STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1961 - 008

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

Prof.dr. E.M. Bruins

Projectieve Metrisatie en Euclides' Stoicheia I

29 november 1961

1961
ZW

Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

door

Prof.dr. E.M. Bruins

Projectieve Metrisatie en Euclides' Stoicheia I

29 november 1961

A. Projectieve metrisatie van het binaire gebied

Een binaire vorm met twee veranderlijken wordt symbolisch voorgesteld door machten van lineairvormen:

$$a_x^n \alpha_y^m,$$

$$a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2, \quad a_i a_\kappa = a_\kappa a_i, \quad \alpha_i \alpha_\kappa = \alpha_\kappa \alpha_i,$$

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \alpha_{\kappa_1 \kappa_2 \ldots \kappa_m} = \text{complex getal}.$$

Een dergelijke vorm is te ontwikkelen in de reeks van Gordan-Capelli -- de tegenhanger van de reeks van Taylor bij inhomogene coördinaten --:

$$a_x^n \alpha_y^m = \sum_\kappa \frac{\binom{n}{\kappa}\binom{m}{\kappa}}{(m+n-\kappa+1)} (xy)^\kappa \Delta_{xy}^{m-\kappa} (a\alpha)^\kappa \; a_x^{n-\kappa} \alpha_x^{m-\kappa}$$

waarin de haakfactor $(pq) = p_1 q_2 - p_2 q_1$ en $\Delta_{xy}^t \varphi_x^s = \varphi_x^{s-t} \varphi_y^t$.

Projectieve invarianten zijn functies van haakfactoren en lineairfactoren. Metrisatie ontstaat door het aangeven van een functie $s(x,y) \not\equiv 0$ met de eigenschap

$$s(x,y) + s(y,x) = 0 \quad \{x,y\} .$$

Hieruit volgt $s(x,x)=0$, doch uit $s(x,y)=0$ volgt niet noodzakelijk $x \equiv y$.

Een projectief invariante metrisatie ontstaat als $s(x,y)$ invariant is bij projectieve transformaties. Alsdan wordt $s(x,y)$ een functie van een absolute invariant I, welke symbolisch kan worden voorgesteld door

$$I = \frac{b_x^n \beta_y^m}{a_x^n \alpha_y^m} , \quad \text{waaruit } \gamma = \frac{a_x^n \alpha_y^m - b_x^n \beta_y^m}{a_x^n \alpha_y^m} .$$

Hier heeft γ de eigenschap, dat voor x=y, dus $s(x,y)=0$, óók $\gamma=0$ wordt. Er gelden nu verschillende metrisaties, overeenkomende met de eigenschappen van de twee (n,m)-verwantschappen:

I. Stemmen de reeksen van Gordan-Capelli van $a_x^n \alpha_y^m$ en $b_x^n \beta_y^m$ overeen tot aan de κ-de term, dan vindt men, met y=x+dx, dat de differentiaalmeetkunde beheerst wordt door

$$(ds)^{\kappa} = \frac{\psi_x^{N-2\kappa}}{\varphi_x^N}(dx)^{\kappa}.$$

Voor k=1 ontstaat s als integraal van een rationale functie, zodat als $\varphi_x^N=0$ geen meervoudige wortels heeft,

$$s = \mu \ \ln\left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{t_1}\left(\frac{q_x}{q_y}\right)^{t_2}\dots\left(\frac{r_x}{r_y}\right)^{t_N}, \quad \mu = \text{maatconstante},$$

p,q,..r lineairfactoren van φ_x^N.

Voor k=2 ontstaat metrisatie met behulp van hyperelliptische integralen, terwijl de "Analyse" integralen voor $k > 2$ nog niet heeft aangedurfd. Stemmen de reeksen in alle termen overeen dan is $I \equiv 1$, $\delta \equiv 0$ en deze "invarianten" zijn onbruikbaar voor metrisatie.

II. Heeft men vormen met één variabele dan kan men invarianten I, δ vormen:

$$I = \frac{b_x^n \cdot \beta_y^m}{a_x^n \cdot \alpha_y^m}, \qquad \delta = \frac{a_x^n \alpha_y^m - b_x^n \beta_y^m}{a_x^n \alpha_y^n}.$$

Men kan onderstellen, dat $a_x^n=0$ en $b_x^n=0$ -- en evenzo $\alpha_x^n=0$ en $\beta_x^n=0$ -- géén lineairfactor gemeen hebben. Dan volgt uit $\delta(x,x) \equiv 0 \{x\}$ dat:

$$n = m,$$

zodat gesteld kan worden $a_x^n \equiv \beta_x^n$, $b_x^n \equiv \alpha_x^n$
en

$$\delta = \frac{a_x^n \alpha_y^n - a_y^n \alpha_x^n}{a_x^n \alpha_y^n}.$$

De eerste term in de ontwikkeling van de teller van δ is op een constante na

$$(xy) \cdot \Delta_{xy}^{n-1} (a\alpha) a_x^{n-1} \alpha_x^{n-1}.$$

Is de Jacobiana $J=(a\alpha)a_x^{n-1}\alpha_x^{n-1} \equiv 0\{x\}$ dan is $a_x^n \equiv \alpha_x^n$ en $I \equiv 1$, $\delta \equiv 0$, alles op een constante factor na.

De differentiaalmeetkunde leidt dus bij twee vormen f, φ steeds tot

$$ds = \mu \frac{J}{f \cdot \varphi} dx.$$

Deze differentiaalvergelijking is gemakkelijk oplosbaar en levert

$$s(x,y) = \mu \ln \frac{f_x \varphi_y}{f_y \varphi_x} .$$

De nulpunten van f=0 en φ=0 liggen respectievelijk op afstanden $-\infty$ en $+\infty$ van alle overige punten.

