STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

ZW 1965-008

Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

door

Prof. dr. G. Helmberg

27 oktober 1965

Wiskundige grondslagen van het mixen van cocktails en het kneden van deeg

Bij het mixen van een "Martini" wordt een beker met inhoud 1 eerst gevuld tot twee derde met gin en dan verder aangevuld met vermouth (één derde; fig. 1). Daarna wordt de beker gesloten en enkele keren geschud. Algemeen wordt verwacht dat na een voldoend groot aantal keren schudden iedere slok een mengsel van ca. twee derde gin en één derde vermouth bevat. Wij zullen onderzoeken in welke mate voor deze verwachting een wiskundige grondslag bestaat.

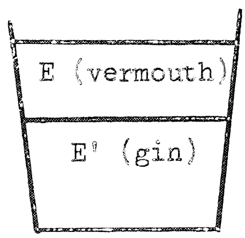

fig. 1

Om het probleem precies te kunnen formuleren vereenvoudigen wij de situatie: wij veronderstellen dat een schudding T binnen de beker X ieder molekuul vloeistof van zijn oorspronkelijke plaats x transporteert naar een plaats Tx, die alleen afhankelijk is van x. Verder veronderstellen wij dat iedere schudding hetzelfde effect heeft (fig. 2).

Bij een serie van n schuddingen doorloopt dus ieder molekuul, uitgaande van zijn oorspronkelijke plaats x, achtereenvolgens de plaatsen x, Tx, $TTx = T^2x$, $TT^2x = T^3x$, ..., T^nx (= baan van x onder de transformatie T in x).

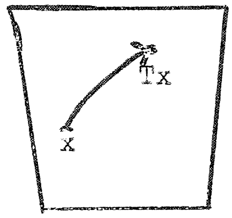

fig. 2

Om de vermenging te beschrijven, die door T in X bewerkt wordt, moeten wij van iedere "willekeurige" deelverzameling F (van plaatsen) in X aangeven, hoeveel van zijn volumen $v(F)$ wordt opgevuld door molekulen vermouth, komende van plaatsen in de deelverzameling E; de rest van $v(F)$ wordt dan opgevuld door molekulen gin, komende van plaatsen in de resterende deelverzameling E'. M.a.w. wij bekijken het volledig origineel

$$T^{-1}F = \{x \in X : Tx \in F\}$$

en de twee gedeelten ervan, bestaande uit vermouth resp. gin (fig. 3)

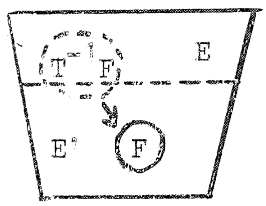

fig. 3

$$T^{-1}F \cap E = \{x \in E : Tx \in F\}$$

$$T^{-1}F \cap E' = \{x \in E' : Tx \in F\}.$$

Om zinvolle uitspraken te kunnen doen veronderstellen wij dat iedere van de bekeken verzamelingen een "volumen" heeft (= meetbaar is) en dat de molekulen, die na uitoefening van T in F terecht komen oorspronkelijk een verzameling van hetzelfde "volumen" opvulden als F. Wij worden dus geleid tot de beschouwing van een speciaal stelsel R van deelverzamelingen die "meetbaar" zijn en een "maat" v (gedefinieerd op R) met bepaalde eigenschappen (b.v. $A, B \in R \Rightarrow A \cap B \in R$, $A \cup B \in R$; $X \in R$; $v(X) = 1$). Het drietal (X, R, v) heet een maatruimte. Verder worden wij geleid tot de veronderstelling dat het volledig origineel $T^{-1}F$ van een meetbare verzameling F weer meetbaar is (m.a.w. dat de transformatie T "meetbaar" is) en dat $v(T^{-1}F) = v(F)$ voor alle meetbare verzamelingen F geldt (m.a.w. dat T "maat-invariant" is t.o.v. v).

