STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1962 - 009

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

Prof.dr. N.G. de Bruijn

24 oktober 1962

Puzzle en spel vanuit hoger standpunt belicht

1962

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.),by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

ZW 1962-009

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"
door
Prof.dr. N.G. de Bruijn
24 oktober 1962

Puzzle en spel vanuit hoger standpunt belicht

Het hogere standpunt van waaruit puzzle en spel vallen te belichten, is de wiskunde. Een boek als dat van Rouse Ball [6] doet zien hoeveel er op dit gebied is gedaan in de loop der eeuwen.

Een werkelijk algemeen gezichtspunt is er natuurlijk niet. In deze voordracht zullen we enkele typische gevallen bespreken, om verschillende soorten van wiskundige hulpmiddelen te kunnen ontmoeten.

Het begrip"puzzle" is vaag, want eigenlijk is elk wiskundig probleem een puzzle. Wij zullen onder puzzle een mathematisch probleem verstaan dat door vorm en graad van moeilijkheid aan niet-wiskundigen kan worden voorgelegd, en we zijn alleen geinteresseerd in gevallen waarin de wiskunde een fraaie oplossing levert.

1.1. De 15-puzzle. In een 4 x 4 bakje bevinden zich 15 genummerde 1 x 1-vierkantjes en één 1 x 1 gat. Door schuiven kan men de volgorde veranderen. Welke situaties zijn bereikbaar? Het antwoord luidt (voor twee situaties waarbij zich het gat op dezelfde plaats bevindt): situatie B is dan en slechts dan vanuit situatie A bereikbaar als B een <u>even</u> permutatie van A is. (Zie bijv. Rouse Ball [6]).

1.2. <u>Dominostenen op schaakbord</u>. Kan een 8 x 8 schaakbord, nadat twee overstaande hoekvelden zijn weggenomen, door 31 dominostenen (elk 1 x 2) worden overdekt? Dit bekende probleem dient hier als voorbereiding tot

1.3. <u>Kist gevuld met balken</u>. a, b, c, k zijn gehele getallen. We hebben een kist met afmetingen a x b x c, en balkjes met afmetingen 1 x 1 x k. Kan de kist met zulke balkjes gevuld worden? Antwoord: nodig en voldoende is dat k deelbaar is op één der getallen a, b, c. Dat k deelbaar is op het product is nodig (wegens het volume), maar niet voldoende. Dat de eerstgenoemde voorwaarde voldoende is, is duidelijk (evenwijdige ligging). We geven een bewijs dat de voorwaarde voldoende is; dat bewijs gebruikt complexe getallen, en in het bijzonder het volgende feit: Als k en m geheel zijn, en

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} e^{2\pi in/k},$$

dan geldt: $S_m = 0$ dan en slechts dan als m een k-voud is.

Algemener: Als p, q, r gehele getallen zijn, p deelbaar op q, q deelbaar op r, dan geldt: de kist is dan en slechts dan te vullen als hij triviaal te vullen is. Onder triviale vulling wordt verstaan een manier waarbij alle ribben p parallel zijn, alle ribben q parallel, alle ribben r parallel. (Onlangs als opgave en oplossing gepubliceerd in Matematikai Lapok.)

1.4. <u>Solitaire</u>. Er is een tweedimensionaal rooster gegeven met zekere begrenzingen die voor ons momenteel onbelangrijk zijn. Op een aantal der roosterpunten staan pionnetjes. Een "zet" wordt als volgt uitgevoerd. Staat een pion a tussen een pion b en een lege plaats g (a, b, g vormen drie opeenvolgende punten van een roosterlijn) dan mag a over b heenspringen naar g, waarna b moet worden weggenomen. De vraag is of uit een gegeven situatie A een andere, B, is te bereiken. Nodig hiervoor is het overeenstemmen van twee invarianten; op grond daarvan kan de verzameling van alle posities in 16 klassen worden ingedeeld, zó dat men nooit uit een klasse in een andere kan komen. (Zie [3], pp. 127-145). Een elegante formulering kan worden gegeven met behulp van het eindige lichaam met 4 elementen. Deze elementen kunnen we voorstellen als 0, 1, x, $x+1$, en we hebben zowel $x^2 + x = 1$ als $1 + x = x^2$. De invarianten zijn

$$\sum_{(k,l)} x^{k+l} \quad \text{en} \quad \sum_{(k,l)} x^{k-l},$$

waarbij gesommeerd wordt over alle pionnen; (k,l) zijn de coordinaten van een pion.

2.1. Mathematische Spelen. De meeste twee-persoonsspelen zijn van het volgende type (zie [4], [1]). Zij G een eindige georienteerde graph, waarin geen gesloten georienteerde cyclen optreden, en waarvan één der punten, genaamd P_o, de eigenschap heeft dat het vanuit elk ander punt te bereiken is door een aantal stappen langs ribben in overeenstemming met de orientatie.

Twee spelers, A en B spelen het volgende spel: Er wordt in een of ander punt van de graph een pion geplaatst. De spelers doen om de beurt een zet (A begint). Een "zet" bestaat uit het schuiven van de pion van zijn positie P naar een andere, Q, waarbij alleen Q's zijn toegelaten zó dat PQ een georienteerde ribbe van de graph is. Degene die P_o bereikt heeft gewonnen.

De volgende stelling geldt: De punten van de graph kunnen in twee categorieën W en V worden ingedeeld zó dat

1^o $P_o \in W$.

2^o Als $P \in V$ dan is er een $Q \in W$ zó dat PQ een georienteerde ribbe is.

3^o Als $P \in W$ dan is er geen $Q \in W$ zó dat PQ een georienteerde ribbe is.

Er is slechts één dergelijke splitsing in klassen V en W mogelijk.

Op grond van deze stelling kan de verzameling van alle spelposities in winst- en verliesposities worden ingedeeld: wie aan zet is als de pion op een V staat, kan winnen door hem naar een W te schuiven.

We geven enkele voorbeelden.

2.1. Nim (zie bijv. [6]) en variaties van nim (zie bijv., voor een paar minder voor de hand liggende, [2]).

2.2. Spel van Wythoff (zie [6]): Posities zijn (m,n) ($m \geq 0$, $n \geq 0$, m en n geheel), als zet is mogelijk: verkleinen van één der componenten, of van beide, maar dan van elk met eenzelfde bedrag. $P_o = (0,0)$.

De winstposities zijn

$$([n,w], [n,w^2]) \text{ en } ([n,w^2], [n,w]),$$

waarin $w = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. Dit berust erop dat er tussen twee opvolgende gehele getallen ≥ 0 steeds precies één getal ligt dat één der gedaanten $n\tau$, $n\tau + n$ heeft.

De moderne speltheorie (zie bijv. [4]), die een geheel ander karakter heeft dan de bovengenoemde theorie van mathematische spelen, komt in deze voordracht niet of nauwelijks ter sprake.

Literatuur

1. C. Berge, Théorie des graphes et ses applications, Paris, 1958.

2. N.G. de Bruijn, Wiskundige Opgaven met de Oplossingen, deel 19, 1e stuk (1950), nr. 25, en deel 19, 2de stuk (1951), nr. 55.

3. G. Kowalewski, Altes und Neues über Mathematische Spiele, Leipzig-Berlin, 1930.

4. O. Morgenstern and J. von Neumann, Theory of Games and Economic Behavior, 2nd ed., Princeton 1947.

5. J. von Neumann, Zur Theorie der Gesellschaftspiele, Math. Ann. 100 (1928) 295-320.

6. W.W. Rouse Ball, Mathematical recreations and essays, 11th ed., London, 1959.