STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1963 - 008

Disjuncte open en gesloten verzamelingen in het complement van een discrete ruimte in zijn Cech-Stone compactificatie

P.C. Baayen en A.B. Paalman - de Miranda

1963

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1963-008

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

Disjuncte open en gesloten verzamelingen in het complement van een discrete ruimte in zijn Čech-Stone compactificatie

door

P.C. Baayen en A.B. Paalman - de Miranda

Zij N een discrete verzameling met machtigheid $|N| = \aleph_0$ en βN de Čech-Stone compactificatie van N.
Dan bevat $\beta N \setminus N$ $2^{\aleph_0}$ paarsgewijs disjuncte open en gesloten verzamelingen:
zie Gillman and Jerison: Rings of continuous functions p. 97.

Stelling: Zij D een discrete verzameling met $|D| = \underline{d} \geq \aleph_0$ en βD de Čech-Stone compactificatie van D.
$\beta D \setminus D$ bevat dan en slechts dan $\underline{m}$ paarsgewijs disjuncte open en gesloten deelverzamelingen als $0 < \underline{m} \leq \underline{d}^{\aleph_0}$.

Bewijs:
Stel $D_1 \subset D$. Dan is $\beta D = \overline{D}_1 \cup \overline{D \setminus D_1}$ en $\overline{D}_1 \cap \overline{D \setminus D_1} = \emptyset$.
Iedere verzameling van de vorm $\overline{D}_\alpha$ met $D_\alpha \subset D$ is dus open en gesloten in βD.
Stel nu A open en gesloten in βD.
Dan is $A \cap D = D_1 \neq \emptyset$ en $\beta D = \overline{D}_1 \cup \overline{D \setminus D_1}$.
Daar $\overline{D}_1 \subset \overline{A} = A$ en $\overline{D \setminus D_1} \subset \overline{\beta D \setminus A} = \beta D \setminus A$ is $A = \overline{D}_1$.
We zullen nu bewijzen dat de verzamelingen van de vorm $\overline{D}_1$

met $D_1 \subset D$ een basis voor de open verzamelingen van βD vormen.
Stel O open in βD en $x \in O$. Dan is er, daar βD een compacte Hausdorff ruimte is, een open verzameling V met $x \in V \subset \overline{V} \subset O$.
Zij nu $V \cap D = D_1$; dan $x \in \overline{D}_1 \subset \overline{V} \subset O$.

Stel nu A open en gesloten in $\beta D \setminus D$; dan is $A = O \setminus D$ met O open in βD.
Daar de $\overline{D}_\alpha$ met $D_\alpha \subset D$ een basis voor de open verzamelingen van βD vormen is $O = \bigcup_\alpha \overline{D}_\alpha$ met $D_\alpha \subset D$.
Dus $A = \left(\bigcup_\alpha \overline{D}_\alpha\right) \setminus D = \bigcup_\alpha \left(\overline{D}_\alpha \setminus D\right)$.
Daar A compact is en $\overline{D}_\alpha \setminus D$ open in $\beta D \setminus D$ is A te schrijven als $A = \overline{D}_{\alpha_1} \setminus D \cup \ldots \cup \overline{D}_{\alpha_n} \setminus D = \overline{D}_\beta \setminus D$ met $D_\beta = \bigcup_{i=1}^{n} D_{\alpha_i}$.
Iedere open en gesloten verzameling in $\beta D \setminus D$ is dus van de vorm $\overline{D}_\alpha \setminus D$ en omgekeerd is ook iedere verzameling $\overline{D}_\alpha \setminus D$ open en gesloten in $\beta D \setminus D$.

We zullen nu bewijzen dat $\overline{D}_\alpha \setminus D \cap \overline{D}_\beta \setminus D = \emptyset$ dan en slechts dan als $|D_\alpha \cap D_\beta| < \aleph_0$.
Immers stel $D_\alpha \cap D_\beta = D_\gamma$ dan $\overline{D}_\alpha = \overline{D_\alpha \setminus D_\gamma} \cup \overline{D}_\gamma$
en $D_\beta = \overline{D_\beta \setminus D_\gamma} \cup \overline{D}_\gamma$
Dus $\overline{D}_\alpha \setminus D \cap \overline{D}_\beta \setminus D = \emptyset \Leftrightarrow \overline{D}_\gamma \subset D \Leftrightarrow |D_\gamma| < \aleph_0$.

$\beta D \setminus D$ bevat dus $\underline{m}$ paarsgewijs disjuncte open en gesloten deelverzamelingen dan en slechts dan als er een verzameling K van deelverzamelingen van D bestaat met $|K| = \underline{m}$ en $|D_\alpha \cap D_\beta| < \aleph_0$ voor $D_\alpha, D_\beta \in K$.

Stel nu K een dergelijke verzameling en $\underline{m} > \underline{d}$, dan is ook $|K'| = \underline{m}$ als $K' = \{ D_\alpha \mid D_\alpha \in K \quad |D_\alpha| \geq \aleph_0 \}$.
Stel nu $K'' = K'$ als $\bigcup_{D_\alpha \in K'} D_\alpha = D$, anders

$K'' = \{ D_\alpha \mid D_\alpha \in K, \alpha \neq \alpha_1 \} \cup D^*_{\alpha_1}$ met $D^*_{\alpha_1} = D_{\alpha_1} \cup D \setminus \bigcup_{D_\alpha \subset K'} D_\alpha$.

K" is dan een verzameling van deelverzamelingen van D met $|K"| = \underline{m}$, $|D_\alpha \cap D_\beta| < \aleph_0 \leq \min(|D_\alpha|, |D_\beta|)$ en $\bigcup_{D_\alpha \in K"} D_\alpha = D$.

Een dergelijke verdeling van D is dan en slechts dan mogelijk als $\underline{m} \leq \underline{d}^{\aleph_0}$: zie Bachman, Transfinite Zahlen p. 149.

Dus $\underline{d} < \underline{m} \leq \underline{d}^{\aleph_0}$.

Als $\underline{m} \leq d$ dan is $\underline{m} \leq d^{\aleph_0}$ en bestaat er dus een dergelijke verdeling K" en dus zeker een verdeling K .

q.e.d.