STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1955-009

Over de beenspieren van een springende athleet

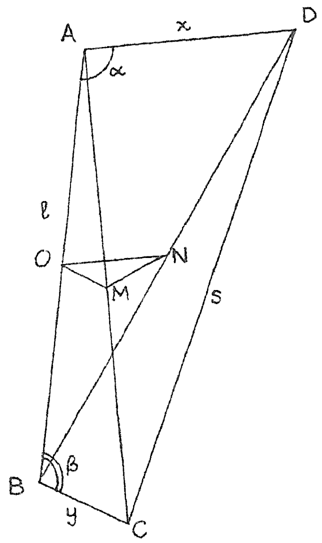
H.J.A. Duparc

1955

Over de beenspieren van een sprintendenathleet

door Dr H.J.A. Duparc

Van een athleet zij A het heupgewricht, B het kniegewricht, C en D de aanhechtingspunten van de spier die verantwoordelijk is voor de buiging van het kniegewricht. Gevraagd wordt uit waarnemingen van de lengte AB=l (vast), $\angle DAB = \alpha$ (variabel), $\angle CBA = \beta$ (variabel) en de lengte CD=s (variabel) de plaats der aanhechtingspunten C en D af te leiden. Voor de practijk blijkt het n.l. van belang te zijn deze punten te kennen om te beoordelen wat geschiedt met de spier CD b.v. bij het sprinten van de athleet.



Oplossing. Wij geven twee afleidingen van een formule die verband legt tussen AD=x, BC=y, l, s en α (zie hieronder formule (3)).

1e afleiding.

Verbind de middens M van AC en N van BD onderling en met het midden O van AB. Men berekene nu eerst MN in $\triangle$ OMN en daarna MN als zwaartelijn van $\triangle$ ACN, waarvan AN resp. CN als zwaartelijnen van $\triangle$ ABD en $\triangle$ BCD zijn te vinden.

Daar O, M en N middens zijn van zekere lijnstukken, is $ON = \frac{1}{2}x$, $OM = \frac{1}{2}y$ en $\angle MON = \angle(AD, BC) = \alpha + \beta - 180^\circ$. Dus volgens de cosinusregel vindt men als men nog $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$ stelt

$$(1) \quad MN^2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}xy\cos(\alpha + \beta - 180^\circ) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}xy\cos\gamma .$$

Verder vindt men in $\triangle$ ABD voor de zwaartelijn AN

$$AN^2 = \frac{1}{2}l^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}BD^2;$$

evenzo in $\triangle$ DBC voor de zwaartelijn CN

$$CN^2 = \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}BD^2.$$

Dus in $\triangle$ ANC voor de zwaartelijn MN

$$(2) \quad MN^2 = \frac{1}{2}AN^2 + \frac{1}{2}NC^2 - \frac{1}{4}AC^2 = \frac{1}{4}l^2 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{4}BD^2 - \frac{1}{4}AC^2.$$

Uit (1) en (2) volgt na gelijkstellen

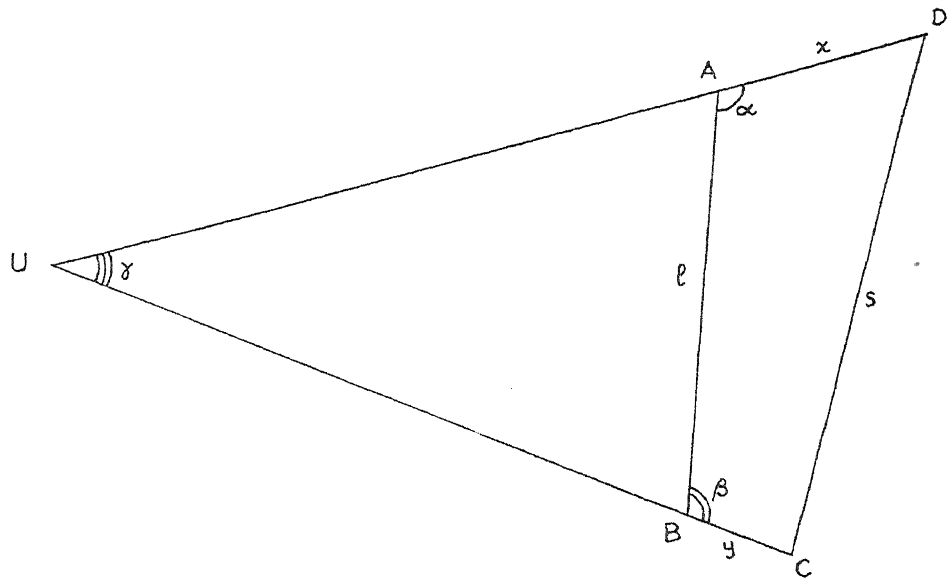
$$l^2+s^2-BD^2-AC^2= -2xy \cos\gamma ,$$

dus na gebruik van de cosinusregel voor AC en BD resp. in $\triangle$ ABC en $\triangle$ ABD

$$l^2 + s^2=2\, l^2 + x^2 + y^2- 2xl \cos\alpha - 2yl \cos\beta - 2xy \cos\gamma .$$

Derhalve

(3) $x^2 + y^2 - 2xy \cos\gamma - 2xl \cos\alpha - 2yl \cos\beta + l^2 - s^2 = 0.$



2e afleiding van (3).

