STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1949-010

De differentiaaloperator van Lie

"Elementaire onderwerpen van hoger standpunt belicht"

Prof.dr. J.A. Schouten

1949

MATHEMATISCH CENTRUM
2de Boerhaavestr.49
Amsterdam-O.

Rapport Z.W., 1949-010
9 November 1949

Voordracht door Prof.Dr J.A. Schouten
in de serie Elementaire onderwerpen van hoger standpunt uit.

"De differentiaaloperator van Lie"

Coördinaten in X_n: ξ^κ; $\kappa=1,\dots,n$ Transformatie van een coördinatenstelsel (κ) in een ander coördinatenstelsel (κ')

1) $\xi^{\kappa'} = \xi^{\kappa'}(\xi^\kappa)$; $A^{\kappa'}_\kappa \overset{\text{def}}{=} \partial_\kappa \xi^{\kappa'}$; $\mathrm{Det}(A^{\kappa'}_\kappa) \neq 0$ $\quad \kappa'=1',\dots,n'$

Functies analytisch in het beschouwde gebied.

Enige grootheden Scalar p : invariant

Contrav.vector u^κ : $u^{\kappa'} = A^{\kappa'}_\kappa u^\kappa$

cov.vector w_λ : $w_{\lambda'} = A^\lambda_{\lambda'} w_\lambda$

affinor, bijv. $P^{\kappa\lambda}_{\cdot\cdot\mu}$: $P^{\kappa'\lambda'}_{\cdot\cdot\mu'} = A^{\kappa'}_\kappa A^{\lambda'}_\lambda A^\mu_{\mu'} P^{\kappa\lambda}_{\cdot\cdot\mu}$

Grootheden gegeven als functies der ξ^κ heten velden.

Punttransformaties in X_n. Laat een gebied R van X_n door de omkeerbare punttransformatie

2) $$\eta^\kappa = f^\kappa(\xi^\lambda) \; ; \; \mathrm{Det}(\partial_\lambda \eta^\kappa) \neq 0$$

overgaan in een gebied R'. Zowel ξ^κ als η^κ zijn coördinaten t.o.v. het coördinatenstelsel (κ). Introduceer nu in R' een nieuw coördinatenstelsel (κ') zodat de $\eta^{\kappa'}$ numeriek gelijk worden aan de ξ^κ van het beeldpunt in R:

3) $$\eta^{\kappa'} = \delta^{\kappa'}_\kappa \xi^\kappa \quad ; \quad \delta^{\kappa'}_\kappa = \begin{cases} 1 & \text{als } \kappa \text{ en } \kappa' \text{ correspon} \\ 0 & \text{in het andere geval} \end{cases}$$

Is dan

4) $$\xi^\kappa = \varphi^\kappa(\eta^\lambda)$$

de omkering van (2) dan is

5) $$\eta^{\kappa'} = \delta^{\kappa'}_\kappa \varphi^\kappa(\eta^\lambda)$$

voor iedere keuze van η^κ. Dus is de transformatie $(\kappa)\to(\kappa')$ gegeven door

6) $$\xi^{\kappa'} = \delta^{\kappa'}_\kappa \varphi^\kappa(\xi^\lambda)$$

De overgang $(\kappa)\to(\kappa')$ heet het meeslepen van het coördinatensysteem (κ) door de punttransformatie (2). Populaire voorstelling: Vul X_n met gelatine en teken in de gelatine een fijn coördinatennetwerk van (κ). Transformeer dan de X_n met gelatine en al, dan gaat het netwerk over in het netwerk van (κ').

