STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1956-009

Algemene grenswaardentheorie en haar nut in de elementaire analyse

Prof.dr. J. Ridder

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen van hoger standpunt belicht"

1956

Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen van hoger standpunt belicht"

door

Prof.Dr J. Ridder

20 april 1956

Algemene grenswaardentheorie en haar nut in de elementaire analyse

Historische inleiding. Gerichte systemen (E.H. Moore en H.L. Smith 1922). Filters of roosters (Henri Cartan 1937). Samensmelting tot één theorie (O. Haupt 1922).

Uitgangspunt: $\lim_{x \to \xi;\, x \in E} f(x)$, met $f(x)$ reëel op de deelverzameling E der getallenrechte, en ξ contactpunt van E. Omgevingsdefinitie en definitie met rijen.

(Abstracte omgevingsdefinitie). Omgevingen van een punt P ener abstracte ruimte $\mathcal{R}$ zijn aan P toegewezen, niet lege deelverzamelingen der ruimte. P is contactpunt van E (in $\mathcal{R}$), als voor iedere omgeving i(P) van P $E.i(P) \neq 0$.

Stelsels van omgevingen. Minstens zo fijn als. Rationale en niet-rationale stelsels.

$\lim_{P' \to P;\, P' \in E} f(P') = \mathcal{R}$, bij omgevingenstelsels V en U van P in de grondruimte $\mathcal{R}$, resp. van $\mathcal{R}$ in de beeldruimte $\mathcal{Y}$, P contactpunt van $E(\leq \mathcal{R})$ als bij iedere omgeving $u \in U$ bestaat een $v \in V$ met $f(v.E) \leq u$.

De begrippen contact-en limietpunt zijn invariant tegenover een ev. nodige uitbreiding van het stelsel van omgevingen van een punt om te voldoen aan:

Axioma Ω_0. Is i(P) omgeving van P en $v \supset i(P)$, zo is ook v omgeving van P.

Reeds gelden bekende eigenschappen over limieten (en continuiteit) bij samengestelde functies.

De eigenschap: limiet som = som limieten voert o.m. tot invoering in de grondruimte van

Axioma Ω_1. De doorsnede van twee omgevingen bevat steeds een omgeving. De grenswaarde is ondubbelzinnig bepaald, als Ω_1 geldt in de grondruimte, en in de beeldruimte geldt

Axioma Ω_2. Twee punten P_1 en P_2 der ruimte hebben omgevingen $\bar{I}(P_1)$ resp. $\bar{\bar{I}}(P_2)$ met $\bar{I}(P_1).\bar{\bar{I}}(P_2)=0$.

Voor de overdracht van het algemeen konvergentiekenmerk van Cauchy is het voldoende de beeldruimte als uniform en volledig aan te nemen.

Axioma Ω_3. De ruimte is uniform en volledig.

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Definitie. Een ruimte is uniform bij bestaan van een verzameling Λ, welker elementen λ voor ieder punt P der ruimte eeneenduidig zijn toegevoegd aan de omgevingen $u_\lambda(P)$ van P.

Definitie. Een stelsel C van deelverzamelingen van een uniforme ruimte heet een Cauchy-stelsel, als bij iedere $\lambda \in \Lambda$ een deelverzameling $v \in C$ en een punt P behoort met

$$v \leq u_\lambda(P).$$

Definitie. Een uniforme ruimte, in welke ieder Cauchy-stelsel een limiet heeft, heet volledig.

(Definitie met gerichte systemen). Een verzameling E van punten S_α van een abstracte ruimte heet gericht, als: 1^0 voor twee punten S_α, S_β òf $\alpha << \beta$ òf niet; 2^0 uit S_α, S_β, $S_\gamma \in E$ met $\alpha << \beta, \beta << \gamma$ volgt $\alpha << \gamma$.

Een einde van een gerichte verzameling $\{S_\alpha\}$ is elke deelverzameling $\{S_{\alpha'}\}$ met de eigenschap dat er een index β bestaat, zo dat voor alle γ met $\beta << \gamma$ geldt $S_\gamma \in \{S_{\alpha'}\}$.

Is het stelsel van einden van een gerichte verzameling minstens zo fijn als het stelsel omgevingen van een punt P, zo wordt het stelsel naar P konvergerend genoemd.

De inclusie-relatie geeft een partiele ordening in het omgevingenstelsel U van een punt P. Deze ordening laat zich overdragen op iedere verzameling, U-gericht systeem genoemd, die uit iedere omgeving een punt bevat.

$\lim\limits_{\substack{P' \to P;\, P' \in E \\ P \text{ contactpunt van } E}} f(P') = \mathfrak{R}$, bij omgevingenstelsels V en U van P, resp. $\mathfrak{R}$, met

als voor ieder V-gericht systeem, behorend tot E (of wel voor ieder tot E behorende en naar P konvergerende gerichte verzameling), $\{S_\alpha\}$, de einden van $\{f(S_\alpha)\}$ minstens zo fijn zijn als het omgevingenstelsel U.

Aequivalentie der omgevingsdefinitie (zonder de voorwaarden Ω_0 tot Ω_3) met deze definitie. Met de Ω_j korresponderende axioma's Ω_j^* bij de laatste definitie.

Toepassingen: I. Onder- en bovenintegraal van Darboux, Riemann-integraal; II. Rectificatie van krommen; III. Ongeordende sommatie.

Literatuur: Kelley, General topology, New York 1955, chapter 2;
Bourbaki, Topologie générale, Act.sci. nrs 858, 916 (1940/42);
Haupt-Aumann-Pauc, Differential- und Integralrechnung, Band I, 2e Aufl. 1948, Abschnitt 6.