stichting
mathematisch
centrum

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE ZW 1970-009 OKTOBER

A.B. PAALMAN - DE MIRANDA
BIJNA PERIODIEKE FUNCTIES EN COMPACTE GROEPEN

VOORDRACHT IN DE SERIE "ELEMENTAIRE ONDERWERPEN VANUIT HOGER STANDPUNT BELICHT"

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Voordracht in de Serie
Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht.

Aida B. Paalman - de Miranda

28 okt. 1970

Bijna periodieke functies en compacte groepen.

Zoals de naam "bijna periodiek" reeds zegt zijn de bijna periodieke functies door Bohr ingevoerd als een generalisatie van het begrip periodieke functie.

Een continue complexe functie f op de reële getallen R heet bijna periodiek (bp) als bij iedere $\varepsilon > 0$ een $L(\varepsilon) > 0$ gegeven is, zodat in ieder interval met lengte $\geq L(\varepsilon)$ een τ te vinden is met

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in R.$$

Deze klassieke definitie is (in het geval van de reële getallen) equivalent met:

Een continue complexe functie f op een topologische groep G heet (links) bp als er voor iedere $\varepsilon > 0$ eindig veel elementen $a_1,\ldots,a_n \in G$ zijn, zó dat voor iedere $a \in G$ er een element a_i is, $i \in \{1,..n\}$ met

$$|f(ax) - f(a_i x)| < \varepsilon \quad \forall x \in G.$$

Analoog wordt het begrip rechts bp gedefinieerd.
Het blijkt dat iedere rechts bp functie een links bp functie is en omgekeerd.
Tevens is iedere continue functie op een compacte groep bijna periodiek.

Is G niet compact dan zijn er in 't algemeen continue functies die niet bijna periodiek zijn. Er geldt echter:
Bij iedere topologische groep G bestaat een compacte groep G^* en een continue homomorfe afbeelding ϕ van G op een overal dichte ondergroep $\phi(G)$ van G^* met de volgende eigenschap:

f is bp op G $\Longleftrightarrow f = f^*.\phi$ continu op G^*.

Het paar (ϕ, G^*) is uniek bepaald door G, op een topologische isomorfie na.
(ϕ, G^*) heet de universele Bohr compactificatie van G.
Het is de bedoeling van deze voordracht een overzicht te geven van de verschillende manieren waarop de universele Bohr compactificatie gedefinieerd kan worden.

I. Zij G een willekeurige topologische groep en $\mathfrak{A}(G)$ de verzameling van alle bp functies op G. $\mathfrak{A}(G)$ is een complexe algebra onder de puntsgewijze operaties. $\mathfrak{A}(G)$ is zelfs een Banach-algebra met norm $||f|| = \sup_{x \in G} |f(x)|$.

Immers als $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ een rij bp functies is op G die uniform convergeert naar de functie f, dan is f een bp functie. Tevens geldt dat als f bp is, dan is ook $\overline{f}$, de complex geconjugeerde van f, bijna periodiek.
Er geldt dus
$\mathfrak{A}(G)$ is met de uniforme norm een commutatieve C^* algebra met een eenheidselement.
Zij nu A een commutatieve Banach algebra en X de verzameling van alle multiplicatieve lineaire functionalen τ op A (de ruimte van maximale idealen).
Geef X de zwakste topologie zó dat alle functies $\hat{x}$, $x \in A$
$\hat{x}(\tau) = \tau(x)$ $\tau \in X$ continu zijn. Deze topologie heet de Gelfand topologie op X.
Er geldt dan:
Als A een eenheidselement heeft, dan is X een compacte Hausdorff ruimte en de afbeelding $x \to \hat{x}$ is een algebraisch homomorfisme van A op $\hat{A} \subset C(X)$.

Is A bovendien een commutatieve C^*-algebra dan is A isometrisch en isomorf met $\hat{A} = C(X)$. Passen wij dit toe op $\mathfrak{A}(G)$ dan is dus $\mathfrak{A}(G)$ isomorf en isometrisch met $C(X)$, de ruimte van alle continue functies op X met de sup norm.

Beschouw nu de afbeelding ϕ: $G \to X$ gedefineerd door $\phi(g).(f) = f(g)$; $\forall f \in \mathfrak{A}(G)$, dan $\overline{\phi(G)} = X$.

Men kan nu bewijzen dat men een vermenigvuldiging op X kan definieren zó dat X een topologische groep wordt en dat ϕ een homomorfisme is van G in X. Er geldt dan $X \simeq G^*$ (zie L.H. Loomis. An introduction to abstract harmonic analysis).

