STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1948-008

Functies met louter monotone afgeleiden

J. Korevaar

1948

Tweede vergadering op Donderdag 21 April te 9 uur in de Kindergeneeskundige Kliniek, van het Academisch Ziekenhuis, Oostersingel 59.

De voorzitter opent de vergadering en geeft het woord aan de heer *J. KOREVAAR* (Amsterdam) tot het houden van zijn voordracht over: *Functies met louter monotone afgeleiden.* [1])

$f(x)$ zij gedefinieerd op $-1 < x < 1$, reëel, en oneindig vaak differentieerbaar. Als $f^{(n)}(x)$ geen tekenveranderingen heeft op $(-1, 1)$ $(n = 0, 1, \ldots)$, dan is $f(x)$ in elk punt van $(-1, 1)$ te ontwikkelen in een machtreeks, waarvan de convergentiecirkel wordt bepaald door een reëel singulier punt van $f(x)$ ≤ -1 of ≥ 1 (S. BERNSTEIN 1928). We zullen hier op heel eenvoudige manier bewijzen, dat $f(x)$ minstens analytisch voortzetbaar is tot een functie, regulier in $|z| < 1$.

Als $f^{(n)}(x) \geq 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$ is $f(x)$ analytisch voortzetbaar in $|z + 1| < 2$; als $(-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$, in $|z - 1| < 2$.[1])

In het algemene geval nemen we de opvolgende afgeleiden van $f(x)$, waarvan de modulus toeneemt (afneemt), samen tot een *permanentie* (*alternantie*). De afgeleiden van een permanentie hebben alle hetzelfde, die van een alternantie afwisselend teken. Stel er zijn oneindig veel van die groepjes (zie boven). Noem de orden van de eerste afgeleiden uit de groepjes n_0 $(= 0)$, $n_1, n_2, \ldots$ $(n_0 < n_1 < n_2 < \ldots)$, en stel $n_k - n_{k-1} = p_k$. We schatten $f^{(n)}(0)$, $n = n_k + p$, $0 \leq p < p_{k+1}$. Stel voor het gemak dat $f^{(n_k)}(x)$ tot een permanentie behoort, met allemaal positieve afgeleiden. Neem $x > 0$ (in een alternantie < 0):

$$f^{(n_k-1)}(x) = f^{(n_k-1)}(0) + x f^{(n_k)}(0) + \ldots + x^{p+1} f^{(n_k+p)}(0)/(p+1)! + R.$$

---

[1]) Zie voor literatuur J. KOREVAAR, De nulpunten van de afgeleiden van een functie en zijn analytisch karakter, Rapport ZW 1948—004, Mathematisch Centrum, Amsterdam.

J. Korevaar:
Functies met louter monotone afgeleiden.
Functions with monotonic derivatives only.

Hier staan louter termen > 0, behalve de eerste twee (uit een alternantie). We kunnen dus schatten
$| x^{p+1} f^{(n_k + p)} (0) /(p + 1)! | \leq | f^{(n_k - 1)} (0) |$,
en door $x \to 1^-$, en de redenering voort te zetten,
$|f^{(n_k + p)} (0) | \leq (p + 1)! \, p_k! \dots p_2! \, |f^{(n_1 - 1)} (0) | = (p + 1)! \, p_k! \dots p_1! \, M$.
Heel grof schattend:
$| f^{(n)} (0) / n! | \leq (p + 1) M < n M \; (n \geq n_1)$.
De machtreeks $\Sigma \; f^{(n)} (0) \, z^n/n!$ is dus voor $|z| < 1$ convergent. En voor reële $z = x$ is zijn som $f(x)$. Laat x vast, > 0. Breek dan af in een alternantie. We krijgen een partiële som van de reeks, die van $f(x)$ verschilt
$| f^{(n)} (\vartheta x) \, x^n/n! | < | f^{(n)} (0) \, x^n/n! | \leq n M x^n$.