III. Is slechts één vorm gegeven, dan kan men de absolute invarianten

$$I = \frac{\left[a_x^n a_y^m\right]^{n+m}}{\left[a_x^{n+m}\right]^n \cdot \left[a_y^{n+m}\right]^m}$$

vormen en eenvoudige reeksontwikkeling levert dan voor de differentiaalmeetkunde

$$ds^2 = \frac{H}{f^2}\, dx^2 \; ; \quad H=(ab)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2}, \text{ de Hessiana.}$$

Is $H \equiv 0 \; \{x\}$ dan is f een zuivere (n+m)-de macht. Er is dan naast x,y, slechts één punt gegeven, waarmede geen projectieve metrisatie mogelijk is.
Op vormen met één variabele gebaseerde projectieve metrisaties zijn dus steeds op lineaire of quadratische differentiaalvormen gebaseerd. Dit is een onnodige restrictie!

B. Speciale gevallen

I. Het eenvoudigste voorbeeld van een "hogere graads differentiaalmeetkunde" wordt verkregen uit 3-3 verwantschappen $a_x^3 \alpha_y^3$ en levert de vorm

$$ds = \mu \frac{dx}{\sqrt[3]{\varphi_x^6}} .$$

Dit is reeds een geval, waarbij de "Analyse" ons in de steek laat!

II. De punten op een gegeven afstand van een vast punt y vormen n-tupels

$$a_x^n \alpha_y^n - \lambda a_y^n \alpha_x^n = 0$$

en dus bij variërende afstand een bundel n-tupels.

a. Voor n=1 volgt

$$s = \mu \ln \frac{a_x \alpha_y}{a_y \alpha_x} .$$

Zijn A en B de nulpunten van a_x=0 en α_x=0 dan is dus

$$s = \mu \ln DV((ABxy)).$$

Men vindt hier de normale niet-euclidische metrisatie met expliciet aangegeven basispunten, zoals ook evident is uit het lijnelement, dat met $a_x \alpha_x = \varphi_x^2$ wordt

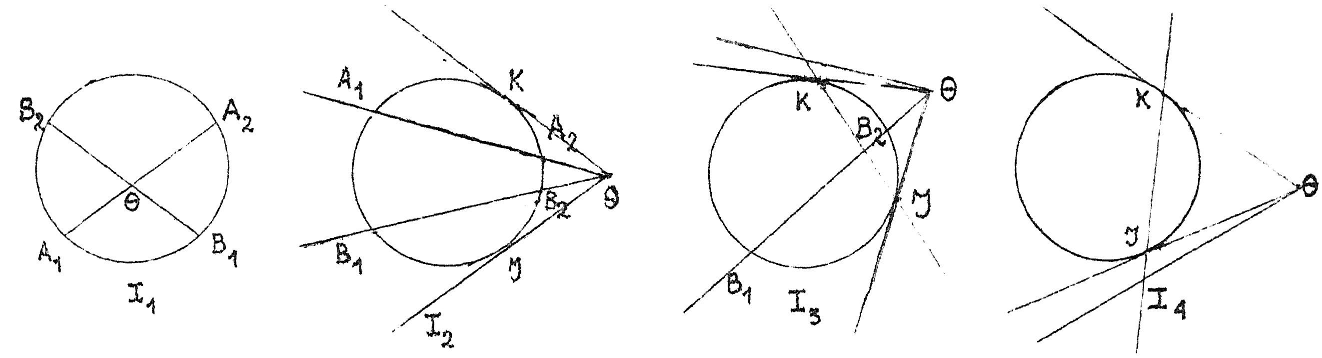
$$ds = \mu \frac{dx}{\varphi_x^2} .$$

Brengt men φ_x^2 op de vorm x^2+1 of x^2-1 dan volgt

$$s = \mu(\text{bgtg } x - \text{bgtg } y)$$

$$s = \mu(\text{bgtgh } x - \text{bgtgh } y).$$

b. Voor n=2 hebben de twee quadratische vormen een Jacobiana $\theta_x^2 = (a\,\alpha)a_x\alpha_x$ en de paren punten op constante afstand vormen paren van de involutie met dubbelpunten $\theta_x^2=0$. Bij het gebruik van een kegelsnede als drager van het binair gebied liggen punten met dezelfde afstand tot x collineair met θ (fig.I). Het eenvoudigste geval doet zich voor als $\theta_x^2 = 0$ geen reële wortels heeft (fig.I_1).



De kegelsnede wordt verdeeld in vier segmenten: punten uit tegenoverliggende segmenten hebben reële afstand; punten uit nevenliggende segmenten hebben complexe afstand. Twee punten uit éénzelfde segment hebben steeds een reële afstand, die in $A_1(A_2)$ negatief oneindig, in $B_1(B_2)$ positief oneindig wordt. Niet elk tweetal op eindige afstand gelegen, is door een "ε-ketting" te verbinden. Men heeft een niet-archimedische metrisatie.

Hebben beide vormen reële nulpunten (fig. I_2) dan varieert de afstand van een punt x op A_2B_2 gelegen van $-\infty$ tot $+\infty$ over A_2xB_2. De afstand tot I varieert over B_1IB_2 van $+\infty$ over nul tot $+\infty$, met telkens twee punten op dezelfde positieve afstand, en op $A_1 K A_2$ van $-\infty$, tot een negatieve maximumwaarde in K, weer naar $-\infty$.