II. Als G een locaal compacte abelse groep is, kan men de universele Bohr compactificatie ook met behulp van de karaktergroep van G definieren.

Zij G een locaal compacte abelse groep, dan verstaat men onder een karakter χ van G een continue homomorfe afbeelding van G in de cirkelgroep $T = \{z \mid z \text{ complex}, |z| = 1\}$. De verzameling van al deze karakters vormt een groep onder puntsgewijze vermenigvuldiging: $\hat{G}$.

Is G = R de additieve groep der reële getallen dan kan men bewijzen dat ieder karakter van R van de vorm

$$\chi_a : x \to e^{iax} \qquad a \in R \text{ is.}$$

Uit de klassieke theorie van de bp functies is bekend dat iedere bp functie op R uniform benadert kan worden door eindige lineaire combinaties

$$\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu e^{i \lambda_\nu x} .$$

Deze approximatie stelling geldt ook in het algemene geval: Iedere bp functie op een locaal compacte abelse groep is uniform te benaderen door eindige lineaire combinaties van karakters van G. Ieder karakter van G is bijna periodiek.

De verzameling X van alle multiplicatieve lineaire functionalen τ op $\mathfrak{A}(G)$ kunnen wij dus identificeren met de verzameling van alle homomorfismen van de karaktergroep van G in T, d.w.z. met de karaktergroep van $\hat{G}_d$. ($\hat{G}$ met de discrete topologie).
Immers ieder dergelijk homomorfisme is op unieke wijze voort te zetten tot een multiplicatieve lineaire functionaal op $\mathfrak{A}(G)$.
Wij hebben nu dus bewezen dat
G^* algebraisch isomorf is met $(\hat{G}_d)\hat{}$.
Geven wij $(\hat{G}_d)\hat{}$ de topologie van de puntsgewijze convergentie (in dit geval de compact-open topologie), dan kan men bewijzen dat $(\hat{G}_d)\hat{}$ een compacte groep wordt en dat G^* als topologische groep isomorf is met $(\hat{G}_d)\hat{}$.
Er geldt dus $\quad G^* \simeq (\hat{G}_d)\hat{}$.

(zie E. Hewitt, K.A. Ross. Abstract harmonic analysis).
Deze karakterizering van G^* is niet alleen juist als G locaal compact abels is, maar ook voor iedere abelse groep. (zie III).

Uit deze karakterizering van G^* volgt onmiddellijk dat de continue homomorfe afbeelding ϕ: $G \to (\hat{G}_d)\hat{}$ één-éénduidig is als G locaal compact abels is.
Immers $\phi(g).\ \chi = \chi(g).\quad \chi \in \hat{G}$.
Als G locaal compact abels is, dan scheiden de karakters punten; i.e.
$\exists \chi \in \hat{G}$ met $\chi(g_1) \neq \chi(g_2). \implies \phi(g_1)\chi \neq \phi(g_2)\chi \implies \phi(g_1) \neq \phi(g_2)$.

III Zij (ϕ, G^*) de universele Bohr-compactefunctie van een groep G, dan heeft (ϕ, G^*) de volgende eigenschap:
Zij α een continue homomorfe afbeelding van G op een overal dichte ondergroep van een compacte groep H, dan bestaat er een continu homomorfisme β van G^* op H zó dat $\alpha = \beta \circ \phi$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\alpha"'] & G^* \arrow[dl, dashed, "\beta!"] \\ H & \end{tikzcd}$$

Het is duidelijk dat, als een compactificatie (ϕ_1, G_1) van G deze eigenschap heeft, dat dan (ϕ_1, G_1) op een topologische isomorfie na éénduidig bepaald is.
Met behulp van de dualiteitsstelling van Pontrjagin volgt gemakkelijk dat als er zo'n (ϕ_1, G_1) bestaat, dan $G_1 = (\hat{G}_d)\hat{}$ als G abels is.
Immers beschouw het diagram

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[dr, "\chi"'] & G_1 \arrow[d, dashed, "\beta!"] \\ & T \end{tikzcd}$$

Er bestaat dus een 1-1-duidige correspondentie tussen de karakters van G en die van g_1; deze correspondentie is een algebraische isomorfie, dus

$$(\hat{G}_d)\hat{} \simeq G_1 = \hat{G}_1 \quad .$$

Passen wij nu de dualiteitsstelling toe, dan krijgen wij $(\hat{G}_d)\hat{} \simeq G_1$.