Een herhaalde toepassing van de laatstgenoemde relaties leidt tot de relaties

$$\left.\begin{aligned} &T^{-k}F = T^{-1}(T^{-(k-1)}F) = \{x \in X : T^k x \in F\} \in R \\ &v(T^{-k}F) = v(F). \end{aligned}\right\} \text{ voor alle } F \in R$$

Het relatieve aandeel van vermouth resp. gin in F na één toepassing van T is dan (voor $v(F) > 0$)

$$\frac{v(T^{-1}F \cap E)}{v(F)} \qquad \text{resp.} \qquad \frac{v(T^{-1}F \cap E')}{v(F)}$$

en na k toepassingen van T (= één toepassing van T^k)

$$\frac{v(T^{-k}F \cap E)}{v(F)} \qquad \text{resp.} \qquad \frac{v(T^{-k}F \cap E')}{v(F)} .$$

Verwacht wordt dat deze quotiënten tot $v(E)$ $(= \frac{1}{3})$ resp. $v(E')$ $(= \frac{2}{3})$ naderen.

Definitie: Een meetbare maat-invariante transformatie T in een maatruimte (X, R, v) met $v(X) = 1$ heet sterk vermengend indien voor ieder paar $E, F \in R$ geldt

$$\lim_{k\to\infty} v(T^{-k}F \cap E) = v(F) \cdot v(E).$$

Als de werking van T op ieder punt in X niet expliciet bekend is kan geen uitspraak over vermengings-eigenschappen van deze speciale transformatie T worden gedaan. Wel zijn er stellingen die uitdrukken dat in een zekere (topologische) zin de meeste transformaties vermengend zijn.

Wij geven nu een voorbeeld van een sterk vermengende transformatie in het eenheidsvierkant X.
Door een affine transformatie (samendrukking in verticale richting en uitrekking in horizontale richting) wordt X eerst getransformeerd in een rechthoek van lengte 2 en hoogte $\frac{1}{2}$;

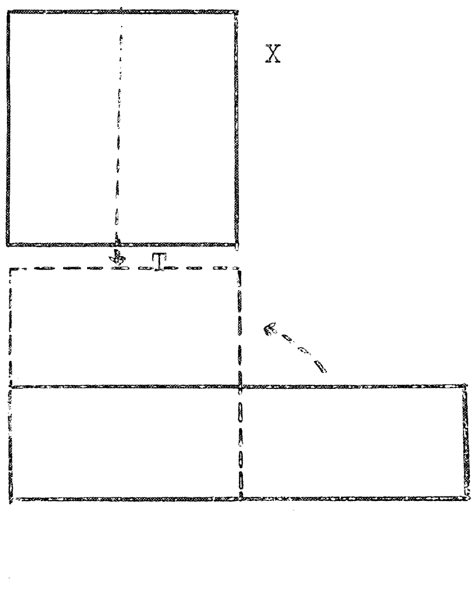

fig. 4

daarna wordt de rechter helft (van lengte 1 en hoogte $\frac{1}{2}$) afgesneden en boven de linker helft geplaatst (fig. 4). Deze transformatie T herinnert aan het kneden van deeg en is om deze reden ook bakkers-transformatie genoemd. Analytisch is T gegeven door

$$T(x,y) = \begin{cases} (2x, \frac{y}{2}) & \text{voor } 0 \leq x < \frac{1}{2},\ 0 \leq y < 1, \\ (2x-1, \frac{y+1}{2}) & \text{voor } \frac{1}{2} \leq x < 1,\ 0 \leq y < 1. \end{cases}$$

Bij een gedetailleerde uitwerking moet als stelsel van meetbare verzamelingen hier worden bekeken de σ-algebra van Borel-verzamelingen en als maat v de twee-dimensionale Lebesque-maat. Het kan echter worden aangetoond dat iedere Borel-verzameling in een zekere zin kan worden benaderd door eindige verenigingen van assen parallele rechthoeken. Bij het onderzoek of T al dan niet meetbaar maat-invariant en sterk vermengend is, is het om deze reden voldoende zich tot een onderzoek van de werking van T op assen parallele rechthoeken te beperken.

Wij merken op dat T het eenheidsvierkant X omkeerbaar eenduidig op zich afbeeldt (ieder punt (x,y) heeft maar één origineel punt $T^{-1}(x,y)$ wiens beeldpunt het is). Om te onderzoeken of T meetbaar en maat-invariant is bepalen wij het volledig origineel $T^{-1}F$ van een assen parallele rechthoek

$$F = A \times B = A \times B_1 \cup A \times B_2,$$

waar $A \times B_1$ in de onderste helft van X ligt en $A \times B_2$ in de bovenste helft (fig. 5). Stel a, b_1 en b_2 zijn de lengten van de intervallen A, B_1 en B_2 resp. Dan geldt

