STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1957 - 010

Transformatie van een som van exponentiële termen

C.G. Lekkerkerker

1957

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Transformatie van een som van exponentiële termen

door

C.G. Lekkerkerker

Door Prof. Van Dantzig werd de volgende vraag gesteld: is het mogelijk de reeksen

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-y\sqrt{n^2 \pm \kappa^2}} \cos nx \qquad (x,y,\kappa > 0)$$

voor te stellen door een som van K_o-functies?
In het volgende zullen we deze vraag bevestigend beantwoorden (zie formules (3) en (5)). Daarbij zullen we gebruik maken van de formule van Poisson

$$(1) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-2\pi imt}\, dt$$

en van de volgende formule voor $K_o(z)$ (zie b.v. Erdélyi, Higher transcendental functions II, p.82):

$$(2) \qquad K_o(z) = \int_0^{\infty} e^{-z \operatorname{ch} v}\, dv \qquad (\operatorname{Re} z > 0).$$

We beschouwen eerst bovengenoemde reeks met $+\kappa^2$. Passen we (1) toe met $g(t)=e^{-y\sqrt{t^2+\kappa^2}+itx}$, dan vinden we

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-y\sqrt{n^2+\kappa^2}} \cos nx = -\tfrac{1}{2}e^{-\kappa y} + \tfrac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-y\sqrt{n^2+\kappa^2}+inx}$$

$$= -\tfrac{1}{2}e^{-\kappa y} + \tfrac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(x,y)$$

met

$$f_m(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y\sqrt{t^2+\kappa^2}+itx-2\pi imt}\, dt.$$

Substitutie van $t=\kappa \operatorname{sh} v$ geeft

$$f_m(x,y) = \kappa \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\kappa y \operatorname{ch} v + i\kappa(x-2\pi m)\operatorname{sh} v} \operatorname{ch} v\, dv,$$

wat we ook kunnen schrijven als

$$f_m(x,y) = -\frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\kappa y \operatorname{ch} v + i\kappa(x-2\pi m)\operatorname{sh} v}\, dv.$$

We stellen nu

$$r = \kappa\sqrt{y^2 + (x-2\pi m)^2},$$

$$\kappa y = r\cos\varphi, \quad \kappa(x-2\pi m) = r\sin\varphi.$$

Wegens $\kappa y > 0$ kunnen we nemen $|\varphi| < \tfrac{1}{2}\pi$. We hebben

$$\kappa y \operatorname{ch} v - i\kappa\,(x-2\pi m)\operatorname{ch} v$$

$$= r \operatorname{ch} v \cos\varphi - ir \operatorname{sh} v \sin\varphi = r(\operatorname{ch} v \operatorname{ch} i\varphi - \operatorname{sh} v \operatorname{sh} i\varphi)$$

$$= r \operatorname{ch}(v-i\varphi).$$

Verder is ch v in de strook begrensd door de rechten Im v = 0,φ exponentieel klein voor $|v| \to \infty$. Dus is

$$f_m(x,y) = -\frac{\partial}{\partial y}\int_{-\infty}^{i\infty} e^{-r\,\mathrm{ch}(v-i\varphi)}dv = -\frac{\partial}{\partial y}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-r\,\mathrm{ch}\,v}\,dv.$$

Gebruik makend van (2) vinden we dus de volgende formule:

$$(3)\quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-y\sqrt{n^2+\kappa^2}}\cos nx = -\tfrac{1}{2}e^{-\kappa y} - \frac{\partial}{\partial y}\sum_{m=-\infty}^{\infty} K_0(\kappa\sqrt{y^2+(x-2\pi m)^2}).$$

Voor grote waarden van z hebben we (zie Erdélyi,l.c.,p.86)

$$K_0(z)=e^{-z}\left\{\sqrt{\frac{\pi}{2z}} + O(|z|^{-3/2})\right\},\ -\frac{3\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2}.$$

De termen van de reeks in het rechterlid van (3) naderen dus exponentiëel tot 0. Uit (3) kunnen we een analoog resultaat afleiden voor de reeks met $-\kappa^2$.

We laten daartoe κ variëren in het complexe vlak. We hebben

$$\frac{\partial}{\partial y}K_0(\kappa\sqrt{y^2+(x-2\pi m)^2}) = K_0'(\kappa\sqrt{y^2+(x-2\pi m)^2})\cdot\frac{\kappa y}{\sqrt{y^2+(x-2\pi m)^2}}$$

en $K_0'(z)=e^{-z}\left\{-\sqrt{\frac{\pi}{2z}} + O(|z|^{-3/2})\right.$. Dus, als x en y vast zijn en κ varieert in een begrensd deel van het halfvlak Re $\kappa \geq 0$, dan is

$$\frac{\partial}{\partial y}K_0(\kappa\sqrt{y^2+(x-2\ m)^2}) = O(m^{-3/2})\quad \text{voor } m\to\infty.$$

