STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1951 - 010

Berekening van de viervoudige integraal

$$\int_0^b\int_0^b\int_0^a\int_0^a \frac{dx_1dx_2dy_1dy_2}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+h^2\ ^3} \, .$$

Dr. W. Peremans en H.J.A. Duparc

1951

Berekening van de viervoudige integraal

$$\int_0^b\int_0^b\int_0^a\int_0^a \frac{dx_1dx_2dy_1dy_2}{\left((x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+h^2\right)^3}.$$

Dr W.Peremans en H. J. A. Duparc.

Door de transformatie $x_1-x_2=x$; $x_1+x_2=X$; $y_1-y_2=y$; $y_1+y_2=Y$ gaat de te berekenen integraal over in

$$4\int_0^b\int_0^a\frac{(a-x)(b-y)dxdy}{(x^2+y^2+h^2)^3}.$$

Deze integraal splitsen we in 4 integralen, welke ontstaan door de teller in zijn 4 bestanddelen te splitsen.
Beschouw allereerst de integraal

$$\mathcal{J}_1=4ab\int_0^b\int_0^a\frac{dxdy}{(x^2+y^2+h^2)^3}.$$

Door transformatie op poolcoördinaten gaat deze over in

$$4ab\iint\frac{r\ dr\ d\varphi}{(r^2+h^2)^3},$$

te nemen over de rechthoek met hoekpunten (0,0); (a,0); (a,b); (0,b), welke wij verdelen in twee driehoekige gebieden door de rechte $\frac{Y}{X}=\frac{b}{a}$. Dan vindt men dat $\mathcal{J}_1$ gelijk is aan de som van twee uitdrukkingen, waarvan de eerste gelijk is aan

$$4ab\int_0^{\mathrm{bg\,tg}\frac{b}{a}}d\varphi\int_0^{a\sec\varphi}\frac{r\,dr}{(r^2+h^2)^3}=4ab\int_0^{\mathrm{bg\,tg}\frac{b}{a}}d\varphi\left(\frac{-\frac{1}{4}}{(r^2+h^2)^2}\right)\Bigg|_0^{a\sec\varphi}=$$

$$=\frac{ab}{h^4}\,\mathrm{bg\ tg}\,\frac{b}{a}-ab\int_0^{\mathrm{bg\,tg}\frac{b}{a}}\frac{d\varphi}{(h^2+a^2\sec^2\varphi)^2}$$

en de tweede uit de eerste volgt door a en b te verwisselen. De laatste integraal gaat door de substitutie $\mathrm{tg}\,\varphi=t$ over in

$$\int_0^{\frac{b}{a}}\frac{dt}{(t^2+1)(a^2t^2+a^2+h^2)^2}=\frac{1}{a^4}\int_0^{\frac{b}{a}}\frac{dt}{(t^2+1)(t^2+\alpha^2)^2}\quad\text{met } \alpha^2=1+\frac{h^2}{a^2}.$$

Wegens $\dfrac{1}{(t^2+1)(t^2+\alpha^2)^2}=\dfrac{A}{t^2+1}+\dfrac{B}{t^2+\alpha^2}+\dfrac{C}{(t^2+\alpha^2)^2}$

met $A=-B=(1-\alpha^2)^{-2}$; $C=(1-\alpha^2)^{-1}$

vindt men

$$\int\frac{dt}{(t^2+1)(t^2+\alpha^2)^2}=(1-\alpha^2)^{-2}\mathrm{bg\ tg}\ t+\frac{1+3\alpha^2}{2\alpha^3(1-\alpha^2)^2}\ \mathrm{bg\ tg}\ \frac{t}{\alpha}+\frac{t}{2\alpha^2(t^2+\alpha^2)(1-\alpha^2)}$$

zodat men tenslotte voor de eerste in $\mathcal{J}_1$ optredende uitdrukking vindt

