STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1960 - 008

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

P.C. Baayen

29 oktober 1960

Ringen van continue functies

1960

ZW 1960-008

Voordracht in de serie "Actualiteiten"

door

P.C. Baayen

29 oktober 1960

Ringen van continue functies

1. Het doel van deze voordracht is een bespreking van het onlangs verschenen boek "Rings of continuous functions" door L. Gillman en M. Jerison. Dit boek behandelt de verschillende betrekkingen die bestaan tussen de topologische structuur van een ruimte X, en de algebraïsche eigenschappen van de ringen C(X) en $C^*(X)$, waar C(X) bestaat uit alle continue reëelwaardige functies op X, terwijl $C^*(X)$ wordt gevormd door alle begrensde continue reële functies.

De verschillende onderwerpen, die in dit boek aan de orde komen, kunnen uiteraard niet allen even uitvoerig worden besproken. Slechts een tweetal ervan, n.l. de (inmiddels klassieke) theorie van Gelfand en Kolmogoroff over de maximale idealen van C(X) en $C^*(X)$, en de theorie van de *reëelcompacte* ruimten, die door Hewitt begonnen is, zullen daarom iets vollediger worden belicht.

2. Zij X een willekeurige topologische ruimte. De verzameling C(X) der continue reëelwaardige functies op X wordt tot een ring door de gebruikelijke definities: $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$; $(f.g)(x)=f(x).g(x)$. Zij X^* de ruimte die uit X ontstaat door identificatie van punten x,y met $f(x)=f(y)$ voor alle $f \in C(X)$. Dan is $C(X)=C(X^*)$, en bovendien is X^* een volledig reguliere Hausdorff-ruimte. In het vervolg wordt daarom steeds aangenomen dat de beschouwde ruimten allen volledig regulier zijn.

Zij verder $\mathfrak{M}$ de verzameling van alle maximale idealen in C(X). Als $p \in X$, dan is de verzameling van alle $f \in C(X)$ met $f(p)=0$ een maximaal ideaal in $\mathfrak{M}$, aangeduid met M_p. Dergelijke maximale idealen heten *gefixeerd*. Als $M \in \mathfrak{M}$, en er is geen $p \in X$ zodat $M=M_p$, dan heet M *zwevend*. De afbeelding $p \rightarrow M_p$ is dus een afbeelding van X op de verzameling $\mathfrak{N}$ van alle gefixeerde idealen in $\mathfrak{M}$. Omdat X volledig regulier is, is deze afbeelding eeneenduidig.

Als X compact is, dan is ieder maximaal ideaal gefixeerd; dan is dus $p \rightarrow M_p$ een 1-1-afbeelding van X *op* $\mathfrak{M}$.

Zij verder $E(f) = \{ M \in \mathfrak{M} : f \in M \}$, voor $f \in C(X)$. Iedere E(f) is dus een deelverzameling van $\mathfrak{M}$. Een deelverzameling van $\mathfrak{M}$ heet *gesloten* als hij verkregen kan worden als doorsnede van verzamelingen $E(f)$. Dan blijkt hierdoor in $\mathfrak{M}$ een topologie gedefinieerd te zijn; en wel is $\mathfrak{M}$, in deze topologie, een compacte Hausdorff-ruimte.

<u>Stelling.</u> In de topologische ruimte $\mathfrak{M}$ is de verzameling $\mathfrak{N}$ van alle gefixeerde idealen overal dicht; en de afbeelding $p \rightarrow M_p$ van X op $\mathfrak{N}$ is een topologische afbeelding.

I.h.b. geldt dus (Gelfand-Kolmogoroff, 1939): als X compact is, dan is X homeomorph met $\mathfrak{M}$. Twee compacte ruimten X,Y zijn dus dan en slechts dan homeomorph, als hun ringen van continue functies $C(X)$, $C(Y)$ isomorph zijn.

Als X niet compact is, dan is $\mathfrak{M}$ dus te beschouwen als een compactificatie van X. En wel blijkt dit in principe de <u>Stone-Čech compactificatie</u> van X te zijn.

Van de Stone-Čech compactificatie wordt in het boek van Gillman en Jerison zeer veel gebruik gemaakt; op zeker drie verschillende wijzen wordt hij ingevoerd. Deze compactificatie, gewoonlijk aangeduid met βX, en die bestaat voor iedere volledig reguliere ruimte X, is volledig vastgelegd (d.w.z. op een topologische afbeelding na) door elk van de volgende (equivalente) eigenschappen:

(I) Iedere continue afbeelding τ van X in een compacte ruimte Y kan continu voortgezet worden tot een afbeelding $\bar{\tau}$ van βX in Y.

(II) Iedere $f \in C^*(X)$ heeft een continue voortzetting $f^\beta \in C(\beta X)$

(waar $C^*(X)$ de deelring van $C(X)$ is die bestaat uit alle <u>begrensde</u> $f \in C(X)$).

