STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1949-008

De vierhoek van Bennett

Prof.dr. O. Bottema

1949

Voordracht van Prof. Dr. O. Bottema op
12 October 1949.

DE VIERHOEK VAN BENNETT

Een vlakke vierhoek is door 5 gegevens bepaald, zodat een stangenvierzijde een mechanisme is met één vrijheidsgraad. Uit de algemene formules van Grübler voor de vrijheidsgraad van een mechanisme blijkt dat voor een enkelvoudige ruimtelijke n-hoek, waarvan elke twee opvolgende zijden ten opzichte van elkaar kunnen roteren door middel van een gewoon scharnier waarvan de as loodrecht op hun vlak staat, het aantal vrijheidsgraden in het algemeen $n - 6$ bedraagt. Voor $n < 7$ is de veelhoek dus in het algemeen onbewegelijk.

Bij geschikte keuze van de afmetingen van de n-hoek is het echter mogelijk een bewegelijk mechanisme te verkrijgen ook voor $n < 7$. Beschouwd werd het geval $n = 4$. Van de scheve vierhoek ABCD werden als gegeven beschouwd de lengten der zijden $AB = a_1$, $BC = a_2$, $CD = a_3$, $DA = a_4$, alsmede de hoeken φ_i $(i = 1,2,3,4)$; φ_1 is daarbij de hoek tussen de vlakken DAB en ABC enz.; φ_1 is ook de hoek tussen de beide scharnierassen die aan AB in de uiteinden A en B zijn gedacht. Met behulp van elementaire stereometrische beschouwingen en een enkele formule uit de boldriehoeksmeting werd bewezen dat voor de bewegelijkheid van het mechanisme noodzakelijk is dat

$$a_1 = a_3,\ a_2 = a_4,\ q_1 = q_3,\ q_2 = q_4,\ \frac{a_1}{\sin \varphi_1} = \frac{a_2}{\sin \varphi_2}$$

Daarna werd aangetoond, dat de voorwaarden ook voldoende zijn en dat een mechanisme met één vrijheidsgraad ontstaat, "de vierhoek van Bennett".

De vier scharnierassen van het mechanisme liggen steeds op een (orthogonale) hyperboloïde.

Volgens een bekende stelling (van Villarceau) snijdt een dubbelraakvlak van een torus dit oppervlak volgens twee cirkels. Bricard heeft van deze eigenschap een elementair bewijs gegeven en aangetoond dat de figuur op eenvoudige wijze in verband staat met een vierhoek van Bennett. Kiest men als (vaste) punten A resp. B van de vierhoek het middelpunt van de torus resp. het middelpunt van een cirkel van Villarceau, dan doorloopt bij de beweging van het mechanisme het punt C laatstgenoemde cirkel, terwijl D de hartcirkel van de torus doorloopt. Deze vierhoek van Bennett is niet de algemene, daar $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$.

LITERATUUR:

Grübler . . . . Getriebelehre (Berlin, 1917) pag. 13 - 18.

Beyer . . . . Technische Kinematik (Leipzig 1931) pag. 25 - 30, 37 - 40.

Delassus . . . . Sur les systèmes articulés gauches, Annales de l'Ecole normale supérieure, 17 (1900) pag. 445.

Bennett . . . . Engineering 4, 12 (1903), pag. 777.

Bennett . . . . London Mathem.Soc. 13 (1914)pag.151.

Bricard . . . . Démonstrations élémentaires des propriétés fondamentales du tore, Nouvelles Annales de Mathém. III (1924), pag. 308.

Myard . . . . Contributions à la géométrie des systèmes articulés, Bull.Soc.Math. 59 (1931) pag. 183.

Krames . . . . Zur Geometrie des Bennett'schen Mechanismus, Wiener Sitz. Ber. IIa, 146 (1937), pag. 159.

Macmillan . . . . An account of four-piece mechanisms in three dimensions, Mathem.Gaz. 26, (1942), pag. 5.

Andress . . . . A vector account of four-piece mechanisms, id. 27 (1943) pag. 149.