Verleng AD en BC tot snijpunt U. Dan is $\angle U=\gamma$. Uit de sinusregel in $\triangle$ ABU volgt

$$AU = l\,\frac{\sin\beta}{\sin\gamma};\quad BU = l\,\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} .$$

Uit de cosinusregel in $\triangle$CDU volgt dan

$$s^2 = UD^2 + UC^2 - 2UD.UC.\cos\gamma$$

$$= \left(x+l\,\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\right)^2 + \left(y+l\,\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right)^2 - 2\left(x+l\,\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\right)\left(y+l\,\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right)\cos\gamma$$

$$= x^2+y^2-2xy \cos\gamma + 2xl \left(\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} - \frac{\sin\alpha\cos\gamma}{\sin\gamma}\right) + 2yl \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} - \frac{\sin\beta\cos\gamma}{\sin\gamma}\right)$$

$$+ \frac{l^2}{\sin^2\gamma}\left(\sin^2\beta + \sin^2\alpha - 2 \sin\alpha \sin\beta\cos\gamma\right)$$

Hierin is de coëfficiënt van 2xl gelijk aan (lettende op $\beta+\alpha=180^\circ+\gamma$)

$$\frac{\sin\beta -\sin\alpha\cos\gamma}{\sin\gamma} = \frac{\sin(\alpha-\gamma)-\sin\alpha\cos\gamma}{\sin\gamma} = - \cos\alpha .$$

Evenzo vindt men dat de coëfficiënt van 2yl gelijk is aan $-\cos\beta$.

Tenslotte vindt men voor de coëfficiënt van l^2

$$\frac{\sin\alpha\left\{\sin\alpha-\sin\beta\cos\gamma\right\}+\sin\beta\left\{\sin\beta-\sin\alpha\cos\gamma\right\}}{\sin^2\gamma}$$

$$=\frac{-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\beta\cos\alpha\sin\gamma}{\sin^2\gamma}=+1.$$

(3) Dus $s^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\gamma - 2xl\cos\alpha - 2yl\cos\beta + l^2$.

Beschouw diverse waarnemingen s_i, α_i, β_i $(i=1,2,\ldots)$ van s, α, β. Reeds uit twee dezer waarnemingen volgt door de relatie (3) in principe de waarde van x en y. Men moet daartoe echter 2 quadratische vergelijkingen in x en y oplossen hetgeen in het algemeen leidt tot een vergelijking van hogere graad dan de tweede.
Waar echter het aantal waarnemingen meer is dan 2, kan men dat feit uitbuiten door anders te werk te gaan. Beschouw de resultaten der i^e en j^e waarneming en trek voor deze de relaties (3) van elkaar af. Dan vindt men

$$s_i^2 - s_j^2 = -2xy(\cos\gamma_i - \cos\gamma_j) - 2xl(\cos\alpha_i - \cos\alpha_j) - 2yl(\cos\beta_i - \cos\beta_j).$$

Stel $2\,l(\cos\alpha_i - \cos\alpha_j) = \alpha_{ij}$, $2\,l(\cos\beta_i - \cos\beta_j) = \beta_{ij}$, $2(\cos\gamma_i - \cos\gamma_j) = \gamma_{ij}$,

en $s_i^2 - s_j^2 = s_{ij}$. Dan kan het gevondene worden geschreven in de vorm

(4) $\gamma_{ij}xy + \alpha_{ij}x + \beta_{ij}y + s_{ij} = 0.$

Nog vindt men wegens de term xy geen lineaire vergelijking. Men bereikt dit echter wel door uit twee der relaties van het laatstgevonden type (4) de term met xy te elimineren. Men vindt dan

(5) $(\alpha_{ij}\gamma_{kl} - \alpha_{kl}\gamma_{ij})\,x + (\beta_{ij}\gamma_{kl} - \beta_{kl}\gamma_{ij})y + (s_{ij}\gamma_{kl} - s_{kl}\gamma_{ij}) = 0.$

$(i,j,k,l=1,2,\ldots)$.

Om nu de beste waarden voor x en y te vinden past men op de thans verkregen vergelijking (5) b.v. de methode der kleinste quadraten toe. Statistisch gezien is echter de overgang van (4) op (5) niet in alle gevallen het meest aanbevelenswaardig om de onbekende grootheden x en y van (4) te bepalen.