STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1963 - 009

Serie "Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

Voordracht door Prof.dr. J.H. de Boer

23 november 1963

# ELIMINATIE

MC 1963

ZW

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1963-009

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

Serie "Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

Voordracht door Prof.dr. J.H. de Boer

op 23 november 1963

# ELIMINATIE

Een van de vele onderwerpen die op de middelbare school worden behandeld, een van de weinige dingen die bij onze aankomende studenten bekend worden ondersteld, een van de onderwerpen waar deze aankomende studenten vaak niet mee overweg blijken te kunnen: eliminatie.

Misschien is het begrip te moeilijk voor de middelbare school, misschien is het struikelblok dat men voor de zozeer gewenste meetkundige interpretatie van het begrip gebruik zou moeten maken van een meerdimensionale ruimte.

1. Eliminatie-problemen treden op bij de analytische meetkunde. Ik neem twee voorbeelden die zich afspelen in de driedimensionale reële cartesische $(x,y,z)$-ruimte.

1e voorbeeld. Neem de eenheidsbol $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en snijd deze met het vlak $x + z = 1$. De snijcirkel C gaat door de noordpool, raakt aan de equator en ligt geheel op het noordelijk halfrond. We laten nu deze C wentelen om de z-as. Welk oppervlak wordt beschreven? Het is duidelijk dat we moeten vinden precies het noordelijk halfrond

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z \geq 0 . \end{cases}$$

Een standaardmethode leert dat het beschreven oppervlak wordt gegeven door

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a + c = 1 \\ z = c \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2 \ , \end{cases}$$

waarin a,b,c parameters zijn, die nog moeten worden geëlimineerd. Onze studenten vinden dan als eliminatie-resultaat steevast de hele bol.

<u>2e voorbeeld</u>. Neem de kegel $z^2 = x^2 + y^2$ en snijd deze met het vlak $x + z = 1$. De snijkromme is een parabool C. Gebruik deze C als richtkromme voor een kegel met de oorsprong als top. Dan vinden we de oorspronkelijke kegel terug, behalve de van de oorsprong verschillende punten op de beschrijvende naar het oneindig verre punt van C (want dit oneindige punt doet niet mee). Onze studenten vinden natuurlijk wel de hele kegel als eliminatie-resultaat van

$$\begin{cases} c^2 = a^2 + b^2 \\ a + c = 1 \\ x = pa \\ y = pb \\ z = pc \ , \end{cases}$$

waaruit a,b,c,p moeten worden geëlimineerd.

2. Wat is eliminatie eigenlijk? Neem het eerste voorbeeld. We hebben vier vergelijkingen in de letters x,y,z,a,b,c. We zoeken alle oplossingen (x,y,z), preciesér gezegd: alle oplossingen (x,y,z,a,b,c), waarbij echter a,b,c ons niet interesseren. Denk dus al deze oplossingen (x,y,z,a,b,c) opgeschreven en veeg overal het deel (a,b,c) weg. Dat wegvegen is eliminatie. Het is precies hetzelfde als projektie; dan gebruiken we meetkundige taal. In de (x,y,z,a,b,c)-ruimte vormen de oplossingen een puntenverzameling V en die gaan we projekteren in de (x,y,z)-ruimte. Het resultaat is een puntenverzameling W in de (x,y,z)-ruimte, het gevraagde oppervlak. Dit oppervlak kan niet door één vergelijking worden beschreven; er is een ongelijkheid bij nodig.

Wat de studenten doen is het opschrijven van een voorwaarde waaraan de oplossingspunten $(x,y,z)$ moeten voldoen, namelijk $x^2+y^2+z^2=1$. Ze verzuimen na te gaan of omgekeerd een punt $(x,y,z)$ dat aan hun voorwaarde voldoet, ook weer kan worden aangevuld tot een oplossingspunt $(x,y,z,a,b,c)$ van het gegeven stelsel. Dat kan slechts als $z \geq 0$, waarmee de beperkende ongelijkheid is gevonden. Werken we echter met <u>komplexe</u> getallen dan kan het altijd en dan is dus het eliminatie-resultaat gewoon $x^2+y^2+z^2=1$.

Analoog in het tweede voorbeeld. Een punt dat aan $z^2=x^2+y^2$ voldoet kan tot een oplossingspunt $(x,y,z,a,b,c,p)$ worden aangevuld, behalve als

$$\begin{cases} y = 0 \\ z \neq 0 \\ x + z = 0\,. \end{cases}$$

Doet echter ook het oneindige punt van C mee, dan vervalt deze beperking.

3. Kan het begrip eliminatie op school worden behandeld en kan enige vaardigheid met niet-lineaire voorbeelden worden verlangd? Het lijkt me mogelijk, al is het jammer dat het intuitieve beeld van een projektie dan wellicht achterwege moet blijven. Misschien kan men beginnen met stelsels van drie letters $(x,y,a)$, waaruit dan de a moet worden geëlimineerd. Voor dit geval kan de projektie dan als aanschouwelijk beeld worden gebruikt. Het lijkt me mogelijk van de leerlingen te eisen dat ze achteraf steeds kontroleren of alle door hen beschreven oplossingen ook werkelijk voldoen, d.w.z., kunnen worden aangevuld tot oplossingen van het gegeven stelsel.

