

STICHTING  
MATHEMATISCH CENTRUM  
2e BOERHAAVESTRAAT 49  
AMSTERDAM

ZW 1961 - 009

Voordracht in de serie  
"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

Prof.dr. J. Popken

4 oktober 1961

Meetkundige methoden in analyse en getallenleer



1961

ZW

STICHTING  
 MATHEMATISCH CENTRUM  
 2e BOERHAAVESTRAAT 49  
 AMSTERDAM

ZUIVERE WISKUNDE

Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

door

Prof.dr. J. Popken

4 oktober 1961

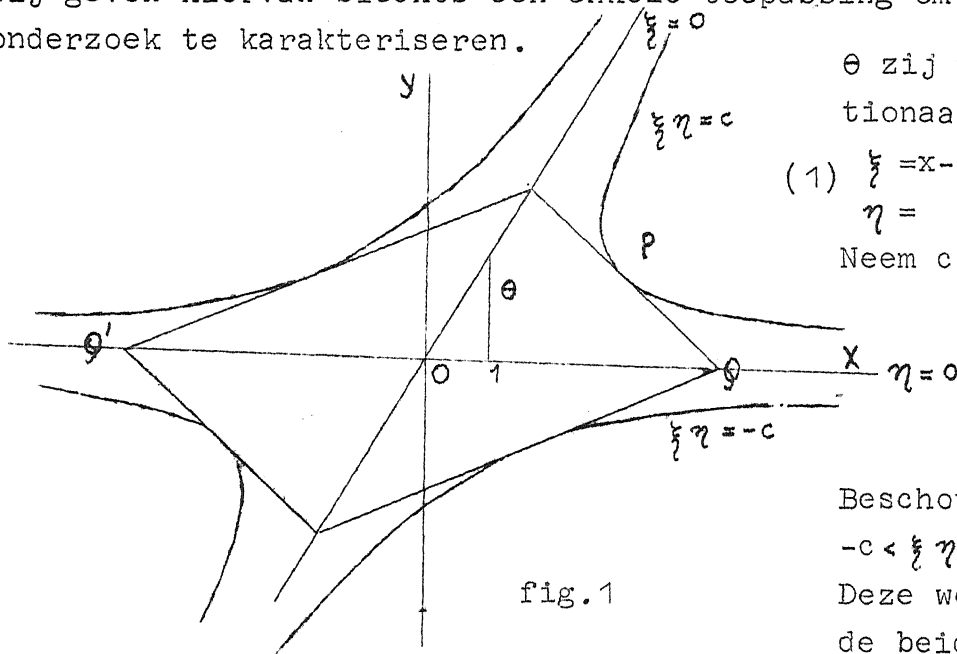
Meetkundige methoden in analyse en getallenleer

1. Meetkunde van de getallen.

Hoofdstelling (Minkowski). Zij  $F$  een convex gebied met oppervlakte  $> 4$  en symmetrisch t.o.v. de oorsprong. Dan bevat  $F$  behalve de oorsprong nog minstens één ander punt  $(m,n)$  met gehele coördinaten (z.g. roosterpunt).

Bewijs: Hardy and Wright, Introduction to the theory of numbers, pag.31 e.v.

Wij geven hiervan slechts één enkele toepassing om dit gebied van onderzoek te karakteriseren.



$\theta$  zij vastgekozen irrationaal getal. Zij

$$(1) \quad \xi = x - \theta y$$

$$\eta = y.$$

Neem  $c > 0$ .

Beschouw de figuur:

$$-c < \xi \eta < c.$$

Deze wordt begrensd door de beide toegevoegde hyperbolen

$$\xi \eta = xy - \theta y^2 = c$$

$$\xi \eta = xy - \theta y^2 = -c$$

met asymptoten  $\eta = y = 0$ ,  $\xi = x - \theta y = 0$ .

Deze figuur is niet convex.

Breng nu echter een raaklijnen parallellogram aan en pas daarop de stelling van Minkowski toe. Daartoe moet de oppervlakte van het parallellogram berekend worden. Dit doet men het beste door transformatie (1) op een nieuw rechthoekig assenstelsel met  $\xi$  en  $\eta$ -assen.