Meeslepen van een veld. Laat nu een veld bijv. $\underset{1}{P}^{\kappa\lambda}_{\cdot\cdot\mu}$ gegeven zijn in R en construeer in R' een ander veld, welks kentallen $\underset{2}{P}^{\kappa'\lambda'}_{\cdot\cdot\mu'}$ ten opzichte van κ' numeriek gelijk zijn aan de $\underset{1}{P}^{\kappa\lambda}_{\cdot\cdot\mu}$ in het beeldpunt

in R . Dan zegt men dat $\underset{2}{P}$ ontstaat uit $\underset{1}{P}$ door het meeslopen van het veld $\underset{1}{P}$ door de punttransformatie (2). Populaire voorstelling: teken de grootheid in een groot aantal punten van R op infinitesimale schaal in het netwerk van (K) in de gelatine (bijv. als pijltje als de grootheid een contravariante vector). Transformeer de X_n met de gel-tine, dan ontstaat het meegesleepte veld.
Stel dat R en R' een gebied gemeen hebben. Dan kan men $\underset{1}{P}$ en $\underset{2}{P}$ met elkaar vergelijken. Is dan $\underset{1}{P}^{\kappa\lambda}{}_{..\mu} = \underset{2}{P}^{\kappa\lambda}{}_{..\mu}$ (nu natuurlijk betrokken op hetzelfde coördinatenstelsel) dan zegt men dat het veld $\underset{1}{P}$ invariant is t.o.v. de punttransformatie (2).

Infinitesimale punttransformaties. Beschouw vectorveld $v^{\kappa} = \psi^{\kappa}(\xi^{\lambda})$ de differentiaalvergelijking

7) $$\frac{d\eta^{\kappa}}{dt} = \psi^{\kappa}(\eta^{\lambda})$$

waarin t een onafhankelijke parameter is en de η^{κ} worden beschouwd als functies der ξ^{κ} . Laten de beginvoorwaarden zijn $\eta^{\kappa} = \xi^{\kappa}$ voor $t = 0$. De oplossing heeft de vorm

8) $$\eta^{\kappa} = \xi^{\kappa} + \psi^{\kappa}(\xi^{\lambda})t + \dots$$

en dit stelt bij veranderlijke ξ^{κ} een punttransformatie van X_n voor, die van één parameter afhangt. Is t de tijd dan schuiven de punten van X_n langs de stroomlijnen van het veld v^{κ} , dat zijn de krommen die overal de richting van de plaatselijke vector v^{κ} hebben. De omkering van (8) heeft de vorm

9) $$\xi^{\kappa} = \eta^{\kappa} - \psi^{\kappa}(\eta^{\lambda})t + \dots$$

Wordt dus nu (k) meegesleept dan geeft (6) de transformatie (k)→(k').

10) $$\xi^{\kappa'} = \delta^{\kappa'}_{\kappa}\xi^{\kappa} - \delta^{\kappa'}_{\kappa}v^{\kappa}t + \dots$$
$$\xi^{\kappa} = \delta^{\kappa}_{\kappa'}\xi^{\kappa'} + v^{\kappa}t + \dots$$

en dus

11) $$A^{\lambda'}_{\lambda} = \delta^{\lambda'}_{\kappa}(A^{\kappa}_{\lambda} - t\partial_{\lambda}v^{\kappa} + \dots)$$
$$A^{\kappa}_{\kappa'} = \delta^{\lambda}_{\kappa'}(A^{\kappa}_{\lambda} + t\partial_{\lambda}v^{\kappa} + \dots)$$

(8) en (9) stellen een éénledige (d.w.z. van een parameter afhangende) transformatiegroep voor. Verwaarloost men in (10) alle hogere machten van t en schrijft men dt in plaats van t dan krijgt men wat Lie noemt de infinitesimale transformatie die de eenledige groep voortbrengt (erzeugt):

12) $$\xi^{\kappa} \longrightarrow \xi^{\kappa} + \psi^{\kappa}(\xi^{\lambda})dt$$

Daarbij behoort de coördinatentransformatie: (K) ⟶ (K')

