STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1957 - 008

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen van hoger standpunt belicht"

Prof.dr. L. Kuipers

17 april 1957

Over de ligging van de nulpunten van polynomen

1957

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen van hoger standpunt belicht"

door
Prof.Dr L. Kuipers

17 april 1957

Over de ligging van de nulpunten van polynomen

1. Onder een polynoom f(z) verstaan we in het volgende een functie van de vorm

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n ,$$

waarbij z een complexe veranderlijke is, en de coëfficienten $a_0,a_1,\ldots,a_n$ complexe constanten zijn.

Zijn de coëfficienten $a_0,a_1,\ldots,a_n$ reëel, dan heet f(z) een reëel polynoom.

De n waarden van z, waarvoor f(z) gelijk aan 0 wordt, heten de nulpunten van het polynoom.

Het vraagstuk, waarmee we ons bezig houden, is het probleem van de ligging van de nulpunten van f(z) in het complexe z-vlak, en behoort dus tot de meetkunde van de nulpunten van de polynomen van een complexe veranderlijke. Het bestuderen van de ligging van deze nulpunten gebeurt meestal met behulp van beschouwingen en methoden ontleend aan de theorie van de analytische functies. In wat volgt zullen we slechts gebruik maken van de meest eenvoudige operaties, die we met complexe getallen kunnen uitvoeren.

De meeste resultaten van de bedoelde theorie zijn z.g. separatiestellingen, beweringen die bedoelen aan te geven of en hoeveel nulpunten van zekere f(z) liggen in een of ander gebied van het complexe vlak. Separatiestellingen betreffende de reële nulpunten van reële polynomen zijn er vele; de meest bekende is wel de stelling van Rolle, die zegt, dat tussen twee reële nulpunten van f(z) minstens één nulpunt van f'(z) ligt.

2. Nadat in het begin van de 19e eeuw de complexe getallen geadopteerd waren, ontstond er een stroom van onderzoekingen over de ligging van de nulpunten van polynomen in het complexe vlak. Aan het begin van deze ontwikkeling staat de z.g. evenwichtsstelling van Gauss, later door Lucas (1879) geformuleerd als een resultaat omtrent de ligging van de nulpunten van f'(z), indien die van de nulpunten van f(z) bekend is. Deze stelling luidt:

Elke convexe veelhoek, die de nulpunten van f(z) insluit, sluit ook alle nulpunten van f'(z) in.

De bovengenoemde stelling kan als volgt worden geïnterpreteerd: zij $f(z)$ het polynoom

$$(z-z_1)^{m_1}(z-z_2)^{m_2}\dots(z-z_p)^{m_p}\ ,\quad n=\sum m_j,$$

dan zijn de nulpunten van $f'(z)$, die géén nulpunten van $f(z)$ zijn, de nulpunten van de functie

$$F(z) = \sum_{j=1}^{p} \frac{m_j}{z-z_j}\ .$$

Nu is

$$\overline{F(z)} = \sum_{j=1}^{p} \frac{m_j}{\overline{z}-\overline{z}_j}\ .$$

Het getal $\frac{m_j}{\overline{z}-\overline{z}_j}$ kan worden voorgesteld door een vector, die de richting heeft van z_j naar z, en waarvan de lengte gelijk is aan m_j maal het omgekeerde van de afstand van z_j tot z. Beschouw nu $\frac{m_j}{\overline{z}-\overline{z}_j}$ als de kracht waarmee een vaste massa m_j in z_j een eenheidsmassa in z afstoot, waarbij de wet van de afstoting de wet van de omgekeerde afstand volgt. $\overline{F(z)}$ stelt dan de resulterende kracht voor. De punten z, waarvoor $\overline{F(z)}$, en dus ook $F(z)$, gelijk aan nul wordt, zijn de evenwichtsposities van het geschetste centrale krachtenveld. Deze punten z kunnen niet buiten een convexe veelhoek, die de punten $z_1,z_2,\dots,z_p$ insluit, liggen. Nog andere physische interpretaties zijn mogelijk. Zie b.v. O.D. Kellogg, Potential Theory, Berlijn 1929, p.10, en L.M. Milne-Thomson, Theoretical Hydrodynamics, Londen 1938, p.197.