Als we het verband tussen $\mathfrak{M}$ en βX expliciet willen aangeven, is het nuttig, de volgende notatie te gebruiken: voor $f \in C(X)$ zij $Z(f) = \{ x : f(x) = 0 \}$. Verder zij de afsluiting in βX van een verzameling A aangegeven met $\mathrm{cl}_{\beta X} A$. Tenslotte zij $M^p = \{ f \in C(X) : p \in \mathrm{cl}_{\beta X} Z(f) \}$, voor $p \in \beta X$. Dan geldt
<u>Stelling</u> (Gelfand-Kolmogoroff): voor iedere $p \in \beta X$ is M^p een maximaal ideaal in $C(X)$; en wel is de $p \longrightarrow M^p$ een topologische afbeelding van βX <u>op</u> $\mathfrak{M}$.

Als $p \in X$, dan is blijkbaar $M^p = M_p$; d.w.z. $p \rightarrow M^p$ $(p \in \beta X)$ is een voortzetting van de bovenbeschreven afbeelding $p \rightarrow M_p$ $(p \in X)$.

Verder geldt, dat $C(\beta X)$ isomorph is met $C^*(X)$. Omdat βX compact is, is βX homeomorph met de ruimte der maximale idealen van $C(\beta X)$; en dus is βX ook homeomorph met de ruimte $\mathfrak{M}^*$ van de maximale idealen van $C^*(X)$. I.h.b. zijn dus $\mathfrak{M}$ en $\mathfrak{M}^*$ topologisch equivalent.

3. Eigenschap (II) van de Stone-Čech compactificatie van X zegt dat X C^*-ingebed is in βX. Een ruimte X heet nl. C^*-ingebed in een ruimte Y, als X een deelruimte is van Y, terwijl $C^*(X)=\{f|X: f \in C^*(Y)\}$; en een deelruimte X van Y heet C-ingebed in Y als $C(X)=\{f|X:f \in C(Y)\}$. Als X C-ingebed is in Y, dan is X ook C^*-ingebed in Y; maar het omgekeerde geldt niet algemeen.

Aan de mogelijkheden tot C-inbedding of C^*-inbedding van een ruimte X in een prettiger ruimte Y wordt in het boek van Gillman en Jerison vrij veel aandacht besteed. Voor C^*-inbedding is de Stone-Čech compactificatie van groot belang: niet alleen is X altijd, zoals boven opgemerkt is, C^*-ingebed in βX; omgekeerd geldt ook: als X C^*-ingebed is in Y, en X is dicht in Y, dan is $X \subset Y \subset \beta X$.

Maar voor het bestuderen van C-inbedding is βX niet zo geschikt. Immers, βX is compact; iedere continue functie op βX is dus begrensd; en géén onbegrensde $f \in C(X)$ kan dus continu worden voortgezet tot een functie in $C(\beta X)$.

Er blijkt echter een soort ruimte te zijn, die t.o.v. C-inbedding dezelfde rol speelt als de compacte ruimten t.o.v. C^*-inbedding; en dit zijn de reëelcompacte ruimten.

4. Voordat we de reëelcompacte ruimten kunnen definiëren moeten we nog enige aandacht geven aan de maximale idealen in C(X). Deze zijn reeds geclassificeerd in zwevende en gefixeerde maximale idealen; maar er is ook een andere indeling, die van belang blijkt te zijn, en wel naar de eigenschappen van de restklassenlichamen C(X)/M.

Als M een maximaal ideaal is, dan is, zoals bekend, C(X)M een lichaam; bovendien laat de ordening van C(X) zich overdragen naar C(X)/M, en wel blijkt dat C(X)/M altijd lineair geordend is. Als we met M(f) de restklasse mod. M van een element $f \in C(X)$ aanduiden, dan is de ordening van C(X)/M vastgelegd door: $M(f) \geq 0$ dan en slechts dan als er een $g \geq 0$ in C(X) is met $f \equiv g \pmod M$.

Bovendien bevat C(X)/M altijd een copie van het lichaam R der reële getallen, nl. de restklassen $M(\bar{r})$ voor $r \in R$, waar $\bar{r}$ de functie in C(x) is met $\bar{r}(x) = r$, voor alle $x \in X$.

Nu zijn er twee mogelijkheden: (1) C(X)/M bestaat juist uit deze restklassen $M(\bar{r})$, d.w.z. $C(X)/M \simeq R$; dan heet het maximale ideaal M een reëel ideaal. En (2): C(X)/M is niet isomorph met R; in dit geval heet M een hyper-reëel maximaal ideaal.

Het is vrij eenvoudig aan te tonen dat ieder gefixeerd maximaal ideaal een reëel ideaal is. Als nu ook het omgekeerde geldt, d.w.z.

als ieder reëel ideaal een gefixeerd ideaal is, dan heet de ruimte reëelcompact (Hewitt, 1948).

Een ruime categorie reëelcompacte ruimten wordt gegarandeerd door de volgende stelling.

Stelling. Iedere Lindelöff ruimte is reëelcompact.

I.h.b. is iedere ruimte met een aftelbare basis van open verzamelingen reëel-compact, dus b.v. iedere separabele metrische ruimte.

