\Theta_i)\varphi} - m_o \right] E\{S_{\Theta_i}^{\Theta} \underline{\tau}_i(\Theta,\Theta_i,q_i)/\mathcal{J}(\Theta_i)\}$$

$$+ m_o E \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{\Theta_1}(\Theta_i) \quad \{S_{\Theta_i}^{\Theta} \underline{\tau}_i(\Theta,\Theta_i,q_i)/\mathcal{J}(\Theta_i)\} =$$

$$E \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{\Theta_1}(\Theta_i) \left[\frac{E\{S_{\Theta_i}^{\Theta} \underline{C}_i(\Theta,\Theta_i,q_i)/\mathcal{J}(\Theta_i)\}}{E\{S_{\Theta}^{\Theta} \underline{\tau}_i(\Theta,\Theta_i,q_i)/\mathcal{J}(\Theta_i)\}} - m_o \right] E\{S_{\Theta_i}^{\Theta} \underline{\tau}_i(\Theta,\Theta_i,q_i)/\mathcal{J}(\Theta_i)\}$$

$$+ m_o S_{\Theta_{-1}}^{\Theta} \ell(\Theta,{}^{-1}\Theta) \qquad (15)$$

Aangezien $m_o S_{\Theta_{-1}}^{\Theta} \ell(\Theta,{}^{-1}\Theta)$ niet afhangt van de keuzen van Θ_i en q_i $(i=1,2,\ldots)$ en

$$\frac{E\{S_{\Theta_i}^{\Theta} \underline{C}_i(\Theta,\Theta_i,q_i)/\mathcal{J}(\Theta_i)\varphi}{E\{S_{\Theta_i}^{\Theta} \underline{\tau}_i(\Theta,\Theta_i,q_i)/\mathcal{J}(\Theta_i)\varphi} \geq m_o \qquad (16)$$

zal $E\underline{C}_{\Theta_1}(\Theta_1,q_1;\Theta_2,q_2;\ldots)$ voor deze keuzen van $(\Theta_i;q_i)$ haar absoluut minimum bereiken.

Indien men zich dus beperkt tot die modellen waarvoor geldt, dat $m_i(\Theta_{i-1},q_{i-1};\Theta_{i-2},q_{i-2};\ldots)$ niet afhangt van q_{i-1}, dan kan het optimale besteltijdstip Θ_1 en de optimale bestelgrootte q_1 onafhankelijk van de daarop volgende besteltijdstippen en ordergrootten worden bepaald. Men kan aantonen, dat bij het eerste model steeds aan deze voorwaarden is voldaan. Bij het tweede model behoeft dit echter niet altijd het geval te zijn.