13) $$\xi^{\kappa} = \delta^{\kappa'}_{\kappa}\xi^{\kappa} - \delta^{\kappa'}_{\kappa}v^{\kappa}dt \quad ; \quad A^{\lambda'}_{\lambda} = \delta^{\lambda'}_{\kappa}(A^{\kappa}_{\lambda} + \partial_{\lambda}v^{\kappa}dt)$$
$$\xi^{\kappa} = \delta^{\kappa}_{\kappa'}\xi^{\kappa'} + v^{\kappa}dt \quad ; \quad A^{\kappa}_{\kappa'} = \delta^{\lambda}_{\kappa'}(A^{\kappa}_{\lambda} - \partial_{\lambda}v^{\kappa}dt)$$

Wordt een coördinatenstelsel of een veld door de infinitesimale transformatie (12) meegesleept, dan zegt men dat het <u>over $v^\kappa dt$ wordt meegesleept</u>. Neem b.v. het veld $P^{\kappa}_{\cdot\lambda}$. Dan zijn de kentallen van het meegesleepte veld in $\xi^\kappa + v^\kappa dt$ <u>ten opzichte van</u> (κ) numeriek gelijk aan de $P^{\kappa}_{\cdot\lambda}$ ter plaatse ξ^κ. De kentallen aldaar t.o.v. (κ) zijn dus blijkens (13)

14) $$A^{\rho'}_{\lambda} A^{\kappa}_{\sigma'} \delta^{\sigma'}_{\sigma} \delta^{\rho}_{\rho'} P^{\sigma}_{\cdot\rho} = (A^{\rho}_{\lambda} - \partial_\lambda v^\rho dt)\, P^{\sigma}_{\cdot\rho} (A^{\kappa}_{\sigma} + \partial_\sigma v^\kappa dt) =$$
$$= P^{\kappa}_{\cdot\lambda} - P^{\kappa}_{\cdot\rho}\,\partial_\lambda v^\rho dt + P^{\sigma}_{\cdot\lambda}\,\partial_\sigma v^\kappa dt$$

en de kentallen ter plaatse ξ^κ vinden we door van deze waarde nog $v^\mu \partial_\mu P^{\kappa}_{\cdot\lambda} dt$ af te trekken. Voor de veldwaarde in ξ^κ t.o.v. (κ), die met de veldwaarde $P^{\kappa}_{\cdot\lambda}$ aldaar vergelijkbaar is, volgt dan

15) $$P^{\kappa}_{\cdot\lambda} - v^\mu \partial_\mu P^{\kappa}_{\cdot\lambda} dt - P^{\kappa}_{\cdot\rho}\,\partial_\lambda v^\rho dt + P^{\sigma}_{\cdot\lambda}\,\partial_\sigma v^\kappa dt$$

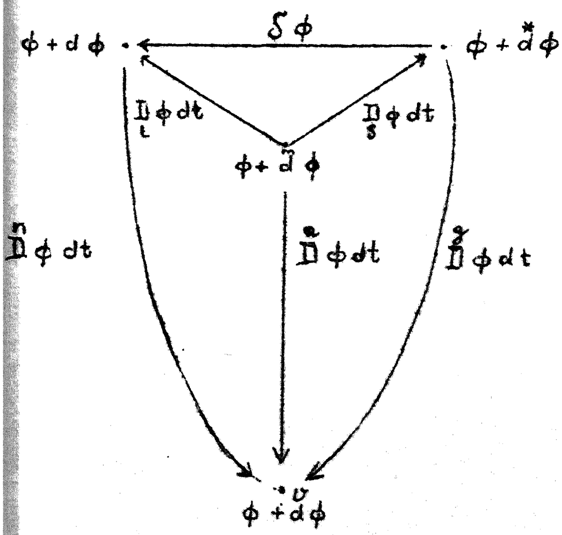
Het verschil van de oude en de nieuwe veldwaarde ter plaatse ξ^κ heet de <u>differentiaal van Lie</u> t.o.v. $v^\kappa dt$ en de uitdrukking