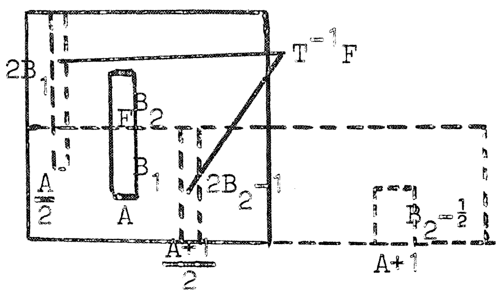

fig. 5

$$T^{-1}(A \times B) = T^{-1}(A \times B_1) \cup T^{-1}(A \times B_2) =$$

$$= \frac{A}{2} \times 2B_1 \cup \frac{A+1}{2} \times (2B_2 - 1).$$

Als een vereniging van twee rechthoeken is $T^{-1}F$ weer meetbaar. Dus T is meetbaar. Verder geldt

$$v(T^{-1}F) = \frac{a}{2} \cdot 2b_1 + \frac{a}{2} \cdot 2b_2 = a(b_1 + b_2) = v(F).$$

Dus T is maat-invariant. Op een soortgelijke manier kan worden aangetoond dat ook TF meetbaar is voor alle $F \in R$. Volgens de omkeerbaarheid van T geldt dan

$$v(F) = v(T^{-1}TF) = v(TF)$$

voor alle $F \in R$.

Het bewijs van de uitspraak dat T sterk vermengend is eist enkele voorbereidingen. Wij verdelen eerst X in 4 congruente vierkanten met zijden-lengte $\frac{1}{2}$. Ieder dergelijk vierkant is gekenmerkt door een paar $(\varepsilon_1;\eta_1)$ van cijfers ε_1, η_1, die de waarden 0 of 1 kunnen aannemen: als het in de linker helft van X ligt is het eerste cijfer, ε_1, gelijk aan 0; als het in de rechter helft van X ligt, is het eerste cijfer, ε_1, gelijk aan 1; als het in de onderste helft van X ligt is het tweede cijfer, η_1, gelijk aan 0; als het in de bovenste helft van X ligt is η_1 gelijk aan 1 (fig. 6).

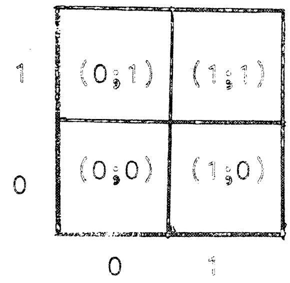

fig. 6

Dezelfde verdelingsprocedure passen wij opnieuw op ieder van deze vierkanten toe door 0 achter het eerste cijfer te plaatsen als het nieuwe vierkant $(\varepsilon_1\varepsilon_2;\ \eta_1\eta_2)$ in de linker helft van het oude vierkant ligt (anders een 1), en door een 0 achter het tweede cijfer te zetten als het nieuwe vierkant in de onderste helft van het oude vierkant ligt (anders een 1) (fig. 7).

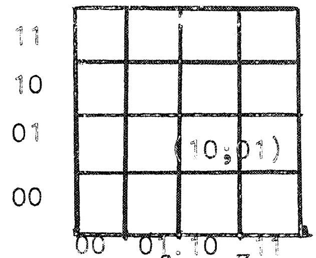

fig. 7

Door deze procedure n keer toe te passen overdekken wij X door een rooster van 2^{2n} congruente vierkanten $(\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n;\ \eta_1\eta_2 \ldots \eta_n)$ van zijden-lengte 2^{-n}. Ieder vierkant is gekenmerkt door twee rijen van n cijfers ε_i en η_i die de waarden 0 en 1 mogen aannemen; zijn zijde in horizontale richting is de ε_n-helft van de ε_{n-1}-helft van ... van de ε_1-helft van het eenheidsinterval,

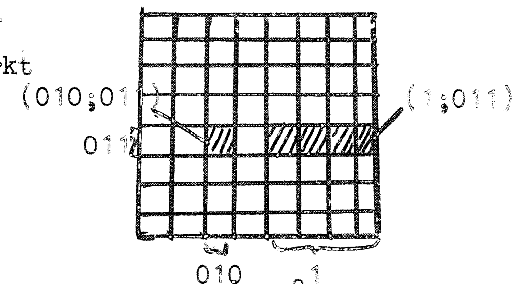

fig. 8

zijn zijde in verticale richting is de η_n-helft van de η_{n-1}-helft van ... van de η_1-helft van het eenheidsinterval. Wij gebruiken deze notatie ook voor rechthoeken zoals (1;011) (fig. 8).