$$\frac{ab}{h^4}\,\mathrm{bg\ tg}\,\frac{b}{a}-\frac{ab}{a^4}\left(\frac{a^4}{h^4}\,\mathrm{bg\ tg}\,\frac{b}{a}-\frac{a^5(2a^2+3h^2)}{2h^4(a^2+h^2)^{3/2}}\,\mathrm{bg\ tg}\,\frac{b}{\sqrt{a^2+h^2}}+\right.$$

$$\left.-\frac{a^5b}{2h^2(a^2+h^2)(a^2+b^2+h^2)}\right)$$

waarna men krijgt

$$\mathcal{J}_1=\frac{ab\pi}{2h^4}-\frac{ab}{h^4}\,\mathrm{bg\ tg}\,\frac{b}{a}-\frac{ab}{h^4}\,\mathrm{bg\ tg}\,\frac{a}{b}+\frac{a^2b(2a^2+3h^2)}{2h^4(a^2+h^2)^{3/2}}\,\mathrm{bg\ tg}\,\frac{b}{\sqrt{a^2+h^2}}+$$

$$+\frac{ab^2(2b^2+3h^2)}{2h^4(b^2+h^2)^{3/2}}\,\mathrm{bg\ tg}\,\frac{a}{\sqrt{b^2+h^2}}+\frac{a^2b^2(a^2+b^2+2h^2)}{2h^2(a^2+h^2)(b^2+h^2)(a^2+b^2+h^2)}.$$

Men merke nog op dat de som der eerste drie termen in het rechterlid gelijk is aan 0.

Verder is

$$\mathcal{J}_2=-4b\int_0^b\int_0^a\frac{x\,dx\,dy}{(x^2+y^2+h^2)^3}=b\int_0^b dy\left\{\frac{1}{(x^2+y^2+h^2)^2}\right|_0^a=$$

$$=-b\int_0^b dy\left(\frac{1}{(y^2+h^2)^2}-\frac{1}{(a^2+y^2+h^2)^2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2h^2}\,\frac{b^2}{b^2+h^2}-\frac{b}{2h^3}\,\mathrm{bg\ tg}\,\frac{b}{h}+\frac{1}{2(h^2+a^2)}\,\frac{b^2}{a^2+b^2+h^2}+\frac{b}{2(h^2+a^2)^{3/2}}\,\mathrm{bgtg}\,\frac{b}{\sqrt{a^2+h^2}}.$$

Evenzo is

$$\mathcal{J}_3=-4a\int_0^b\int_0^a\frac{y\,dx\,dy}{(x^2+y^2+h^2)^3}=-\frac{1}{2h^2}\,\frac{a^2}{a^2+h^2}-\frac{a}{2h^3}\,\mathrm{bg\ tg}\,\frac{a}{h}+\frac{1}{2(h^2+b^2)}\,\frac{a^2}{a^2+b^2+h^2}+$$

$$+\frac{a}{2(h^2+b^2)^{3/2}}\,\mathrm{bg\ tg}\,\frac{a}{\sqrt{b^2+h^2}},$$

en tenslotte is

$$\mathcal{J}_4=4\int_0^b\int_0^a\frac{xy\,dx\,dy}{(x^2+y^2+h^2)^3}=\int_0^b\frac{y\,dy}{(y^2+h^2)^2}-\int_0^b\frac{y\,dy}{a^2+h^2+y^2}=$$

$$=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2+b^2+h^2}-\frac{1}{a^2+h^2}-\frac{1}{b^2+h^2}+\frac{1}{h^2}\right).$$

Na optelling vindt men tenslotte voor de gevraagde integraal

$$\frac{b(2a^2+h^2)}{h^4\sqrt{a^2+h^2}}\,\mathrm{bg\ tg}\,\frac{b}{\sqrt{a^2+h^2}}+\frac{a(2b^2+h^2)}{2h^4\sqrt{b^2+h^2}}\,\mathrm{bg\ tg}\,\frac{a}{\sqrt{b^2+h^2}}-\frac{a}{2h^3}\,\mathrm{bg\ tg}\,\frac{a}{h}-\frac{b}{2h^3}\,\mathrm{bgtg}\,\frac{b}{h}.$$

+++++++++++++