16) $$\underset{L}{D}\, P^{\kappa}_{\cdot\lambda} = v^\mu \partial_\mu P^{\kappa}_{\cdot\lambda} + P^{\kappa}_{\cdot\rho}\,\partial_\lambda v^\rho - P^{\sigma}_{\cdot\lambda}\,\partial_\sigma v^\kappa$$

de <u>afgeleide van Lie van het veld</u> $P^{\kappa}_{\cdot\rho}$ <u>t.o.v. het veld</u> v^κ. (Voor meer indices net zo, voor elke boven (onder) index komt er een term met een negatief (positief) teken. Is er een <u>symmetrische</u> lineaire overbrenging dan mag men in (16) ∂_μ vervangen door ∇_μ. Vormingen van dit soort reeds bij Lie, expliciete opstelling voor bijzondere gevallen, Weitzenböck, Invariantentheorie 1923, 375, Lepage 1929, algemeen Slebodzinski 1931. Beide onafhankelijk van Lie. Naam voorgesteld door van Dantzig 1932. Toegepast op deformatieproblemen door Schouten-v.Kampen 1933. Sindsdien veel gebruikt voor deformatieproblemen vooral door Engelse auteurs.

<u>De zes covariante differentialen.</u> Laat in de X_n een lineaire overbrenging gegeven zijn met parameters $\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda}$ (bijv. met Riemannscheruimte V_n met fundamentaaltensor $g_{\lambda\kappa}$: $\Gamma^{\kappa}_{\mu\lambda} = \{^{\kappa}_{\mu\lambda}\}$) Zij ϕ een veld (<u>indices onderdrukt</u>) Dan zijn er in $\xi^\kappa + v^\kappa dt$ in het algemeen (niet altijd) drie veldwaarden:

de gewone veldwaarde $\phi + d\phi$,
de pseudop.versch.veldw. $\phi + \overset{*}{d}\phi$
de meegesleepte veldw. $\phi + \overset{m}{d}\phi$
De verschillen zijn:
de <u>covariante</u> differentiaal $\delta\phi$
de <u>Lie</u> differentiaal $\underset{L}{D}\,\phi\, dt$
de <u>schijnbare</u> differentiaal $\underset{S}{D}\,\phi\, dt$



Bovendien kan het zijn dat er <u>tengevolge van de deformatie</u> in $\xi^\kappa + v^\kappa dt$ een waarde ontstaat

de <u>gevarieerde</u> veldwaarde $\underset{S}{D}\,\phi . dt$

(bijv. als ϕ de kromming of de torsie van een over $v^\kappa dt$ verplaatste kromme is). Dan ontstaan er nog drie covariante differentialen.

de <u>natuurlijke</u> variatie $dt\,\overset{n}{\mathfrak{D}}\phi = \overset{v}{d}\phi - d\phi$

de <u>absolute</u> variatie $dt\,\overset{a}{\mathfrak{D}}\phi = \overset{v}{d}\phi - \overset{m}{d}\phi$

de <u>geodetische</u> variatie $dt\,\overset{s}{\mathfrak{D}}\phi = \overset{v}{d}\phi - \overset{*}{d}\phi$

De absolute variatie is de belangrijkste. Sleep het gevarieerde veld in $\xi^\kappa + v^\kappa dt$ terug naar ξ^κ. Dan is de veldwaarde aldaar $\phi + \overset{v}{d}\phi - \overset{m}{d}\phi = \phi + \overset{a}{\mathfrak{D}}\phi\, dt$. $\overset{a}{\mathfrak{D}}\phi$ geeft dus precies de invloed der deformatie. Voor de differentiaalquotienten $\overset{n}{\mathfrak{D}}\phi, \overset{a}{\mathfrak{D}}\phi, \overset{s}{\mathfrak{D}}\phi$ geldt

17)