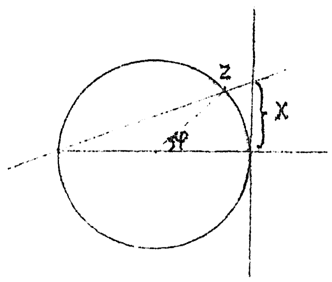
Heeft één der vormen complexe nulpunten (fig.I_3) dan varieert de afstand tot I op B_1IB_2 van $+\infty$ tot $+\infty$ en voor andere punten is de afstand complex.

Hebben beide vormen complexe nulpunten, dan liggen alle reële punten (paarsgewijs) op eindige afstand van I.

n=3. Twee kubische vormen leveren twee ingeschreven driehoeken, waarvan de zijden raken aan één kegelsnede. De sluitings-driehoeken vormen de bundel van punten op onderlinge afstand nul.

n=N. Projecteert men de lineaire drager volgens

$$t = 2x = 2\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\varphi$$



dan is

$$z = e^{i\varphi} = \frac{t+i}{t-i}$$ en $(\alpha z)^n - 1 = 0$ levert een bundel regelmatige n-hoeken in de het binaire gebied dragende cirkel. Is $R(t+i)^n = P(x)$ en $I(t+i)^n = Q(x)$ dan wordt

$$s = \mu \ln \frac{P(x)Q(y)}{P(y)Q(x)}$$

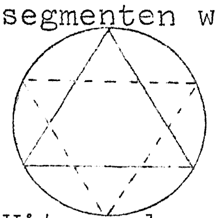
en alle hoekpunten van één regelmatige n-hoek hebben onderlinge afstand nul, doch slechts $\frac{1}{2n}$ - deel van de cirkel kan met een ε-ketting worden bereikt.

Het is niet nodig, dat de vormen "onafhankelijk" zijn. Reeds een kubische vorm f heeft één kubische covariant; de biquadratische vorm eveneens één biquadratische; hogere graads vormen hebben verschillende covarianten van dezelfde graad.

Voor n=3 in het geval van één reëel nulpunt geldt dan

$$f = x^3+1 \qquad Q=x^3-1 \qquad s = \mu\{\mathrm{bgth}\ x^3 - \mathrm{bgtgh}\ y^3\}$$

terwijl in het geval van drie nulpunten het binaire gebied in zes segmenten wordt verdeeld en verkregen wordt



$$f=x^3-3x \qquad Q=3x^2-1 \qquad s = \mu \ln \frac{(x^3-3x)(3y^2-1)}{(3x^2-1)(y^3-3y)}\ .$$

III. Uitgaande van één enkele vorm levert

n=2 a_x^2, $H=(ab)^2$, $ds = \mu \dfrac{dx}{a_x^2}$, de "normale" niet-euclidische maatbepaling.

Voor n=3 ontstaat

$$ds^2 = \frac{\Delta}{f^2}\,dx^2$$

met de "typen"

$$f = x^3+1\ , \qquad ds = \mu \frac{\sqrt{x}}{x^3+1}\,dx, \qquad s = \mu^*[\,\mathrm{bgtg}\ x^{3/2} - \mathrm{bgtg}\ y^{3/2}\,]$$

$$f = x^3-3x, \qquad ds = \mu \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^3-3x}\,dx,$$

in alle gevallen elementaire berekenbaarheid van $s(x,y)$.

C. Projectieve metrisatie van het ternaire gebied.

I. Gaat men uit van twee tussenvormen $(au')^m(\alpha'x)^n$ dan zal een comitant van het type (bij gebruik ter metrisatie)

$$I = \frac{(au')^m(\alpha'x)^n \cdot (bu')^\mu \, (\beta'y)^n}{(au')^m(\alpha'y)^n \cdot (bu')^\mu \, (\beta'x)^n} \qquad u'=(xy)$$

steeds opleveren, dat in elk punt "isotrope richtingen", met afstand nul, voorkomen maar óók richtingen, waar de afstand oneindig groot blijft voor punten met infinitesimaal verschillende coördinaten. Hoewel hiertegen theoretisch geen bezwaren bestaan, kan dit optreden slechts vermeden worden door connexen of krommen als uitgangspunt te kiezen.

II Baseren op een tweetal (m,n)-connexen met

$$I = \frac{(b'x)^n(\beta'y)^m}{(a'x)^n(\alpha'y)^n}$$

levert, volgens de reeks van Gordan-Capelli, als teller en noemer bij ontwikkeling daarin eerst in de k-de term verschillen:

$$\text{dus} \quad \frac{(ds)^\kappa = \dfrac{(\varphi u')^\kappa(\psi'x)^{n+m-2\kappa}}{(\omega'x)^{n+m}}, \quad u'_i=(x\,dx)_i \quad dx_3=0}{u' = [dx_2, -dx_1, x_2dx_1-x_1dx_2]}$$

III. Baseren op een krommenpaar levert weer dat de krommen van dezelfde graad moeten zijn en de reeks van Gordan-Capelli levert uit

$$I = \frac{(a'x)^n \cdot (\alpha'y)^n}{(a'y)^n \cdot (\alpha'x)^n}$$

$$ds = \frac{(a'\alpha'u')(a'x)^{n-1}(\alpha'x)^{n-1}}{(a'x)^n(\alpha'x)^n} \; ; \quad u' \text{ als boven}$$

Integratie is eenvoudig en levert:

$$\underline{s(x,y) = \mu \ln \frac{(a'x)^n(\alpha'y)^n}{(a'y)^n(\alpha'x)^n}},$$

tenzij $(a'\alpha'u')(a'x)^{n-1}(\alpha'x)^{n-1} \equiv 0 \; \{u'\}$ is hetgeen inhoudt: $(a'x)^n = \text{const.}(\alpha'x)^n$.