Wij onderzoeken nu wat er gebeurt als wij T toepassen op een van deze vierkanten of rechthoeken b.v. $(\varepsilon_1\varepsilon_2;\ \eta_1\eta_2)$. Door de horizontale uitrekking wordt de lengte van de horizontale zijde van ieder vierkantje verdubbeld, maar aan de onderlinge positie wordt niets veranderd. Door de verticale samendrukking wordt de hoogte van ieder vierkantje gehalveert, maar wordt weer niets aan de onderlinge positie veranderd. Als de rechterhelft van de resulterende rechthoek (van lengte 2 en hoogte $\frac{1}{2}$) boven de linkerhelft verplaatst wordt krijgt een vierkantje

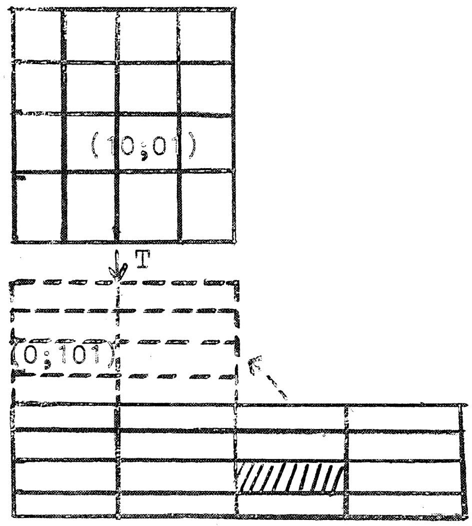

fig. 9

$(0\varepsilon_2;\ \eta_1\eta_2)$ de gedaante van een rechthoek $(\varepsilon_2;\ 0\eta_1\eta_2)$, en een vierkantje $(1\varepsilon_2;\ \eta_1\eta_2)$ de gedaante van een rechthoek $(\varepsilon_2;\ 1\eta_1\eta_2)$ (fig. 9):

$$T(\varepsilon_1\varepsilon_2;\ \eta_1\eta_2) = (\varepsilon_2;\ \varepsilon_1\eta_1\eta_2).$$

Herhaling van deze redenering leidt tot

$$T^2(\varepsilon_1\varepsilon_2;\ \eta_1\eta_2) = T(\varepsilon_2;\ \varepsilon_1\eta_1\eta_2)$$

$$= (;\ \varepsilon_2\varepsilon_1\eta_1\eta_2)$$

(een rechthoek waarvan de horizontale zijde lengte 1 heeft)

$$= (0;\ \varepsilon_2\varepsilon_1\eta_1\eta_2) \cup (1;\ \varepsilon_2\varepsilon_1\eta_1\eta_2)$$

$$T^3(\varepsilon_1\varepsilon_2;\ \eta_1\eta_2) = T(;\ \varepsilon_2\varepsilon_1\eta_1\eta_2)$$

$$= T(0;\ \varepsilon_2\varepsilon_1\eta_1\eta_2) \cup T(1;\ \varepsilon_2\varepsilon_1\eta_1\eta_2)$$

$$= (;\ 0\varepsilon_2\varepsilon_1\eta_1\eta_2) \cup (;\ 1\varepsilon_2\varepsilon_1\eta_1\eta_2)$$

(twee disjuncte rechthoeken waarvan de horizontale zijden lengte 1 hebben).

Iedere verdere toepassing van T verdubbelt het aantal van zulke rechthoeken en halveert hun hoogte.

Over het algemeen geldt

$$T(\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n; \eta_1\eta_2 \ldots \eta_n) = (\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n; \varepsilon_1\eta_1\eta_2 \ldots \eta_n)$$

$$T^n(\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n; \eta_1\eta_2 \ldots \eta_n) = (; \varepsilon_n \ldots \varepsilon_2\varepsilon_1\eta_1\eta_2 \ldots \eta_n)$$

$$T^{n+p}(\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n; \eta_1\eta_2 \ldots \eta_n) = \bigcup_{\varepsilon_{n+p} \ldots \varepsilon_{n+1}} (; \varepsilon_{n+p} \ldots \varepsilon_{n+1}\varepsilon_n \ldots \varepsilon_2\varepsilon_1\eta_1\eta_2 \ldots \eta_n) \quad (p \geq 1).$$