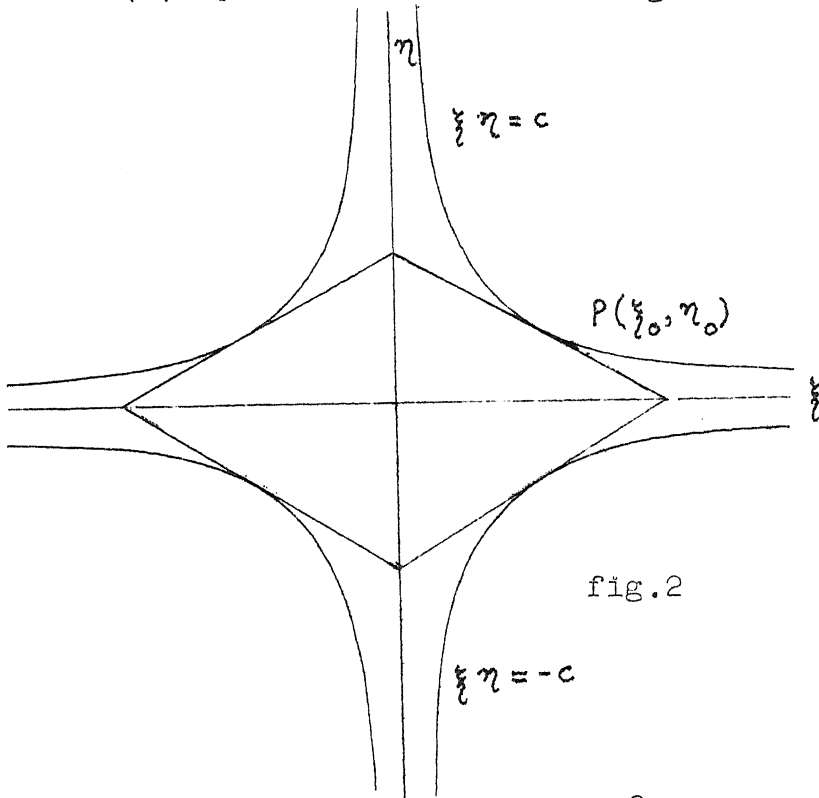


fig.2

De hyperbolen worden nu toegevoegde orthogonale hyperbolen. De oppervlakte van het (raaklijnen) parallellogram verandert niet omdat de determinant in (1) gelijk aan 1 is.

Raaklijn in  $P(\xi_0, \eta_0)$  aan  $\xi \eta = c$ :

$$\xi \eta_0 + \xi_0 \eta = 2c;$$

deze snijdt de assen in

$$\xi = \frac{2c}{\eta_0}, \eta = 0 \text{ en } \xi = 0,$$

$$\eta = \frac{2c}{\xi_0}.$$

$$\frac{1}{4} \text{ oppervlak} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2c}{\eta_0} \cdot \frac{2c}{\xi_0} = \frac{2c^2}{\xi_0 \eta_0} = 2c$$

oppervlak =  $8c$ .

Kies nu  $c = \frac{1}{2} + \epsilon$ , dan is het oppervlak  $> 4$  en het parallellogram bevat minstens één roosterpunt dat van de oorsprong verschilt.

M.a.w.: er is een oplossing in gehele  $x$  en  $y$ , niet beide nul, zodat

$$(2) \quad |y(x - \theta y)| \leq \frac{1}{2}.$$

Het kan hierin best gebeuren dat  $y=0$  is (roosterpunt op X-as). We hebben echter nog vrijheid om het parallellogram te kiezen. We kunnen b.v. in figuur 1 de punten  $Q$  en  $Q'$  kiezen op een afstand  $< 1$  van de oorsprong, zodat het parallellogram langgerekt wordt. In dit geval ligt er geen roosterpunt meer op de X-as, terwijl toch aan (2) voldaan is. Dan is  $y \neq 0$  en uit (2) volgt

$$(3) \quad 0 < \left| \theta - \frac{x}{y} \right| < \frac{1}{2y^2}.$$

Men ziet zo zelfs in dat op deze wijze  $\infty$  vele oplossingen in gehele  $x, y$  van (3) gevonden kunnen worden.

2. Een bewijsmethode van Kusmin.

Laat  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  een oneindige rij van reële getallen zijn. In de getallenleer is het vaak van zeer groot belang om de absolute waarde van sommen van de vorm

$$\sum_{\nu=1}^n e^{2\pi i \alpha_\nu}$$

naar boven te begrenzen. Een bekend criterium van Weyl zegt b.v. dat indien  $f(x)$  een reële functie is, de getallen  $f(1), f(2), f(3), \dots$  modulo 1 gelijk verdeeld zijn dan en alleen dan als

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n e^{2\pi i h f(\nu)} = 0$$

is voor elk geheel getal  $h \neq 0$  (zie b.v. Koksma, Diophantische Approximationen, pag.91, Satz 6).