Krommen van constante afstand tot y vormen de bundel

$$(a'x)^n(\alpha'y)^n - \lambda(a'y)^n(\alpha'x)^n = 0;$$

alle punten op één kromme van de bundel hebben de onderlinge afstand nul. Er geldt steeds:

$$s(x,y) + s(y,z) + s(z,x) = 0,$$

dus géén driehoeksongelijkheid en de afstand van twee punten wordt vastgelegd door een projectieve binaire maatbepaling in de raaklijnenwaaier aan de basispunten S:

$$(a'S)^{n-1}(a'x)\cdot(\alpha'y)^{n} - \lambda(\alpha'S)^{n-1}(\alpha'x)\cdot(a'y) = 0.$$

IV. Bij gebruikmaking van slechts één kromme ontstaat analoog aan het binaire geval

$$ds^2 = \frac{\theta}{f^2},$$

$$\text{waarin} \quad \underline{\theta = (a'b'u')^2(a'x)^{n-2}(b'x)^{n-2}}$$

de overdraging van de Hessiana is. Door elk punt gaan twee isotrope richtingen. Deze vallen samen als $H=(a'b'c')^2(a'x)^{n-2}(b'x)^{n-2}(c'x)^{n-2}=0$. Dit is evident uit de niet-symbolische vorm van θ

$$\theta \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & u_1' \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & - - - - - - & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} & u_3' \\ u_1' & - - - - - - & u_3' & 0 \end{vmatrix}$$

Is $\underline{H \equiv 0}$ dan vallen de isotrope lijnen overal samen, de kromme f=0 bestaat dan echter uit een stelsel in σ concurrente lijnen. De metrisatie van het vlak volgt dan uit de projectieve metrisatie van de waaier aan σ. Lijnen van constante afstand tot x zijn rechte lijnen door σ!!

Is $\underline{\theta \equiv 0 \{u_j'x\}}$ dan is f=0 één rechte, meervoudig geteld eventueel, en daarop kan geen afstandsmeting projectief invariant worden gebaseerd.

Opgemerkt dient nog te worden, dat voor lineaire ds een Gauss-sche oppervlaktemeting voor elke figuur een <u>oppervlakte nul</u> levert.

Duaal met deze ontwikkeling verloopt de <u>hoekmeting</u>. Wil men deze aan één en dezelfde kromme uitvoeren, dan dienen graad en klasse gelijk te zijn.

Voor n=2 is dit <u>steeds</u> het geval. Hier ontstaat de "normale" niet-

euclidische maatbepaling. Er is een drieledige "bewegingsgroep". Voor $n=3$ kan dit slechts voor een kromme met een keerpunt en er is een éénledige bewegingsgroep.
Voor $n=4$ moet de basiskromme één dubbelpunt en twee keerpunten hebben. Hoekmeting en afstandsmeting zijn echter onafhankelijk vast te leggen!!

II. Voorbeelden en toepassingen.

a. Neemt men twee reële rechten $(a'x)=0$ en $(\alpha'x)=0$ als basis voor een projectieve metrisatie dan zijn lijnen van constante afstand tot x rechte lijnen door het snijpunt $\sigma=(a'\alpha'u')=0$. Er geldt steeds

$$s(x,y)+s(y,z)+s(z,x)=0,$$

dus de omtrek van een driehoek is nul. Er bestaan géén gelijkzijdige driehoeken (met niet nul zijnde zijden) met reële hoekpunten. Euclides I,1 geldt dus niet!
Men kan op elke willekeurige rechte l door het punt X een afstand afzetten gelijk aan de afstand van twee gegeven punten! Dit komt neer op de lineaal-constructie van het vierde punt Y zó dat voor de dubbelverhoudingen geldt

$$((S_1S_2xy)) = ((S_1'S_2'XY))$$

als S_1,S_2 de snijpunten van xy met $(a'x)=0$ en $(\alpha'x)=0$ voorstellen en S_1',S_2' het analoge voor de rechte XY.
Euclides gebruikt I,1 allereerst voor het overbrengen van lijnsegmenten. Daarvoor behoeft de gebruikte driehoek niet gelijkzijdig te zijn; evenals in andere gevallen komt men met een ε-ketting van gelijkbenige driehoeken tot het doel! Daarom gelden I,2 en I,3 óók in de hier beschouwde meetkunde!!

Voert men onafhankelijk en completerend een hoekmeting in die met de Euclidische overeenkomt dan geldt I,4 niet: Een driehoek is niet bepaald door twee zijden en de daardoor ingesloten hoek.
Men kan aan elk punt x een driehoek construeren, die in x twee voorgeschreven zijden onder voorgeschreven hoek heeft en die nóg een hoek voorgeschreven krijgt, en wel op twee wijzen! De toevoeging aan Euclides I,4 na het bewijs, dat twee verschillende lijnen een oppervlakte omsluiten en dus slechts één driehoek mogelijk is vervalt als onjuist: alle oppervlakten kunnen nul zijn!
Het vlak bestaat hier uit twee gebieden, die onderling voor hun punten een complexe afstand leveren.

b. Kiest men twee toegevoegd complexe rechten door $\mathcal{O}$ als fundamentaalrechten, dan kan men, door passende keuze van maatconstanten etc. bereiken, dat de afstand $s(x,y)$ gelijk is aan de hoek $x\mathcal{O}y$. Er bestaan driehoeken met omtrek nul en met omtrek 2π al naar gelang $\mathcal{O}$ binnen of buiten de driehoek ligt. Er bestaan nu gelijkzijdige driehoeken: daarvan is de zijde steeds $\frac{2\pi}{3}$. Is een lijnstuk van deze lengte gegeven, dan is er een stelsel van ∞^1 driehoeken, die gelijkzijdig zijn en dit lijnstuk tot basis hebben, de m.p. der derde hoekpunten is een rechte door $\mathcal{O}$.