In het locaal compacte abelse geval is $(\hat{G}_d)\hat{}$ echter de universele Bohr-compactificatie G^* van G dus $G_1 \simeq G^*$.
E.M. Alfsen en P. Holm [1], bewezen dat iedere topologische groep G zo'n compactificatie met de universele factorizeringseigenschap heeft en dat deze samenvalt met de universele Bohr-compactificatie G^*.
Beschouw n.l. de familie van alle uniforme structuren $\mathcal{U}$ op G met de eigenschap

a) $\mathcal{U}$ is precompact
b) $\mathcal{U}$ is verenigbaar met de groepsstructuur.
   d.w.z. $x \to x^{-1}$ en $(x,y) \to xy$ uniform continu
c) de uniforme topologie, bepaald door $\mathcal{U}$ is grover dan de oorspronkelijke topologie op G.

Deze familie is niet leeg, en er is dus een fijnste uniforme structuur $\mathcal{U}_B$ die aan a), b) en c) voldoet.
Hieruit volgt gemakkelijk dat de Hausdorff-completering van G met betrekking tot $\mathcal{U}_B$ de compactificatie is met de universele factorizeringseigenschap.
Bijna periodiciteit van een functie f op G blijkt nu equivalent te zijn met uniforme continuiteit met betrekking tot $\mathcal{U}_B$.

IV. Zij nu G een locaal compacte abelse groep en (α,H) een willekeurige compactificatie van G; hierbij is H een compacte groep en α een continu homomorfisme van G en H zodat $\alpha(G)$ dicht ligt in H. Beschouw de collectie $F = \{f \circ \alpha \mid f \text{ continu op } H\}$. Dan is $F \subset \mathfrak{A}(G)$ en F is een moduul d.w.z.

a) F is een gesloten deelalgebra van $\mathfrak{A}(G)$.

b) F is invariant; als $g(x) \in F$ dan ook $g(ax) \in F \quad \forall a \in G$

c) $g \in F \implies \bar{g} \in F$.

Is omgekeerd F een moduul van bp functies op G dan bestaat er een compactificatie (α,H) van G zó dat

$$F = \{f \circ \alpha \mid f \in \mathfrak{C}(H)\}.$$

Men kan bewijzen dat deze correspondentie tussen modulen en compactificaties één-éénduidig is.

Zij nu wederom G locaal compact abels en (α,H) een compactificatie van G.

Beschouw dan de afbeelding $\hat{\alpha}: \hat{H} \to \hat{G}$ gedefinieerd door:

$$\hat{\alpha}(\chi) = \chi \circ \alpha \quad , \qquad \chi \in \hat{H} .$$

$$G \xrightarrow{\alpha} H$$

$$\hat{G} \xleftarrow{\hat{\alpha}} \hat{H}$$

Er geldt: $\hat{\alpha}$ een homomorfisme en

$\alpha(G)$ dicht in $H \iff \hat{\alpha}$ 1-1 duidig.

$\hat{H}$ is dus algebraisch isomorf met een ondergroep $X = \hat{\alpha}(\hat{H})$ van $\hat{G}$. Passen wij de dualiteitsstelling van Pontrjagin toe dan krijgen wij,

$$H \simeq \hat{\hat{H}} \simeq (X_d)\hat{} \ .$$

Is omgekeerd X een ondergroep van $\hat{G}$, beschouw dan de injectie $i : X_d \xrightarrow{i} \hat{G}$.

Dan $\hat{i}: \hat{\hat{G}} \to (X_d)\hat{}$ en er geldt, $\hat{\hat{G}} \simeq G$; $(X_d)\hat{}$ compact en $\hat{i}(\hat{\hat{G}})$ dicht in $(X_d)\hat{}$.

Het paar $(\hat{i},(X_d)\hat{})$ is dus een compactificatie van G.

Voor locaal compacte abelse groepen G is er dus een één-éénduidige correspondentie tussen de compactificaties van G, de abstracte ondergroepen van $\hat{G}$ en de modulen van bp functies op G.

Literatuur.

[1] Alfsen, E.M. and Holm, P.
A note on compact representations and almost periodicity in topological groups
Mathematica Scand. 10(1962), 127-136.

[2] Hewitt, E and Ross, K.A.
Abstract Harmonic Analysis I
Springer-Verlag (Berlin) 1963

[3] Holm, P.
On the Bohr Compactification
Math. Annalen, 156(1964), 34-46.

[4] Loomis, L.H.
An Introduction to Abstract Harmonic Analysis.
Van Nostrand (Princeton) 1953.

[5] Maak, W.
Fastperiodische Funktionen
Springer-Verlag (Berlin) 1950.

[6] Weil, A.
L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications.
Hermann (Paris) 1941 en 1951.