ϕ met rust gelaten	ϕ meegesleept	ϕ pseudop.verpl.
$\overset{v}{d}\phi = d\phi$	$\overset{v}{d}\phi = \overset{m}{d}\phi$	$\overset{v}{d}\phi = \overset{*}{d}\phi$
$\overset{n}{\mathfrak{D}}\phi = 0$	$\overset{n}{\mathfrak{D}}\phi = -\underset{L}{\mathfrak{D}}\phi$	$\overset{n}{\mathfrak{D}}\phi = -\frac{\delta\phi}{dt}$
$\overset{a}{\mathfrak{D}}\phi = \underset{L}{\mathfrak{D}}\phi$	$\overset{a}{\mathfrak{D}}\phi = 0$	$\overset{a}{\mathfrak{D}}\phi = \underset{s}{\mathfrak{D}}\phi$
$\overset{s}{\mathfrak{D}}\phi = \frac{\delta\phi}{dt}$	$\overset{s}{\mathfrak{D}}\phi = -\underset{s}{\mathfrak{D}}\phi$	$\overset{s}{\mathfrak{D}}\phi = 0$

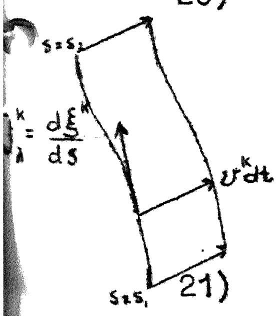
<u>Voorbeeld 1</u> In een V_n wordt de punttransformatie $\xi^\kappa \to \xi^\kappa + v^\kappa dt$ uitgevoerd. Hoe verandert het lijnelement? Sleep (k) mee dan is $\overset{a}{\mathfrak{D}}\, d\xi^\kappa = 0$ en laat $g_{\lambda\kappa}$ met rust, dan is $\overset{a}{\mathfrak{D}} g_{\lambda\kappa} = \underset{L}{\mathfrak{D}} g_{\lambda\kappa}$

18) $$\overset{a}{\mathfrak{D}} ds = \overset{a}{\mathfrak{D}}(g_{\lambda\kappa} d\xi^\lambda d\xi^\kappa)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{ds} d\xi^\lambda d\xi^\kappa \underset{L}{\mathfrak{D}} g_{\lambda\kappa}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{ds} d\xi^\lambda d\xi^\kappa (\underbrace{v^\mu \nabla_\mu g_{\lambda\kappa}}_{0} + g_{\rho\kappa}\nabla_\lambda v^\rho + g_{\lambda\rho}\nabla_\kappa v^\rho)$$
$$= \nabla_{(\lambda} v_{\kappa)} \frac{d\xi^\lambda}{ds}\cdot\frac{d\xi^\kappa}{ds} ds$$

Dus is de maatinvariant als

19) $$k_{\lambda\kappa} = \nabla_{(\lambda} v_{\kappa)} = 0$$ (vergelijking en tensor van <u>Killi</u>...

<u>Voorbeeld 2.</u> Deformatie van een kromme in V_n. Sleep het coördinatenstelsel (k) mee en sleep ook de maat s op de kromme mee. Sleep later de kromme met s en het veld $g_{\lambda\kappa}$ terug over $v_\kappa dt$



20) $$dt\,\overset{a}{\mathfrak{D}}\int_{s_1}^{s_2} ds = dt\int \overset{a}{\mathfrak{D}} ds = dt\int_{s_1}^{s_2} \nabla_{(\lambda} v_{\kappa)}\, d\xi^\lambda \frac{d\xi^\kappa}{ds} =$$
$$= dt\int_{s_1}^{s_2} j^\kappa_\lambda\, \delta v_\kappa = dt\,(j^\kappa_\lambda v_\kappa)_{s=s_2} - dt\,(j^\kappa_\lambda v_\kappa)_{s=s_1} -$$
$$- dt\int_{s_1}^{s_2} v_\kappa \frac{\delta}{ds} j^\kappa_\lambda\, ds$$

1^e $v^\kappa = 0$ in de eindpunten verder willekeurig. $\frac{\delta}{ds} j^\kappa_\lambda = 0$ is de eerste voorwaarde voor een geodetische lijn