Van fundamenteel belang voor het onderzoek van dergelijke sommen is daarbij de volgende stelling van Van der Corput en Landau:

Laat  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$  reële getallen zijn met

$$0 < \nu \leq \alpha_2 - \alpha_1 \leq \alpha_3 - \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n - \alpha_{n-1} \leq 1 - \nu$$

(waarbij  $0 < \nu \leq \frac{1}{2}$  is).

Dan is  $\left| \sum_{\nu=1}^n e^{2\pi i \alpha_\nu} \right| \leq \cotg \frac{\pi \nu}{2}$ .

(Zie Koksma p.115 (Satz 21).)

Triviaal is de bovengrens  $n$ , maar het hier genoemde resultaat hangt niet van  $n$  af.

We geven nu een meetkundig bewijs ( $n > 2$ ). Stel  $S_0 = 0$ ,  $S_m = \sum_{\nu=1}^m e^{2\pi i \alpha_\nu}$  ( $m=1, 2, 3, \dots$ ). We beelden de getallen  $S_m$  in het complexe vlak af (zie fig.3) en krijgen na verbinding van twee opeenvolgende punten een polygoontrek met zijden ter lengte 1. De  $\nu$ -de zijde maakt een hoek  $2\pi \alpha_\nu$  met de reële as. De hoek tussen twee opeenvolgende zijden is  $\beta_\nu = 2\pi (\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu)$ . Uit het gegeven volgt

$$2\pi \nu \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_{n-1} \leq 2\pi (1 - \nu)$$

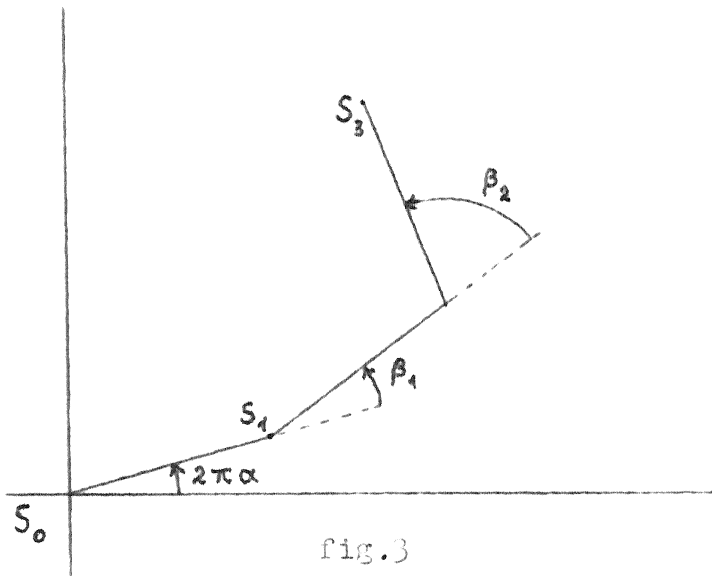


fig.3

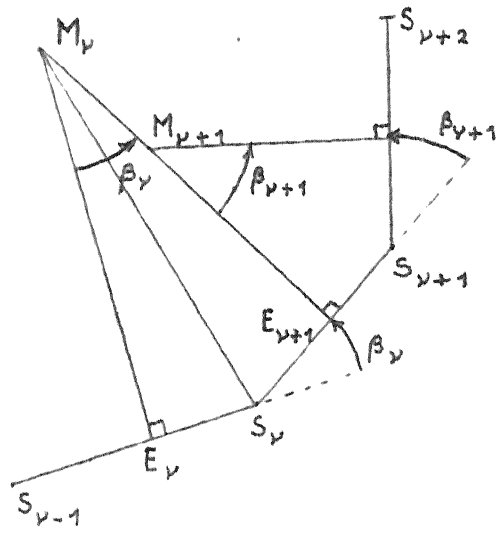


fig.4

Beschouw nu fig.4.  $M_\nu$  zij het middelpunt van de cirkel door de punten  $S_{\nu-1}, S_\nu$  en  $S_{\nu+1}$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n-1$ ). Uit  $M_\nu$  laten we de loodlijn  $M_\nu E_\nu$  neer op de zijde  $S_{\nu-1} S_\nu$ .