Evenals voor compacte ruimten geldt hier: twee reëelcompacte ruimten X,Y zijn dan en slechts dan topologisch equivalent als $C(X) \cong C(Y)$.

De plaats van de compactificatiestelling van Stone-Čech wordt in de theorie van de reëelcompacte ruimten ingenomen door de reëelcompactificatiestelling van Hewitt en Nachbin:

Stelling. Bij iedere volledig reguliere ruimte X is er een reëelcompactificatie υX (d.w.z. een reëelcompacte ruimte υX waarin X dicht is) die (op topologische equivalentie na) ondubbelzinnig bepaald is door elk van de volgende (equivalente) eigenschappen:

(I*) Iedere continue afbeelding τ van X in een reëelcompacte ruimte Y kan continu worden voortgezet tot een afbeelding τ^{o} van υX in Y.

(II*) Iedere $f \in C(x)$ heeft een continue voortzetting $f^{\upsilon} \in C(\upsilon X)$ (i.e. X is C-ingebed in υX).

Aangezien X overal dicht is in υX, en verder, volgens (II*), C-ingebed in υX, dus ook C^*-ingebed in υX, kunnen we υX zó kiezen dat $X \subset \upsilon X \subset \beta X$. Inderdaad wordt υX gewoonlijk geconstrueerd als deelruimte van βX. Wanneer we de met βX topologisch equivalente ruimte $\mathfrak{M}$ van alle maximale idealen van $C(X)$ beschouwen, dan is υX topologisch equivalent met de deelruimte van $\mathfrak{M}$ die bestaat uit alle reële maximale idealen.

M.a.w. de afbeelding $p \to M^{p} = \{ f \in C(X) \ : \ p \in cl_{\beta X} Z(f) \}$ beeldt βX topologisch af op de ruimte $\mathfrak{M}$ van alle maximale idealen van $C(X)$; beeldt υX af op de deelruimte bestaande uit alle reële maximale idealen van $C(X)$; en beeldt X af op de deelruimte van alle gefixeerde maximale idealen van $C(X)$.

Parallel met het feit dat $C(\beta X) \simeq C^*(X)$ is de eigenschap: $C(\upsilon X) \simeq C(X)$. Parallel met de Tychonoff productstelling voor compacte ruimten is de stelling dat een willekeurig product van reëelcompacte ruimten weer reëelcompact is. Ook is bv. iedere gesloten deelverzameling van een reëelcompacte ruimte weer reëelcompact.

Interessant is ook het volgende resultaat: als X reëelcompact is, dan bestaat de doorsnede van alle zwevende maximale idealen in C(X) juist uit alle continue functies met compacte drager. (In een willekeurige ruimte X geldt, dat de doorsnede van alle zwevende maximale idealen in C (X) juist bestaat uit alle functies die 0 zijn in de verte).

Ook de volgende stelling van Shirota (1952) is van belang (Gillman en Jerison wijden er een apart hoofdstuk aan): als aan een (uiterst zwakke) voorwaarde betreffende de cardinaalgetallen van de beschouwde ruimten is voldaan, dan zijn de reëelcompacte ruimten juist die ruimten die een uniforme structuur toelaten waarin ze volledig zijn.

5. Het voorgaande belicht, zoals gezegd, slechts enkele van de onderwerpen die in "Rings of continuous functions" behandeld worden. Zo worden ook de restklassenlichamen C(X)/M, voor hyperreële M, uitvoerig bestudeerd. Deze lichamen zijn niet-archimedisch geordend, zijn reëel-afgesloten, hebben over R een transcendentiegraad die tenminste het cardinaalgetal van het continuum is, en bezitten vele merkwaardige eigenschappen.

Behalve de maximale idealen van C(X) en $C^*(X)$ worden ook, algemener, de priemidealen in deze ringen onderzocht. Een van de langste hoofdstukken (hoofdstuk 14) is aan dit onderzoek gewijd.

De theorie van de reëelcompacte ruimten wordt toegepast voor verzameling-theoretische onderzoekingen betreffende transfiniete cardinaalgetallen, terwijl naar aanleiding van de hyperreële restklassenlichamen, C(X)/M, en van de priemideaal-theorie, ook enige ordeningstypen van abstracte verzamelingen onderzocht worden.

Het laatste hoofdstuk, tenslotte, geeft een uiteenzetting van de dimensietheorie van Katětov, die het mogelijk maakt de (Lebesgue-) dimensie van een volledig reguliere ruimte X te bepalen uit de algebraische structuur van C(X).

Literatuur:

L. Gillman en M. Jerison, Rings of continuous functions. Princeton, 1960.

I. Gelfand en A. Kolmogoroff, On rings of continuous fonctions on topological spaces. Dokl. Ak. Nauk SSSR 22 (1939), 11-15.

E. Hewitt, Rings of real-valued continuous functions, I. Trans.Am.Math. Soc. 64 (1948), 54-99.

T. Shirota, A class of topological spaces. Osaka Math.J. 4 (1952), 23-40.