21) 2^e $$\overset{a}{\mathfrak{D}} ds = j^\kappa_\lambda\, \delta v_\kappa = -v_\kappa\, \delta j^\kappa_\lambda + \delta(v_\kappa j^\kappa_\lambda)$$

is nul voor een geodetische lijn indien overal $v^\kappa \perp j^\kappa_\lambda$

Men kan verder gaan en vragen naar de variatie van de 1e kromming, 2e kromming, enz. Dit gebeurt met behulp van de operator $\overset{a}{\mathfrak{D}}\nabla_\mu - \nabla_\mu \overset{a}{\mathfrak{D}}$ die de regel van Leibniz volgt bij toepassing op producten en waar van het resultaat voor de drie gevallen veld in rust, veld meegesleept en veld pseudoparallel verplaatst kan worden uitgerekend. ... doen dit voor de <u>eerste</u> kromming voor het geval van een V_m in

overal is j^κ_λ te vervangen door j^κ_1

$\mathcal{D}$ somm[illegible]
dm $\overset{a}{\mathcal{D}}$

<u>Voorbeeld 3.</u> Deformatie van een V_m in V_n. De V_m zij:

22) $\xi^\kappa = f^\kappa(\eta^\alpha) \;;\; \alpha = 1,\ldots,m$

of

23) $F^x(\xi^\kappa) = 0 \;;\; x = m+1,\ldots,n$

De η^α zijn coördinaten in V_m. De grootheden

24) $B_b^\kappa = \partial_b \xi^\kappa \;;\; C_\lambda^x = \partial_\lambda F^x$

zijn de <u>contra-</u> en de <u>covariante</u> <u>verbindingsgrootheid</u> der V_m. De fundamentaaltensor in V_m is

25) $'g_{ba} = B_b^\lambda B_a^\kappa g_{\lambda\kappa}$

Met behulp van $B_b^\kappa, C_\lambda^x, 'g_{ba}, g_{\lambda\kappa}$ kan men iedere grootheid <u>in</u> X_m of in een locale $R_{n-m} \perp X_m$ als grootheid in X_n opvatten en dus kentallen in X_n met gri~~dentie~~ekse indices geven. Bijv.

26) $B_\lambda^\kappa = 'g^{ab} B_b^\nu g_{\lambda\nu} B_a^\kappa$

Sleep (κ) mee en ook het coördinatenstelsel (a) in X_m. Laat $g_{\lambda\kappa}$ in rust. Dan is $\overset{a}{D} B_b^\kappa = 0$ en dus

27) $\overset{a}{D}\, 'g_{ba} = B_b^\lambda B_a^\kappa \overset{a}{D} g_{\lambda\kappa} = B_b^\lambda B_a^\kappa \underset{L}{D}\, g_{\lambda\kappa} = 2 B_b^\lambda B_a^\kappa h_{\lambda\kappa}$

Is $'g = Det('g_{ba})$ dan is

28) $$'g^{ab} = \frac{\partial \log 'g}{\partial\, 'g_{ba}}$$

en dus

29) $\overset{a}{D}\, 'g = 2\, 'g\, 'g^{ab} B_b^\lambda B_a^\kappa \nabla_{(\lambda} v_{\kappa)}$

Het volume-element van V_m is $d\tau_m = 'g^{1/2} d\eta^1 \ldots d\eta^m$. Bijgevolg is

30) $$\overset{a}{D}\, d\tau_m = \tfrac{1}{2}\, 'g^{-1/2} d\eta^1 \ldots d\eta^m \cdot 2\, 'g\, 'g^{ab} B_b^\lambda B_a^\kappa \nabla_{(\lambda} v_{\kappa)}$$
$$= 'g^{ab} B_b^\lambda B_a^\kappa \nabla_\lambda v_\kappa\, d\tau_m = 'g^{\rho\sigma} B_\rho^\lambda B_\sigma^\kappa \nabla_\lambda v_\kappa\, d\tau_m$$