Opgemerkt dient te worden, dat Euclides ἄπειρος "onbegrensd", d.i. zonder eindpunten met ἄμετρος "onmeetbaar groot" "door elkander" gebruikt. Het axioma, dat een begrensde rechte "κατὰ τὸ συνεχὲς", samenhangend, d.i. continu, kan worden verlengd sluit niet noodzakelijk een eindige totaallengte van de rechte uit: Ook op de euclidische bol bestaan gelijkzijdige boldriehoeken en wel voor elke zijdelengte, die één derde van de totaallengte van een grote cirkel niet overschrijdt. Het is overbekend, dat de bewijzen van Euclides I niet alle correct zijn in verband met dergelijke "orderelaties", b.v. I,9; I,12; I,16 enz.

c. Afstandsbepaling en hoekmaat uit $(a'x)^2=0$, $(a'b'u')^2 \equiv (au')^2=0$. De ternaire metrisatie met een kegelsnede is gebaseerd op

$$I = \frac{(a'x)(a'y)\cdot(b'x)(b'y)}{(a'x)^2\cdot(b'y)^2} .$$

Deze leidt tot de differentiaalmeetkunde

$$ds^2 = \mu \frac{(ax\ dx)^2}{[(a'x)]^2} .$$

Krommen van, al dan niet reële, constante afstand tot y zijn

$$(a'x)^2(b'y)^2 - \lambda(a'x)(a'y)\cdot(b'x)(b'y) = 0$$

en deze vormen dus een dubbelrakende bundel -- type $[\,\bar{2}\,]$ -- met de poollijn van y ten opzichte van $(a'x)^2=0$ als dubbelrechte. Is de kegelsnede reëel, dan is voor y in het binnengebied sprake van een "cirkel om y" en voor y in het buitengebied gaat het om "evenwijdige lijnen" aan de poolrechte. Is de kegelsnede zuiver complex, dan is er onder de cirkels één rechte lijn, de poollijn van y, die op "halve totaalafstand" ligt.

Men berekent, hetzij uit de dubbelverhouding $((S_1S_2xy))$, hetzij uit het "lijnelement" eenvoudig, dat

$$s(x,y) = \mu \text{ bg th}\sqrt{\frac{(axy)^2}{(a'x)^2(b'y)^2}} = \mu \text{ bg cosh } \frac{(a'x)(a'y)}{\sqrt{(a'x)^2(b'y)^2}} .$$

De <u>trigonometrie</u> wordt geleverd door de identiteit

$$\cosh \mu(x,y) = \cosh \mu(x,z)\cosh \mu(y,z) - \text{sh}\, \mu(x,z)\, \text{sh}\, \mu(y,z) \cosh MZ.$$

Bewijs: Stelt men $(a'x)^2$ voor door f_x en $(a'x)(a'y)$ door Δ_{xy} dan volgt

$$\left(\frac{\Delta_{xy}}{\sqrt{f_x f_y}} - \frac{\Delta_{xz}\Delta_{yz}}{f_z\sqrt{f_x f_y}} \right) : \frac{\sqrt{f_x f_z - \Delta_{xz}^2} \cdot \sqrt{f_y f_z - \Delta_{yz}^2}}{f_z \sqrt{f_x f_y}} =$$

$$= \frac{(axz)(ayz)}{\sqrt{(axz)^2(byz)^2}} = \cosh MZ ,$$

want $f_x f_z - \Delta_{xz}^2 = (a'x)^2(b'z)^2 - (a'x)(a'z)(b'x)(b'z) = (a'x)(b'z)(a'b'(xz)) =$

$$= \tfrac{1}{2}(a'b(xz))(a'b'(xz)) = (axz)(axz) = (axz)^2.$$

Met weglating der maatconstanten volgt dus voor een driehoek met zijden a,b,c

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma .$$

Hieruit is allereerst duidelijk, dat als $a=c$ óók $\alpha = \gamma$ is.
Berekent men $\sin^2\gamma$ dan volgt

$$(\cos a \cos b - \cos c)^2 = \sin^2 a \sin^2 b\,(1-\sin^2\gamma)$$

dus

$$\sin^2 a \sin^2 b \sin^2\gamma = \sin^2 a \sin^2 b - (\cos a \cos b - \cos c)^2$$

$$= [\sin a \sin b + \cos a \cos b - \cos c][\sin a \sin b - \cos a \cos b + \cos c]$$

$$= [\cos(a-b) - \cos c]\,[\cos c - \cos(a+b)] =$$

$$= 4 \sin \frac{a+b+c}{2} \sin \frac{c-a-b}{2} \sin \frac{a-b+c}{2} \sin \frac{a-b-c}{2} .$$

Is dus $a > b > c$ dan <u>moet</u> <u>$a < b+c$</u> d.i. <u>de driehoeksongelijkheid</u> gelden.

Tevens volgt

$$\sin b \sin \gamma = \sin c \sin \beta , \text{ de "}\underline{\text{sinusregel}}\text{"}$$

en daarmede alle analoga van de "boldriehoeksmeting".