Ook zou men opgaven van het volgende type kunnen inlassen:

<u>3e voorbeeld</u>. Laat de punten $(x,y,a)$ voldoen aan de volgende eis:
$x^2 + y^2 + a^2 = 1$ of $(x,y,a) = (2,0,2)$ of $(x,y,a) = (0,2,0)$ of $(x,y,a) = (0,0,2)$.

Wat is het resultaat als we a elimineren?

4. Onze drie voorbeelden zijn van algebraïsche aard. Waaraan ligt het dat we bij de eerste beide voorbeelden ongelijkheden moeten gebruiken om het eliminatie-resultaat te beschrijven? In het eerste voorbeeld komt dat doordat we geen komplexe getallen toelaten. In het tweede voorbeeld komt het doordat we geen oneindige punten toelaten. En als we nu dan eens afspreken te werken met komplexe getallen en met projektieve parameter-ruimten? Stel dat het gegeven stelsel bestaat uit vergelijkingen (homogeen in de parameters, dus), geen ongelijkheden. Is dan het eliminatie-resultaat ook altijd met vergelijkingen te beschrijven? Het antwoord is ja. Dit is het hoofdresultaat van de eliminatietheorie. Er zijn verschillende bewijzen voor bekend. Een bewijs van Kronecker [1] begint bij het eenvoudigste geval van twee homogene vergelijkingen in de homogene veranderlijke $(a_o, a_1)$, met onbepaalde coëfficiënten $x_i$, respektievelijk $y_j$

$$\begin{cases} x_o\, a_o^{\,m} + x_1\, a_o^{\,m-1}\, a_1 + \ldots + x_m\, a_1^{\,m} = 0 \\ y_o\, a_o^{\,n} + y_1\, a_o^{\,n-1}\, a_1 + \ldots + y_n\, a_1^{\,n} = 0 \,. \end{cases}$$

Het eliminatie-resultaat is dan $R(x_o,\ldots,x_m;\, y_o,\ldots,y_n) = 0$, waarbij $R(x_o,\ldots,x_m;\, y_o,\ldots,y_n)$ de resultante

$$\det \begin{pmatrix} x_o & \cdots & x_m & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & x_o & \cdots & x_m \\ y_o & \cdots & y_n & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & y_o & \cdots & y_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \text{ rijen} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m \text{ rijen} \end{matrix}$$

voorstelt.

Een tweede bewijs gaat via Hilberts nulpuntenstelling [2] en een derde bewijs (van Weil) gebruikt de stelling van Zorn en gaat met waarderingstheorie [3] .

5. De genoemde eliminatie-stelling kan topologisch worden geformuleerd door gebruik te maken van de zogenaamde Zariski-topologie in de projektieve ruimten (dus ook in affiene ruimten). Hierbij zijn de gesloten verzamelingen per definitie de "algebraïsche deelverzamelingen", dat wil zeggen verzamelingen die door veelterm-vergelijkingen kunnen worden beschreven, zoals wij dat zo graag hebben.

We hebben te maken met een $(x,y,\ldots,z)$-ruimte V en een projektieve parameterruimte S. Onze oorspronkelijke vergelijkingen hebben betrekking op de produktruimte $V \times S$, die eveneens voorzien is van de Zariski-topologie. De gegeven vergelijkingen bepalen in de produktruimte een gesloten deelverzameling. De eliminatie-stelling zegt nu dat van zo'n gesloten deelverzameling uit $V \times S$ de projektie op V weer een gesloten deelverzameling in V is. Met andere woorden: de projektieafbeelding $V \times S \to V$ is een gesloten afbeelding.

De eigenschap van S dat voor elke affiene ruimte V de projektieafbeelding $V \times S \to V$ gesloten is, drukt men tegenwoordig zo uit: S is kompleet. De eliminatie-stelling luidt dus:

een projektieve ruimte is kompleet.

Een gesloten deelverzameling van een projektieve ruimte (dat is een projektieve algebraïsche varieteit, die reducibel mag zijn) heeft weer deze eigenschap.
Een affiene ruimte is niet kompleet, tenzij hij een punt is. Neem namelijk in de affiene ruimte een affiene rechte; dat is een gesloten deel en het is dus voldoende te laten zien dat de affiene rechte niet kompleet is. We nemen daartoe bijvoorbeeld de vergelijking

$$xa = 0$$

en elimineren a.

6. Let wel dat we in $V \times S$ niet de produkt-topologie hebben genomen. Ook in $V \times S$ namen we de Zariski-topologie, die fijner is dan de produkt-topologie.

Doen we hetzelfde voor willekeurige topologische ruimten V en S en nemen we nu wel de produkt-topologie in $V \times S$, dan krijgen we als definitie: Een topologische ruimte S heet kompleet ten aanzien van alle topologische ruimten en ten aanzien van de produkt-topologie als voor elke keuze van een topologische ruimte V de projektieafbeelding $V \times S \rightarrow V$ een gesloten afbeelding is.

Er geldt dan echter (in tegenstelling tot ons geval van algebraïsche varieteiten en Zariski-topologie):

S is kompleet $\Leftrightarrow$ S is (kwasi-)kompakt [4] .

We kunnen zeggen dat bij algebraïsche varieteiten de rol van het begrip kompakt wordt overgenomen door het begrip kompleet.

[1] Van der Waerden, Moderne Algebra (oudere drukken).

[2] ——————, Algebra, deel 2, 4e editie (zie voorwoord).

[3] Lang, Introduction to algebraic geometry, New York 1958, ch.II, § 9, p.41.

[4] Bourbaki, Topologie I, 3e editie, Lemme 1, p.117.

=====