In de laatste regel staat aan de rechterkant een vereniging van 2^p disjuncte rechthoeken waarvan de horizontale zijden lengte 1 hebben ($\varepsilon_{n+p} \ldots \varepsilon_{n+1}$ nemen onafhankelijk van elkaar de waarden 0 en 1 aan).
Een analoge redenering leidt tot

$$T^{-1}(\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n; \eta_1\eta_2 \ldots \eta_n) = (\eta_2\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n; \eta_2 \ldots \eta_n)$$

$$T^{-n}(\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n; \eta_1\eta_2 \ldots \eta_n) = (\eta_n \ldots \eta_2\eta_1\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n;)$$

(een rechthoek met hoogte 1).

Bij het verifiëren van de vergelijking

$$\lim_{k\to\infty} v(T^{-k}F \cap E) = v(F) \cdot v(E) \text{ voor alle rechthoeken } E, F$$

is het mogelijk zich te beperken tot roostervierkanten E, F (de reden is dat iedere rechthoek de vereniging is van aftelbaar veel roostervierkanten). Wij mogen dus veronderstellen

$$E = (\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n; \eta_1\eta_2 \ldots \eta_n), \; v(E) = 2^{-2n}$$

$$F = (\phi_1\phi_2 \ldots \phi_m; \psi_1\psi_2 \ldots \psi_m), \; v(F) = 2^{-2m}.$$

Omdat k toch naar ∞ loopt kunnen wij ons beperken tot de beschouwing van k's die groter zijn dan m+n:

$$k = m + n + p,\ p \geq 1$$

$$v(T^{-k}F \cap E) = v(T^{-(m+n+p)}F \cap E) =$$

$$= v(T^{n+p}[T^{-(m+n+p)}F \cap E]) =$$

$$= v(T^{-m}F \cap T^{n+p}E)$$

(wij gebruiken het feit dat wegens de omkeerbaarheid van T geldt $T^{n+p}(A \cap B) = T^{n+p}A \cap T^{n+p}B$). $T^{-m}F$ is een rechthoek met lengte 2^{-2m} en hoogte 1. $T^{n+p}E$ is de vereniging van 2^p disjuncte rechthoeken met lengte 1 en hoogte 2^{-2n-p}. De doorsnede $T^{-m}F \cap T^{n+p}E$ is dan een vereniging van 2^p disjuncte rechthoekjes van lengte 2^{-2m} en hoogte 2^{-2n-p} (fig. 10).

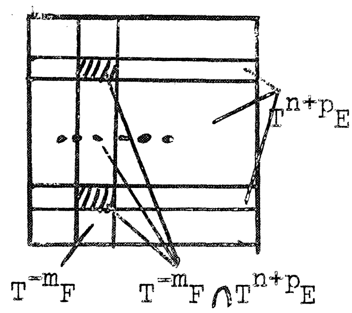

fig. 10

Dus

$$v(T^{-k}F \cap E) = v(T^{-m}F \cap T^{n+p}E)$$

$$= 2^p \cdot 2^{-2m} \cdot 2^{-2n-p}$$

$$= 2^{-2m} \cdot 2^{-2n}$$

$$= v(F) \cdot v(E) \qquad \text{voor } k > m+n.$$

Hieruit volgt de bewering.

Voor een diepere studie van deze problemen wordt als lectuur aanbevolen:

Halmos, P.R.: Lectures on ergodic theory, Publications of the mathematical society of Japan 3, Tokyo 1956 (Chelsea, New York).

(dit boekje heeft de spreker ook bij het kiezen en uitwerken van dit elementaire onderwerp geïnspireerd). Verder

Zaanen, A.C.: An introduction to the theory of integration, North Holland, Amsterdam 1958.

(dit boek bevat ook een inleiding in de maat-theorie waarvan in de ergodentheorie intensief gebruik wordt gemaakt).

Een overzicht van de nieuwste ontwikkelingen in de ergodentheorie geven

Jacobs, K.: Neuere Methoden und Ergebnisse der Ergodentheorie, Springer, Berlin 1960.

Jacobs, K.: Einige neuere Ergebnisse der Ergodentheorie, Jahresbericht d. DMV <u>67</u> (1965) 143-182.