Ten opzichte van een reële kegelsnede, waarvan de vergelijking $x^2+y^2-1=0$ gekozen kan worden geldt

$$ds^2 = \frac{dy^2+dx^2-(y\ dx-x\ dy)^2}{(x^2+y^2-1)^2}$$

1. $x^2+y^2-a^2=0$ is een "cirkel om $\mathcal{O}(0,0)$" met straal th a.
2. Er bestaan afstandslijnen met twee samenvallende "oneindigheids"-punten, de hyperosculerende kegelsneden: horicyclen.
3. Langs een horicycle geldt een "euclidische maatbepaling".

Bewijs:
Beschouw de horicycle $(x^2+y^2-1)+a(x-1)^2=0$ en stel deze voor in parametervoorstelling $y=t(x-1)$ dus $(x-1)\left[x+1+t^2(x-1)+a(x-1)\right] 0$

$$x = \frac{t^2+a-1}{t^2+a+1} \qquad y = \frac{-2t}{t^2+a+1}$$

en er volgt $$ds = \frac{dt}{\sqrt{a}} .$$

4. Een horicycle voor een imaginaire fundamentaalkegelsnede is steeds volledig imaginair.

De resultaten zijn onmiddellijk overdraagbaar in meerdimensionale differentiaalmeetkunde.

Er geldt $$ds^2 = \mu \frac{(\Omega_1\Omega_2\ldots\Omega_{n-2}x\ dx)^2}{(\Omega'_1x)^2(\Omega'_2x)^2} .$$

In het quaternaire gebied geldt dus voor $(\Omega'x)^2 \equiv x^2+y^2+z^2-1$

$$ds^2 = \mu \frac{dx^2+dy^2+dz^2-(x\ dy-y\ dx)^2-(x\ dz-z\ dx)^2-(y\ dx-z\ dy)^2}{(x^2+y^2+z^2-1)^2} .$$

Er bestaan horispheren [hyperhorispheren] waarop de "euclidische meetkunde" geldt: hyperosculerende bundelexemplaren -- type $[\bar{\bar{3}},1]$ -- van het fundamentaalquadriek.
Kiest men $(x^2+y^2+z^2-1)+a(x-1)^2$ dan verkrijgt men met

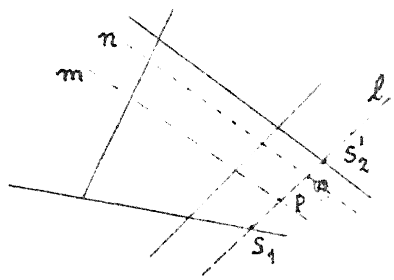
$$y = u(x-1),\ z=t(x-1).$$

de parametervoorstelling

$$x = \frac{t^2+u^2+a-1}{t^2+u^2+a+1} , \quad y = \frac{-2t}{t^2+u^2+a+1} , \quad z = \frac{-2u}{t^2+u^2+a+1}$$

en substitutie levert $$ds^2 = \frac{dt^2+du^2}{a} .$$

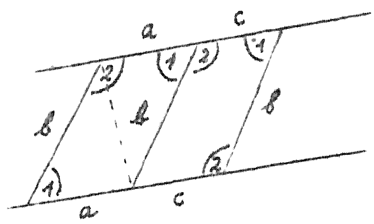
Bij een imaginair fundamentaalquadriek zijn bundels van het type $[\bar{2},\bar{2}]$ mogelijk, die een scheve vierhoek als snijkromme van alle exemplaren heeft en waarop de euclidische meetkunde, in beperkte mate, geldt. Legt men door het punt P de transversalen over de overstaande zijden van de basisvierhoek, dan zijn dit beschrijvenden van een quadriek: l,m. Neemt men Q op l en daaruit weer de nog te trekken overlijn n dan is de dubbelverhouding op elke rechte, die l kruist dezelfde als $((PQS_1S_2))$, dat wil zeggen de rechten zijn "evenwijdig". Hieruit volgt, dat alle rechten onder dezelfde hoek snijden. (Clifford-oppervlak). Neemt men $x^2+y^2+z^2+1$ als fundamentaal, dan is $x^2+y^2-\rho^2(z^2+1)=0$ een dergelijk oppervlak.



In parametervorm volgt

$$\text{uit:}\quad \left.\begin{aligned} x+\rho z &= \lambda(\rho+y) \\ \lambda x-\lambda\rho z &= \rho-y \\ \mu x-\mu\rho z &= \rho+y \end{aligned}\right\}$$

$$x = \rho\,\frac{\lambda\mu+1}{\lambda+\mu}\,,\quad y = -\rho\,\frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu}\qquad z = \frac{\lambda\mu-1}{\lambda+\mu}$$



en daaruit bij substitutie $\alpha = \mathrm{bgtg}\,\lambda$, $\beta = \mathrm{bgtg}\,\mu$.

$$ds^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 - 2\,\frac{\rho^2-1}{\rho^2+1}\,d\alpha\,d\beta\ .$$

Meetkundig is zulks evident: overstaande hoeken zijn gelijk en de "twee" hoeken zijn dus supplementair!

E. Oppervlakte en Volumenbepaling

Zodra een quadratisch lijnelement is gegeven bestaat de mogelijkheid van een oppervlaktemeting volgens Gauss, mits het lijnelement geen volkomen quadraat is.