Uit de figuur zien we dan:

$$M_\nu E_\nu = M_\nu E_{\nu+1} = \frac{1}{2} \cotg \frac{1}{2} \beta_\nu, \quad M_\nu S_{\nu-1} = M_\nu S_\nu = M_\nu S_{\nu+1} = \frac{1}{2} \operatorname{cosec} \frac{1}{2} \beta_\nu.$$

Dus is

$$M_\nu M_{\nu+1} = M_\nu E_{\nu+1} - M_{\nu+1} E_{\nu+1} = \frac{1}{2} (\cotg \frac{1}{2} \beta_\nu - \cotg \frac{1}{2} \beta_{\nu+1})$$

$$(\nu = 1, 2, \dots, n-1).$$

$$|S_n| = S_0 S_n \leq S_0 M_1 + M_1 M_2 + M_2 M_3 + \dots + M_{n-2} M_{n-1} + M_{n-1} S_n$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{cosec} \frac{1}{2} \beta_1 + \frac{1}{2} (\cotg \frac{1}{2} \beta_1 - \cotg \frac{1}{2} \beta_2) + \frac{1}{2} (\cotg \frac{1}{2} \beta_2 - \cotg \frac{1}{2} \beta_3) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2} (\cotg \frac{1}{2} \beta_{n-2} - \cotg \frac{1}{2} \beta_{n-1}) + \frac{1}{2} \operatorname{cosec} \frac{1}{2} \beta_{n-1}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{cosec} \frac{1}{2} \beta_1 + \cotg \frac{1}{2} \beta_1 - \cotg \frac{1}{2} \beta_{n-1} + \operatorname{cosec} \frac{1}{2} \beta_{n-1} \right\}.$$

$$\text{Nu is } \operatorname{cosec} \varphi + \cotg \varphi = \frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{\cos \frac{1}{2} \varphi}{\sin \frac{1}{2} \varphi} = \cotg \frac{1}{2} \varphi$$

$$\operatorname{cosec} \varphi - \cotg \varphi = \frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi$$

$$|S_n| \leq \frac{1}{2} \left\{ \cotg \frac{1}{4} \beta_1 + \operatorname{tg} \frac{1}{4} \beta_{n-1} \right\} \leq \frac{1}{2} \left\{ \cotg \frac{\pi \nu}{2} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} (1 - \nu) \right\} = \cotg \frac{\pi \nu}{2}.$$

Van der Corput en Landau hebben veelvuldig gebruik gemaakt van deze stelling. De eerste bewees daarmee de z.g. "blauwe stelling" (zie Koksma, Satz 20, p.114) die hij en zijn leerlingen op tal van problemen

toepasten: algemene roosterpuntproblemen, cirkelprobleem, delerprobleem, onderzoek van de  $\zeta$ -functie in de kritieke strook. Landau paste de stelling o.a. toe op het probleem van Waring: Laat  $k$  een gegeven natuurlijk getal zijn  $\geq 3$ . Dan bestaat er een van  $k$  afhankelijk getal  $r$ , zodat elk natuurlijk getal  $n$  te schrijven is als een som van hoogstens  $r$   $k^{\text{de}}$  machten. (Zie Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie: 6e deel, 5e Hfdst. § 1 St. 352.)

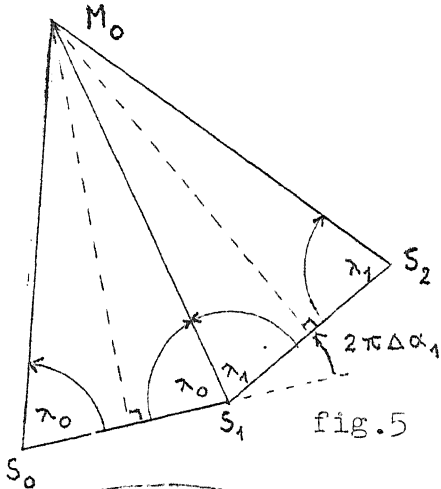
3. Een analoge stelling.

Zij  $n > 1$ ;  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$ ;  
 $0 < \vartheta \leq \Delta \alpha_\nu \leq \frac{1}{4}$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n-1$ )  
 $\Delta^2 \alpha_\nu \geq 0$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n-2$ ),  $\Delta^3 \alpha_\nu \geq 0$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n-3$ ).