Is $v^\kappa \perp V_m$, dus $B_\lambda^\kappa v_\kappa = 0$ dan komt er

31) $$\overset{a}{D}\, d\tau_m = -'g^{\rho\sigma} B_\rho^\lambda v_\kappa \nabla_\lambda B_\sigma^\kappa\, d\tau_m = -'g^{\mu\lambda} H_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa} v_\kappa\, d\tau_m = -m M^\kappa v_\kappa\, d\tau_m$$

maar

32) $$H_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa} \overset{def}{=} B_\mu^\sigma B_\lambda^\rho \nabla_\rho B_\sigma^\kappa$$

de kromteaffinor der X_m en $M^\kappa = \frac{1}{m}\, 'g^{\mu\lambda} H_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa}$ de <u>gemiddelde kromtev~~a~~ector</u> der V_m is. V_m is een minimaal-V_m als $M^\kappa = 0$. Is dan $v^\kappa \perp V_m$ dan is de variatie van <u>ieder</u> volumeelement nul. Is v^κ niet $\perp V_m$ maar $= 0$ op de rand van een gebied τ_m dan is

33) $$dt\, \overset{a}{D} \int_{\tau_m} d\tau_m = -dt \int_{\tau_m} m M^\kappa v_\kappa\, d\tau_m + dt \int_{\tau_m} \nabla_\lambda ('g^{\lambda\kappa} v_\kappa)\, d\tau_m$$

De tweede integraal verdwijnt ingevolge Stokes en de eerste inte[illegible]
is nul voor $M^\kappa = 0$.

De variatie van $\mathcal{H}_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa}$ wordt als volgt gevonden

34) $$\overset{a}{D}\mathcal{H}_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa} = \overset{a}{D} B_\mu^\sigma B_\lambda^\rho \nabla_\rho B_\sigma^\kappa = B_\mu^\sigma B_\lambda^\rho \overset{a}{D} \nabla_\rho B_\sigma^\kappa$$

Maar nu kan men uitrekenen dat

35) $$(\overset{a}{D}\nabla_\rho - \nabla_\rho \overset{a}{D}) B_\sigma^\kappa = - B_\sigma^\nu v_{\cdot\nu\rho}^{\kappa} + B_\tau^\kappa v_{\cdot\sigma\rho}^{\tau}$$

$$v_{\nu\lambda\mu} \overset{def}{=} - \nabla_\lambda \nabla_{(\nu} v_{\mu)} + \nabla_\nu (\nabla_\lambda v_\mu) - \nabla_\mu \nabla_{(\lambda} v_{\nu)}$$

en dus

36) $$\overset{a}{D}\mathcal{H}_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa} = - B_\mu^\sigma B_\lambda^\rho v_{\cdot\sigma\rho}^{\kappa} + B_\mu^\sigma B_\lambda^\rho B_\tau^\kappa v_{\cdot\sigma\rho}^{\tau} + + B_\mu^\sigma B_\lambda^\rho \nabla_\rho \overset{a}{D} B_\sigma^\kappa$$

Nu is

37) $$\overset{a}{D} B_\sigma^\kappa = \overset{a}{D}\, \overset{\prime}{g}{}^{ab} B_b^\nu g_{\sigma\nu} B_a^\kappa = B_b^\nu B_a^\kappa \overset{a}{D}\, \overset{\prime}{g}_{ab}\, g_{\sigma\nu} = 2 \overset{\prime}{g}{}^{\nu\kappa} C_\sigma^\rho k_{\nu\rho}$$

en dus

38) $$B_\mu^\sigma B_\lambda^\rho \nabla_\rho \overset{a}{D} B_\sigma^\kappa = 2 B_\mu^\sigma B_\lambda^\rho \nabla_\rho \overset{\prime}{g}{}^{\nu\kappa} C_\sigma^\rho k_{\nu\rho} = - 2 \overset{\prime}{g}{}^{\nu\kappa} k_{\nu\rho} \mathcal{H}_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\rho}$$

zodat tenslotte

39) $$\overset{a}{D}\mathcal{H}_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa} = - B_\mu^\sigma B_\lambda^\rho C_\tau^\kappa v_{\cdot\sigma\rho}^{\tau} - 2 \overset{\prime}{g}{}^{\nu\kappa} k_{\nu\rho} \mathcal{H}_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\rho}$$