Uit

$$ds^2 = \mu\,\frac{(\Omega\, x\, dx)^2}{(\Omega' x)^2\cdot(\Omega_1' x)^2}$$

volgt met $x_3 \equiv 1$ voor de teller

$$\{(\Omega_2-\Omega_3x_2)dx_1-(\Omega_1-\Omega_3x_1)dx_2\}^2,$$

waarvan de discriminant

$$[\Omega_{22}-2\Omega_{23}x_2+\Omega_{33}x_2^2]\,[\Omega_{11}-2\Omega_{13}x_1+\Omega_{33}x_1^2] - [\Omega_{12}-\Omega_{23}x_1-\Omega_{13}x_2+\Omega_{33}x_1x_2]^2$$

op een determinant, de Hessiana van $(\Omega' x)^2$ na juist weer $(\Omega' x)^2$ is. De oppervlakte volgens Gauss wordt dus verkregen uit het oppervlakte element

$$dH = \sigma \frac{dx\ dy}{\sqrt{f^3}}\ , \quad f = (\Omega' x)^2;\ \sigma = \text{maatconstante.}$$

Voor het geval van een imaginaire fundamentaalkegelsnede, $x^2+y^2+1=0$, volgt

$$dH = \sigma \frac{dx\ dy}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}}$$

en voert men hier "poolcoordinaten" in -- $x = r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ -- dan is

$$dH = \sigma \frac{r\ dr\ d\varphi}{\sqrt{(1+r^2)^3}}\ .$$

De integratie naar r kan dus steeds worden uitgevoerd en er komt

$$H = \sigma \int \left[-\frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi\ .$$

Voor de oppervlakte van een cirkel met straal ρ, $\mathrm{tg}\,\rho = r$, komt er dan

$$H = 2\pi\sigma\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\right] = 4\pi\sigma\ \sin^2 \rho/_2\ .$$

Het lijnelement

$$ds^2 = \mu^2 \frac{dx^2+dy^2+(x\ dy-y\ dx)^2}{(x^2+y^2+1)^2}$$

levert met poolcoördinaten

$$ds = \mu \sqrt{\frac{r^2+r^4}{(1+r^2)^2}} = \mu \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}\ d\varphi$$

en de omtrek van een cirkel wordt, met $\mathrm{tg}\,\rho = r$,

$$s = 2\pi\mu\ \sin\rho\ .$$

Hiermede is de analogie met de metriek van een euclidische bol evident.

Voor een reële fundamentaalkegelsnede, $x^2+y^2-1=0$ geldt

$$ds^2 = \mu^2 \frac{dx^2+dy^2-(x\ dy-y\ dx)^2}{(1-x^2-y^2)^2}$$

$$dH = \sigma \frac{dx\ dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

of in poolcoördinaten

$$ds = \mu \frac{r\,d\varphi}{\sqrt{1-r^2}} , \qquad dH = \sigma \frac{r\,dr\,d\varphi}{\sqrt{(1-r^2)^3}} .$$

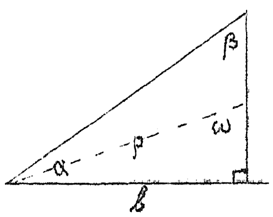
$$H = \sigma \int \left[\cosh\rho\right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \quad \text{met} \quad r = \text{th}\rho .$$

Voor een cirkel met straal ρ volgt dan voor omtrek en oppervlakte

$$2\pi\mu\,\text{sh}\,\rho \;, \quad 4\pi\sigma\,\text{sh}^2\tfrac{1}{2}\rho .$$

Voor een rechthoekige driehoek volgt

$$F = \int_0^{\alpha} \left[\cosh\rho - 1\right] d\varphi$$



Uit de trigonometrie volgt

$$\text{th}\rho\,\cos\varphi = \text{th}\,b,$$
$$\cosh b\,\sin\varphi = \cos\omega$$

dus $\cosh\rho = \dfrac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\text{th}\,b^2-\sin^2\varphi}}$ en

$$F = -\alpha + \left[\text{bg}\sin(\sin\varphi\cosh b)\right]_0^{\alpha}$$

$$= -\alpha + \left[\pi/2 - \omega\right]_0^{\alpha} = -\alpha + \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta .$$

Voor een algemene driehoek dus

$$F = \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta_1 + \frac{\pi}{2} - \gamma - \beta_2 = \underline{\underline{\pi - \alpha - \beta - \gamma}} .$$

De analoge differentiaalelementen in meer-dimensionale ruimten leveren geen moeilijkheden op. Voor de driedimensionale elliptische ruimte wordt dit

$$dV = \frac{\sqrt{1+x^2+y^2}\cdot\sqrt{1+y^2+z^2}\cdot\sqrt{1+x^2+z^2}}{(x^2+y^2+z^2+1)^3}\,dx\,dy\,dz$$

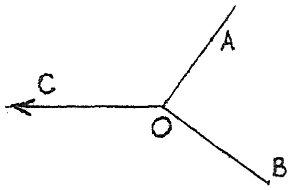
als het fundamentaalquadriek $x^2+y^2+z^2+1=0$ is.
Men komt hier dus reeds terecht op de meest afschuwelijke elliptische integralen en de integralen daarvan!! Daarom is hiervan niets "elegants" bekend.