Dan volgt:

$$\left| \sum_{\nu=1}^n a_\nu e^{2\pi i \alpha_\nu} \right| \leq a_1 \operatorname{cosec} \pi \vartheta$$

Bewijs: voor het speciale geval  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ .



$K_0$  zij de cirkel door  $S_0, S_1$  en  $S_2$  met middelpunt  $M_0$  en straal  $R_0$ .

$K_\nu$  zij de cirkel rakend in  $S_\nu$  aan  $K_{\nu-1}$  en gaande door  $S_{\nu+1}$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n-1$ ).

We zullen nu bewijzen dat elke volgende cirkel binnen de vorige ligt, zodat  $S_n$  binnen  $K_0$  ligt.

Zij  $M_\nu$  het middelpunt van  $K_\nu$  ( $\nu = 0, 1, 2, \dots$ )  
 $\lambda_\nu = \angle M_\nu S_\nu S_{\nu+1}$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n-1$ ).

Voldoende is te bewijzen dat

(1)  $\lambda_\nu \leq \lambda_{\nu-1}$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n-2$ )

want wegens  $S_{\nu-1} S_\nu = S_\nu S_{\nu+1} = 1$  volgt hieruit  $M_\nu S_\nu \leq M_{\nu-1} S_\nu$ .

(1) bewijzen we met behulp van volledige inductie, gebruikmakend van de evidente betrekking

(3)  $\lambda_{\nu-1} + \lambda_\nu + 2\pi \Delta \alpha_\nu = \pi$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n-1$ ).

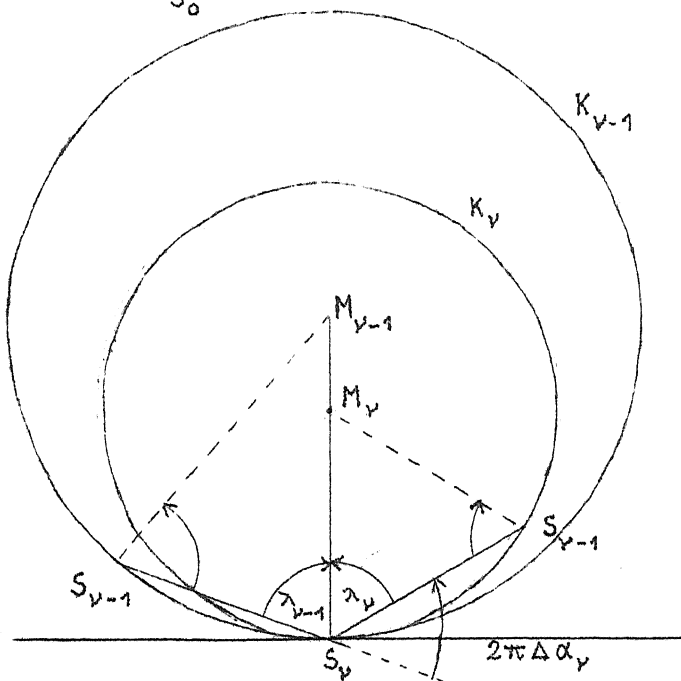


fig. 6

We vinden uit (3) voor  $\nu=1$  en  $\nu=2$

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + 2\pi\Delta\alpha_1 &= \lambda_0 + \lambda_1 + 2\pi\Delta\alpha_1 = \pi \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\pi\Delta\alpha_2 &= \pi \end{aligned}$$

Dus door aftrekking

$$\begin{aligned} \lambda_2 - \lambda_1 + 2\pi\Delta^2\alpha_1 &= 0 \\ \lambda_2 - \lambda_1 &\leq 0. \end{aligned}$$

(1) is dus bewezen voor  $\nu=1$  en  $\nu=2$ . Zij nu  $3 \leq \nu \leq n-2$  en neem aan dat (1) voor kleinere waarden al bewezen is; dus  $\Delta\lambda_{\nu-3} \leq 0$ .