Hieruit volgt als n.e.v. voorwaarde voor een transformatie die iedere geodetische V_m $(\mathcal{H}_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\kappa} = 0)$ geodetisch laat:

40) $$B_\mu^\sigma B_\lambda^\rho C_\tau^\kappa v_{\cdot\sigma\rho}^{\tau} = 0$$

voor iedere keuze van B_λ^κ en C_λ^κ. Dit is alleen mogelijk indien

41) $$- v_{\kappa\lambda\mu} = \nabla_\lambda \nabla_{(\kappa} v_{\mu)} - \nabla_\kappa \nabla_{(\lambda} v_{\mu)} + \nabla_\mu \nabla_{(\lambda} v_{\kappa)} = g_{\kappa(\lambda} P_{\mu)}$$

waar P_λ een willekeurige vector is. Voor een R_n (euklidische V_n) gaat overal ∇_λ in ∂_λ over en ontstaat de differentiaalvergelijking der infinitesimale transformaties die alle vlakke uitgebreidheden vlak laten.

Litteratuur:

Th. Lepage, Mém. Acad.Roy.Belg. 1929

W. Slebodzinski, Sur les équations canoniques de Hamilton, Bull.Acad.Belg. (5)17 (1931) 864-870

D.v.Dantzig, Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie II, Proc. Kon. Ned. Akad. 35 (1932) 535-542; Electromagnetism, independent of metrical geometry 3, Proc.Kon. Akad. 37 (1934) 644-652; On the thermo-hydrodynamics of perfectly perfect fluids I, Proc.Kon.Ned.Akad. 43 (1940) 387-402

J.A. Schouten en E.R. van Kampen, Beiträge zur Theorie der Deformation, Prac.Mat.Fiz.Warschau 41 (1933) 1-19

H.A. Hayden, Infinitesimal transformations of sub-spaces in a general metric space, Proc.Lond.Math.Soc. 2.37 (1934) 410-440. Infinitesimal transformations of an L_m in an L_n.

J.A. Schouten en D.J. Struik, Einführung I (1935) 140 e.v. II (1938) 161 e.v.

E.T. Davies, On the infinitesimal deformations of a space, Ann.di Math. IV 12 (33-34) 145-151; On the deformation of a subspace, Journ.Lond. Math. Soc. 2 (1936) 295-301; On the second and third fundamental forms of a subspace, Journ.Lond.Math.Soc. 12(1937) 290-295; Analogues of the Frenet formula determined by deformation operators, Journ.Lond.Math.Soc. 13 (1938) 210-216; Lie derivation in generalized metric spaces, Am.Math.Pure Appl. 18 (1939) 261-274; The first and second variations of the volume integral in Riemannian space, Quart.Journ.Math. Oxford 13 (1941) 58-64; On the isomorphic transformations of a space of K-spreads, Journ.Lond.Math.Soc. 18(1943) 100-107; The geometry of multiple integral, Journ.Lond.Math.Soc. 20 (1945) 163-170; On motions in a metric space Quart.Journ.Math. Oxford 16 (1945) 22-30 Subspaces of a Finsler space, Proc.Lond.Math.Soc. 2.[illegible] (1945) 19-39.

P. Dienes, Sur la déformation des sous-espaces dans un espace à connexion linéaire générale, C.R. 197 (1933) 1082-1084; On the deformation of tensor manifolds, Proc.Lond.Math. Soc. 2.37 (1934) 512-519; Sur la déformation des espaces à connexion linéaire générale, C.R. 197 (1933) 1084-1086; On curves in a space of general linear connection, Journ. Lond.Math.Soc.9 (1934) 259-266; tezamen met E.T. Davies: On the infinitesimal deformations of tensor submanifolds, Journ. de Math. 16 (1937) 111-150 (presented in 1933).