F. Het is zeer wel mogelijk projectieve metrisaties in te voeren met lineair lijnelement. Alsdàn gaan de allereerste stellingen van Euclides' Stoicheia niet meer door of krijgen een engere betekenis. Overeenkomend daarmede is de opbouw van een elementaire meetkunde

gebaseerd uitsluitend op lengten bijzonder moeilijk. Zodra men echter een oppervlakte -- in de zin van Gauss bijvoorbeeld -- wil kunnen meten, moet het lijnelement tenminste quadratisch zijn.
De historische ontwikkeling is hiermede in overeenstemming: de oppervlaktemeting is primair geweest, aanvankelijk bepaald door het "gewicht aan zaaizaad" voor een akker ontwikkelt men later met behulp van de "lengtemeting" de agrimensoren formule. Deze leidt in combinatie met de rechte hoek tot de "stelling van Pythagoras".
De "theoretici" stelden deze tenslotte centraal en als uitgangspunt voor de meetkundige theorieën, die dan omstreeks tweeduizend jaar vóór Christus tot een "analytische meetkunde" in positieve getallen leidde. Ordeningsrelaties en de moeilijkheden als door Euclides veroorzaakt met hoekdefinitie en parallel-postulaat worden daardoor ondervangen. Men is wel gerechtigd te concluderen, dat de Elementen van Euclides de elementaire meetkunde nodeloos hebben gecompliceerd en -- analoog aan de Aristotelische logica -- de ontwikkeling van de hogere meetkunde hebben vertraagd.

Addenda bij ZW 1961-008

1. Ten aanzien van II a,b betreffende Euclides I, 1 komt het mij voor niet van belang ontbloot te zijn uitdrukkelijk op te merken, dat in de metrisatie van IIa géén gelijkzijdige driehoeken reëel bestaan, terwijl in IIb weliswaar gelijkzijdige driehoeken met zijden $\frac{2\pi}{3}$ voorkomen, doch dat deze <u>niet</u> kunnen worden gevonden volgens de methode van Euclides I,1. Is AB een segment ter lengte $\frac{2\pi}{3}$ en beschrijft men de cirkel met straal AB om A, dan is dit de rechte BO. Evenzo wordt de cirkel met straal AB om B de rechte AO. Deze cirkels snijden elkaar slechts in het singuliere punt O. De ∞^1 toppen C van de gelijkzijdige driehoeken met AB tot basis, die wel degelijk bestaan, worden niet gevonden door de constructie uit Euclides I,1!



Dit geldt eveneens in meetkunden, waarin twee cirkels elkander slechts in singuliere punten snijden!

2. Is in inhomogene coordinaten de bewegingsgroep $\bar{x}_i=\bar{x}_i(x_1,\dots,x_n)$ dan moet het n-dimensionaal volumen een <u>integraalinvariant</u> zijn: dus het volumenelement $H(x_1,\dots,x_n)$, wegens

$$\int_G \dots \int H(x)dx_1\dots = \int_{\bar{G}}\dots\int H(\bar{x})d\bar{x}\dots = \int_G \dots \int H(\bar{x})\ \frac{\partial(\bar{x}\dots)}{\partial(x\dots)}\ dx\dots,$$

een relatieve differentiaalinvariant van het gewicht 1 zijn:

$$H(x) = H(\bar{x})\ \cdot \Delta,\ \Delta = \frac{\partial(\bar{x}_1\dots)}{\partial(x_1\dots)}\ .$$

<u>a</u>. In de projectieve metrisatie met lineair lijnelement: $ds=\sum a_i dx_i$ is dit lijnelement een totale differentiaal en zelf de énige, absolute, differentiaalinvariant. Het is dan <u>onmogelijk</u> bewegingsinvariante oppervlakken en volumina te definiëren!

<u>b</u>. Zijn de bewegingen projectieve transformaties

$$\bar{x}_i = t_i:t_n,\quad t_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k\ ,\quad x_n=1,$$

dan is
$$\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_\kappa} = \frac{a_{i\kappa}t_n - a_{n\kappa}t_i}{t_n^2},$$

waaruit volgt
$$t_n^{2n-2}\Delta = \det|a_{i\kappa}t_n - a_{n\kappa}t_i|.$$

De laatste determinant is lineair in $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ en dus van de vorm
$$t_n^{n-2}(A_{n1}t_1 + A_{n2}t_2 + \ldots + A_{nn}t_n),$$
waarbij A_{ni} minoren zijn van de elementen a_{ni} uit $\det|a_{i\kappa}|$.

Voor orthogonale transformaties is dus
$$t_x^n \, \Delta = 1.$$

De enig mogelijke volumendefinitie ten opzichte van een quadratisch oppervlak, met homogene vergelijking $(\Omega' x)^2 = 0$, inhomogeen $f(x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0$, is dus
$$V = \int \ldots \int \frac{dx_1 dx_2 \ldots dx_{n-1}}{\sqrt{f^n}}.$$

De tensor $ds^2 = g_{i\kappa}\, dx_i dx_\kappa$ heeft slechts één differentiaalinvariant van de orde nul, $g = \det|g_{i\kappa}|$. Deze is van het gewicht 2. De enig mogelijke volumendefinitie is dus hier
$$V = \int \ldots \int \sqrt{g}\; dx_1 \ldots dx_{n-1}.$$

Dit is de simpele verklaring van het schijnbaar algebraïsch "toeval" pag.12, regel 3 v.o.

3. Hoe onplezierig het lijnelement in de niet-euclidische R_3 ook moge zijn bij berekening van simplices, de bol en de omwentelingskegel leveren, zoals bekend, elegante resultaten.
Het volumen van de "elliptische" bol met straal r wordt
$$\pi(2r - \sin 2r),$$
hetgeen voor zeer kleine stralen r neerkomt op $\frac{4}{3}\pi r^3$.
Het volumen van een kegel met hoogte h, apothema a en halve tophoek α wordt
$$\pi(h - \cos\alpha \cdot a).$$
Waar $\cos\alpha = \operatorname{tg} h : \operatorname{tg} a$ levert dit voor kleine h,a een volume
$$\frac{\pi}{3} h(a^2 - h^2) = \frac{\pi}{3} h R^2,$$
als R de straal van het grondvlak is.