STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1951 - 009

Rapport betreffende een manuscript over verdunde matrices

W. Peremans

1951

Rapport betreffende een manuscript over verdunde matrices door W.Peremans.

Het manuscript in kwestie heeft betrekking op een bepaald soort oneindige matrices, genaamd T-matrices. Zie hiervoor R.G.Cooke, Infinite matrices and sequence spaces, London 1950 of ook een vroeger rapport van mijn hand (Rapport Z.W. 1950 - 012). Een matrix $A^{(m)}$ heet een <u>verdunde</u> (diluted) matrix afgeleid uit een matrix A, als $A^{(m)}$ uit A ontstaat door kolommen, die geheel met nullen gevuld zijn in te lassen op de volgende wijze: $a^{(m)}_{n,mk} = a_{n,k}$ en $a^{(m)}_{n,t} = 0$ voor $t \neq mk$. Het gebruik van verdunde matrices geschiedt ter generalisering van een procédé van Borel, die door de sommatie

$$e^{-n^m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^{mk} s_{mk}}{k!}$$ toegepast op de partiële som

$$S_j = \sum_{k=0}^{j} c_k z^k$$ in sommige gevallen een uitbreiding van

het sommatiegebied van de reeks verkreeg vergeleken bij de sommatie met de gewone Borel-matrix

$a_{n,k} = \frac{e^{-n} n^k}{k!}$. Bovenstaande sommatie komt neer op sommatie met de verdunning van de matrix $a_{n,k} = \frac{e^{-n^m} n^{mk}}{k!}$.
De vraag rijst of iets dergelijks bij algemene T-matrices ook te bereiken valt. De schrijver bewijst daarover twee stellingen.

In de eerste stelling wordt van een analytische functie f(z) verondersteld, dat de singulariteiten alle argumenten $\frac{2s\pi}{m}$ $(s=0,1,\ldots,m-1)$ hebben en op of buiten de eenheidscirkel liggen; in de tweede stelling wordt de voorwaarde voor de argumenten der singulariteiten vervangen door de voorwaarde dat ze tussen $\frac{2s\pi-\beta}{m}$ en $\frac{2s\pi+\beta}{m}$ $(0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{4})$ liggen. Voor de T-matrix $(a_{n,k})$ wordt verondersteld, dat het voortbrengende gebied (generating domain) de cirkel $|z+\delta|=r$ $(r-1 \leq \delta < r)$, dat is dus een cirkel met middelpunt op de reële as en waarvan het rechtse snijpunt met de reële as >0 en ≤ 1 is, bevat. Verder wordt verondersteld dat de T-matrix

$(a_{n,k})$ en zijn corresponderende γ-matrix $(g_{n,k})$ onderling consistent zijn in het partiële stergebied van f(z) voor de partiële sommen van de MacLaurin-ontwikkeling van f(z). In de eerste stelling wordt verder verondersteld dat het partiële stergebied van f(z) geheel ligt binnen de kromme $|z^m+\delta| = r$; in de tweede stelling, dat het geheel ligt binnen de kromme $|z^m+\delta e^{i\beta}| = r$ voor $\frac{(2s+1)\pi}{m} < \arg z \leq \frac{(2s+2)\pi-\beta}{m}$, binnen de kromme $|z^m+\delta e^{-i\beta}|=r$ voor $\frac{2s\pi+\beta}{m} < \arg z \leq \frac{(2s+1)\pi}{m}$ en binnen $|z^m| = r-\delta$ voor de andere waarden van arg z. De stellingen zeggen dan dat de verdunde matrix voor de partiële sommen van de MacLaurin-ontwikkeling van f(z) efficiënt is in een gebied dat het partiële stergebied van f(z) echt bevat. Na de stellingen worden enige voorbeelden ter toelichting van de verkregen resultaten behandeld.

Hier volgt nog een aanmerking van ondergeschikt belang. Het gebied dat gelegen is in het partiële stergebied van $\theta_t(v)$ (zie blz.6 onderaan) wordt voor $2s\pi-\beta < \arg v < 2s\pi+\beta$ niet begrensd door $\Re v=1$ maar door $|v| = r-\delta$.

Verder moet hier ook $\delta>0$ verondersteld worden.

De laatste vier regels van blz.6 moeten m.i. dus als volgt gelezen worden:

$|v+\delta e^{i\beta}| = r$ and $|v+\delta e^{-i\beta}| = r$, excluding points for which $|v| \geq r-\delta$ when $2s\pi-\beta < \arg v < 2s\pi+\beta$.

De laatste zin van blz. 6 kan dan weggelaten worden.

Het artikel lijkt mij zeker van voldoende belang om plaatsing in de Proceedings van de Kon.Ned. Akademie van Wetenschappen te wettigen.