We hebben successievelijk

$$\begin{aligned} \lambda_{\nu-3} + \lambda_{\nu-2} + 2\pi\Delta\alpha_{\nu-2} &= \pi \\ -2\lambda_{\nu-2} - 2\lambda_{\nu-1} - 4\pi\Delta\alpha_{\nu-1} &= -2\pi \\ \lambda_{\nu-1} + \lambda_{\nu} + 2\pi\Delta\alpha_{\nu} &= \pi. \end{aligned}$$

Dus door optelling

$$\lambda_{\nu-3} - \lambda_{\nu-2} - \lambda_{\nu-1} + \lambda_{\nu} + 2\pi\Delta^3\alpha_{\nu-2} = 0;$$

wegens  $\Delta^3\alpha_{\nu-2} \geq 0$  geldt dus

$$-\Delta\lambda_{\nu-3} + \Delta\lambda_{\nu-1} \leq 0.$$

Wegens de inductie aanname

$$\Delta\lambda_{\nu-1} \leq \Delta\lambda_{\nu-3} \leq 0,$$

waarmee (1) bewezen is.

$S_n$  ligt dus binnen de cirkel  $K_0$ ; dus  $|S_n| \leq 2R_0$ , terwijl  $R_0 \cos \lambda_0 = \frac{1}{2}$ . Er volgt

$$\begin{aligned} |S_n| &\leq \sec \lambda_0 = \sec \frac{1}{2} (\pi - 2\pi\Delta\alpha_1) \\ &= \operatorname{cosec} \pi\Delta\alpha_1 \leq \operatorname{cosec} \pi \nu. \end{aligned}$$

Literatuur: J. Popken, Ueber eine trigonometrische Summe, Proceedings Kon.Akad.v. Wetensch. 35 (1932), 668-680.

4. Meetkundige representatie van machtreeksen.

Laat gegeven zijn een machtreeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} w^n,$$

waarbij de coëfficiënten  $a_n$  alle reëel zijn en  $w$  een willekeurig maar vast gekozen complex getal is met argument  $\psi$ ;  $w^n$  heeft dan argument  $n\psi$ . We tekenen nu in het complexe vlak de punten  $S_0=0$ ,  $S_1=a_0$ ,  $S_2 = a_0 + a_1 w, \dots, S_n = a_0 + \dots + \frac{a_{n-1} w^{n-1}}{(n-1)!}, \dots$  en we verbinden de

opeenvolgende punten door rechte lijnstukken.

Zijn in het bijzonder alle coëfficiënten  $a_n$  positief dan ontstaat zo een polygoontrek, waarvan de zijden opvolgend de lengten  $a_0, a_1, a_2, \dots$  hebben en waarbij de ingesloten hoeken alle gelijk zijn aan  $\psi$ . Men kan dan van een "isogoon" spreken.

L.M. de Haan heeft zich in zijn dissertatie nu afgevraagd welke meetkundige eigenschappen zulke polygoontrekken hebben, in het bijzonder voor bekende machtreeksen zoals  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$ .

Hij gaat daarbij uit van een vaste hoek  $\psi$ . Laat  $G$  en  $T$  twee vlakke krommen zijn met de volgende eigenschap:  $T$  snijdt een willekeurige raaklijn aan  $G$  onder de hoek  $\psi$ . In dat geval heet  $T$  een  $\psi$ -gonale trajectorie van het raaklijnenstelsel van  $G$ , kortweg:  $\psi$ -gonale trajectorie van  $G$ .  $G$  heet de  $\psi$ -gonale genetrix van  $T$ .

Dit is blijkbaar een generalisatie van het bekende geval  $\psi = \frac{\pi}{2}$ . In dit geval heet  $T$  een orthogonale trajectorie van  $G$ , ofwel een evolvente van  $G$  en  $G$  heet de evolute. Onder omstandigheden mag  $G$  ontaarden in één enkel punt. In dit geval maakt  $T$  een vaste hoek  $\psi$  met de stralen door het punt  $G$ . In het geval  $\psi = \frac{\pi}{2}$  is  $T$  blijkbaar een cirkel; in het algemene geval  $\psi \neq \frac{\pi}{2}$  wordt  $T$  een logaritmische spiraal.

De Haan heeft de theorie die hierbij behoort op elegante wijze uitgewerkt. Hij maakt daarbij op systematische wijze gebruik van twee hulpmiddelen: a) de representatie van punten in het platte vlak door complexe getallen, b) van de symbolische machten analoog aan die welke optreden in de theorie der getallen van Bernoulli. Aan de hand van enkele voorbeelden zullen we dit uitleggen.