Een meetkundige interpretatie is vervat in de volgende stelling: De nulpunten van de functie

$$F(z) = \sum_{j=1}^{p} \frac{m_j}{z-z_j}\ ,\qquad m_j \text{ reëel},\ m_j\neq 0,$$

zijn de brandpunten van de kromme van de klasse $p-1$, die elk lijnsegment z_jz_k raakt in een punt, dat het lijnsegment verdeelt in de verhouding $m_j:m_k$.

Een bijzonder geval van bovengenoemde stelling is de volgende bewering:

<u>Is</u> $f(z)=(z-z_1)^{m_1}(z-z_2)^{m_2}(z-z_3)^{m_3}$, <u>dan zijn de nulpunten van $f'(z)$, die géén nulpunten van $f(z)$ zijn, de brandpunten van de ellips, die raakt aan de lijnsegmenten</u> $(z_1,z_2),(z_2,z_3)$ <u>en</u> (z_3,z_1) <u>in punten, die deze segmenten opvolgend verdelen in de verhouding</u> $m_1:m_2$, $m_2:m_3$ <u>en</u> $m_3:m_1$.

3. In de stelling van Gauss-Lucas zijn de nulpunten z_j van $f(z)$ onafhankelijke parameters. Als men nu bepaalde eisen oplegt aan de z_j, dan

kan men verwachten, dat het gebied van de nulpunten van $f'(z)$ verkleind wordt. Veronderstel bijv., dat $f(z)$ een reëel polynoom is, en dat dus de niet-reële nulpunten voorkomen in geconjugeerde imaginaire paren. Construeer dan de cirkels met middellijnen de lijnsegmenten, die deze paren van toegevoegde nulpunten verbinden. Deze cirkels heten cirkels van Jensen, genoemd naar de auteur van de volgende stelling (1913):

Elk niet-reëel nulpunt van een reëel polynoom ligt binnen of op minstens één van de cirkels van Jensen.

4. Men kan het aanvankelijk gestelde probleem omkeren: indien de ligging van de nulpunten van $f(z)$ gegeven is, kan dan de ligging van de nulpunten van de primitieve functie worden aangegeven? Over de oplossing van dit probleem is heel weinig bekend. Zie bijv. het boek van J.L. Walsh: The location of critical points of analytic and harmonic functions, Am.Math.Soc.Coll. Publ., Vol.34 (1950).

Wel kan men de volgende omkering geven van de stelling van Jensen. Zij $f(z)$ een reëel polynoom. Laten $a \pm ib$ $(b \neq 0)$ twee geconjugeerde complexe nulpunten zijn. Zij $H_{a,b}$ de orthogonale hyperbool, die de punten $a \pm ib$ tot toppen heeft. Dan geldt:

In het gesloten binnengebied van elke $H_{a,b}$ van een reëel polynoom ligt minstens één paar toegevoegd complexe wortels van de reële primitieve $\int_0^z f(\zeta)d\zeta + C$ (C reëel).

5. In wezen zijn de stellingen van Gauss-Lucas en Jensen resultaten betreffende de nulpunten van de functie

$$F(z) = \sum_{j=1}^{m} \frac{m_j}{z-z_j} .$$

Beschouw nu de uitdrukking

$$F(z) = \sum_{j=1}^{n} m_j \, f_j(z),$$

waarbij

$$f_j(z) = \frac{(z-a_{j1})\dots(z-a_{jp})}{(z-b_{j1})\dots(z-b_{jq})} ,$$

en waarbij m_j complex is met

$$\mu \leq \arg m_j \leq \mu + \gamma < \mu + \pi \quad (j=1,2,\dots,n).$$

Nu geldt de volgende generalisatie:

Zij K een convex gebied, waarin alle nulpunten a_{jk} en alle polen b_{jk} van elke $f_j(z)$ liggen. Zij ζ een punt van waaruit K gezien wordt onder een hoek kleiner dan $\phi = \frac{\pi-\gamma}{p+q}$. Dan is $F(\zeta) \neq 0$ (Morris Marden).

6. De belangrijkste resultaten van de theorie van de meetkunde der nulpunten van polynomen zijn samengebracht door Morris Marden in diens werk: Geometry of the Zeros of Polynomials in a Complex Variable, New York (1949). Dit boek bevat tevens een uitgebreide bibliografie, die vrijwel alle publicaties opsomt verschenen tot en met 1946.