Zij  $w_0$  een vast complex getal met  $\arg w_0 = \psi$ ,  $A$  zij een vast positief getal, terwijl  $t$  een parameter is die van  $-\infty$  tot  $+\infty$  varieert. De complexe punten

(1) 
$$z = A e^{w_0 t}$$



doorlopen dan een georiënteerde kromme in het complexe vlak. In het punt  $t$  krijgen we dan de raaklijn aan de kromme door het rechterlid van (1) naar  $t$  te differentieren. Er ontstaat

$$(2) \quad z' = A w_0 e^{w_0 t}$$

en de richting van de raaklijn valt samen met die van de vector  $z'$ .

De hoek die beide vectoren  $z$  en  $z'$  uit (1) en (2) met elkaar maken is blijkbaar

$$\arg z' - \arg z = \arg \frac{z'}{z} = \arg w_0 = \psi.$$

Dit is dus de hoek die de kromme (1) maakt met stralen door de oorsprong; m.a.w. de kromme (1) is een  $\psi$ -gonale trajectorie van de oorsprong, dus een logaritmische spiraal.

Is  $\psi = \frac{\pi}{2}$  dan is  $w_0$  zuiver imaginair, en dus is dan  $\left| Ae^{w_0 t} \right| = A$ , zodat in dit geval (1) een cirkel voorstelt met straal  $A$ .

De Haan bewijst nu de volgende fundamentele stelling (p.47):

Zij gegeven een willekeurige oo rij van reële getallen  $a_0 > a_1, a_2, \dots$ ; zij  $w_0$  een vast complex getal met  $\arg w_0 = \psi$ . Zij  $t$  een reële parameter die van  $-\infty$  tot  $+\infty$  varieert.

Beschouw de functie

$$(3) \quad z_n(t) = e^{w_0 t} \sum_{\nu=0}^{n-1} (a-t)^\nu \frac{w_0^\nu}{\nu!},$$

waarbij  $(a-t)^\nu$  een symbolische macht is; d.w.z. men werke deze uit met behulp van het binomium van Newton en men vervange dan  $a^0$  door  $a_0$ ,  $a^1$  door  $a_1$ ,  $a^2$  door  $a_2$  enz.; dus

$$(a-t)^\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} a_\mu (-t)^{\nu-\mu}.$$

Bewering: De vergelijking  $z = z_n(t)$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) stelt dan een reeks krommen  $T_n$  voor, waarbij de eerste een logaritmische spiraal (of cirkel) om de oorsprong is en waarbij verder  $T_n$  een  $\psi$ -gonale trajectorie van  $T_{n-1}$  is.

In het speciale geval  $\psi = \frac{\pi}{2}$  krijgen we voor  $T_1$  een cirkel en verder een reeks van successieve evolventen.

Deze stelling kan gebruikt worden om een machtreeks  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} w_0^n$  meetkundig te representeren en als voorbeeld nemen we de exponentiële reeks  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_0^n}{n!}$ .

In dit speciale geval zijn alle coëfficiënten  $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ , zodat de symbolische macht  $(a-t)^\nu$  nu de gewone macht  $(1-t)^\nu$  is. De functie  $z_n(t)$  uit (3) is in dit geval

$$z_n(t) = e^{w_0 t} \sum_{\nu=0}^{n-1} (1-t)^\nu \frac{w_0^\nu}{\nu!},$$

dus  $z_n(1) = e^{w_0}$  en

$$z_n(0) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{w_0^\nu}{\nu!}.$$

De isogoon met opvolgende hoekpunten  $z_1(0)=1, z_2(0)=1+w_0, z_3(0), \dots$  geeft de gezochte representatie (fig.7.).

Beschouw nu de krommen  $T_n$

$$z = z_n(t) \quad \text{met } 0 \leq t \leq 1.$$

Deze hebben, blijkens het voorgaande, hun beginpunt  $z_n(0)$  in een hoekpunt van de isogoon. Verder hebben ze een gemeenschappelijk eindpunt  $z_n(1)=e^{w_0}$ , dat op de logarithmische spiraal ligt. In fig.7 is deze situatie neergelegd:

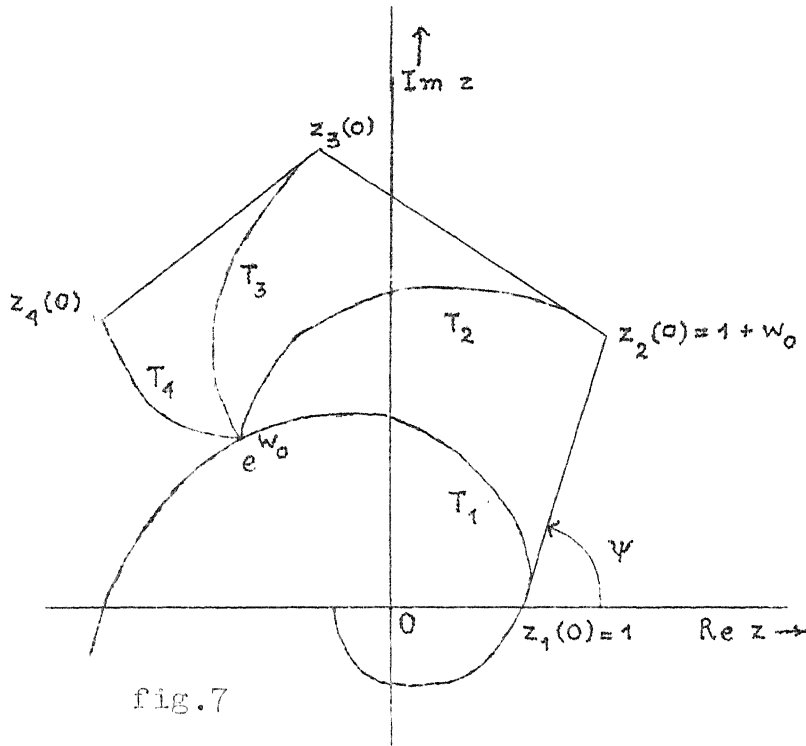


fig.7

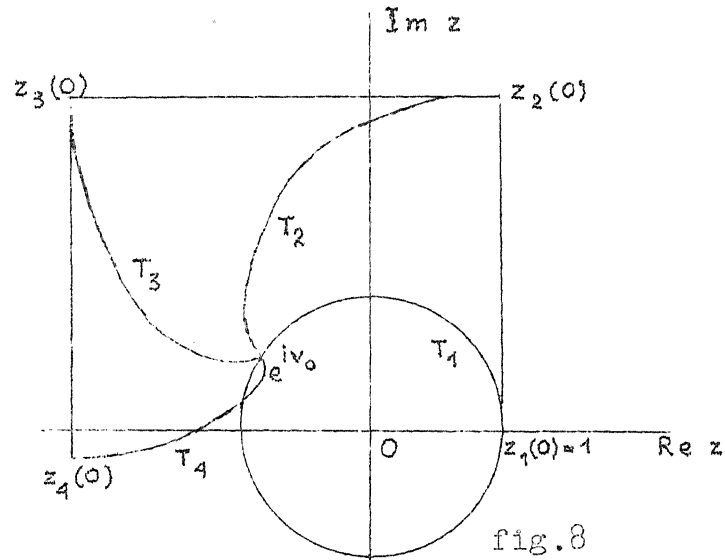
$T_1$  is een logarithmische spiraal, gaande door de punten 1 en  $e^{w_0}$ ,  
 $T_2$  is de  $\psi$ -gonale trajectorie van  $T_1$  gaande door  $e^{w_0}$  en  $z_2(0)$ ,  
 $T_3$  de  $\psi$ -gonale trajectorie van  $T_2$ , enz.

Dit kan aanleiding geven tot een "constructie" van de isogoon, uitgaande van de stralenbundel door 0.

Een bijzonder eenvoudige figuur krijgt men voor  $w_0$  zuiver imaginair:  $w_0 = i\vartheta_0, \psi = \frac{\pi}{2}$ , dus voor de machtreeks

$$e^{i\vartheta_0} = \cos \vartheta_0 + i \sin \vartheta_0 = 1 + \frac{i\vartheta_0}{1!} - \frac{\vartheta_0^2}{2!} - \frac{i\vartheta_0^3}{3!} + \frac{\vartheta_0^4}{4!} + \dots$$

$T_1$  wordt nu de eenheidscirkel,  $T_2$  een cirkel-evolvente gaande door  $e^{i\psi_0}$  en  $1+i\psi_0$ ,  $T_3$  een evolvente van  $T_2$ , enz. Blijkbaar gaat de isofoon over in een orthogoon. Zie fig.8.



Gemakkelijk vindt men door projectie op de assen hieruit de representaties van de cosinus en sinusfunctie.

Literatuur: L.M. de Haan, Over de meetkundige voorstelling van machtreksen, Dissertatie Utrecht 1953.