De reeks in het rechterlid van (3) convergeert dus uniform in κ als κ varieert in een begrensd deel van het halfvlak Re $\kappa \geq 0$, en stelt daar een analytische functie van κ voor. We laten nu κ in het vierde kwadrant bewegen naar een punt van de negatief imaginaire as, dat we voor zullen stellen door $-i\kappa$. Voor $n \geq \kappa$ gaat dan $\sqrt{n^2+\kappa^2}$ over in $\sqrt{n^2-\kappa^2}$ en voor $n \leq \kappa$ in $-i\sqrt{\kappa^2-n^2}$. We vinden zo

$$(4)\quad \sum_{n\leq\kappa} e^{+iy\sqrt{\kappa^2-n^2}}\cos nx + \sum_{n>\kappa} e^{-y\sqrt{n^2-\kappa^2}}\cos nx$$
$$= -\tfrac{1}{2}e^{i\kappa y} - \sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial y}K_0(-i\kappa\sqrt{y^2+(x-2\pi m)^2}).$$

We kunnen dit antwoord nog verder herleiden. Uit de definities van $Y_n(z)$ en $K_n(z)$ voor gehele n, nl.

$$Y_n(z)=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left\{J_{n+\varepsilon}(z)-(-1)^n J_{-n-\varepsilon}(z)\right\},$$

$$K_n(z) = \tfrac{1}{2}(-1)^n\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left\{I_{-n-\varepsilon}(z)-I_{n+\varepsilon}(z)\right\}$$

$$= -\tfrac{1}{2}i^n\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left\{J_{n+\varepsilon}(iz)-i^{2n+2\varepsilon}J_{-n-\varepsilon}(iz)\right\}$$

volgt

$$K_n(z) = -\tfrac{1}{2} i^n \left[\pi Y_n(iz) - \pi i\, J_n(iz)\right].$$

Door in (4) links en rechts het imaginaire deel te nemen krijgen we dus

$$(4a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\, e^{-y\sqrt{n^2-\kappa^2}} \cos nx = -\tfrac{1}{2}\cos \kappa y + {} + \frac{\pi}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} Y_0(\kappa\sqrt{y^2+(x-2\pi m)^2}),$$

$$(4b)\quad \sum_{n=1}^{[\kappa]} \sin(y\sqrt{\kappa^2-n^2}) \cos nx = -\tfrac{1}{2}\sin \kappa y - {} + \frac{\pi}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} J_0(\kappa\sqrt{y^2+(x-2\pi m)^2}).$$

Formule (4a) geeft het volgende resultaat voor de in de aanvang genoemde reeks met $-\kappa^2$:

$$(5)\quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-y\sqrt{n^2-\kappa^2}} \cos nx = -\tfrac{1}{2}\cos \kappa y + {} + \frac{\pi}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} Y_0(\kappa\sqrt{y^2+(x-2\pi m)^2}) \mp \sum_{n=1}^{[\kappa]} \sin(y\sqrt{\kappa^2-n^2})\cos nx ,$$

waarbij de laatste uitdrukking het minteken of het plusteken heeft al naargelang we nemen $\sqrt{n^2-\kappa^2} = i\sqrt{\kappa^2-n^2}$ of $= -i\sqrt{\kappa^2-n^2}$. De termen in de verkregen oneindige reeks zijn van de orde $m^{-3/2}$.

Als nevenresultaat hebben we een formule voor een zekere oneindige som van J_0-functies gekregen. We geven hier nog een direct bewijs van deze formule en schrijven hem daartoe als volgt:

$$(6)\quad \pi\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} J_0(\kappa\sqrt{y^2+(x-2\pi m)^2}) = -2 \sum_{0\leq n\leq \kappa} \sin(y\sqrt{\kappa^2-n^2})\cos nx,$$

waarbij we afspreken, dat in het rechterlid de term met $n=0$ en de term met $n=\kappa$ (indien voorkomend) half geteld worden (overigens is de term met $n=\kappa$ gelijk aan 0). We maken gebruik van de volgende formule (zie Erdélyi, l.c., p.82):

$$\pi J_0(\sqrt{\xi^2-\eta^2}) = \int_0^{\pi} e^{\eta\cos t} \cos(\xi \sin t)\,dt \quad (\mathrm{Re}(\xi+\eta) > 0).$$

Vullen we in $\xi = \kappa y$, $\eta = i\kappa(x-2\pi m)$, dan vinden we door een eenvoudige substitutie:

$$\pi\frac{\partial}{\partial y} J_0(\kappa\sqrt{y^2+(x-2\pi m)^2}) = -\int_0^{\pi} e^{-2\pi i\kappa m\cos t} \cdot e^{i\kappa x\cos t} \sin(\kappa y\sin t)\,\kappa \sin t\, dt$$

$$= -\int_{-\kappa}^{\kappa} e^{2\pi i m v} \cdot e^{-ixv} \sin(y\sqrt{\kappa^2-v^2})\,dv.$$

Sommatie over m levert

$$\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} J_0(\kappa\sqrt{y^2+(x-2\pi m)^2}) = -\sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\kappa}^{\kappa} e^{2\pi imv}\, e^{-ixv} \sin(y\sqrt{\kappa^2-v^2})dv$$

$$= -2 \sum_{m=-\infty} \int_0^{\kappa} e^{2\pi imv} \cos xv \sin(y\sqrt{\kappa^2-v^2})dv$$

$$= -2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^1 + \int_1^2 + \ldots + \int_{[\kappa]-1}^{[\kappa]} + \int_{[\kappa]}^{\kappa} \right\} .$$

Daar voor een willekeurige op intervallen continu differentieerbare functie F(v) geldt:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_a^{a+1} e^{2\pi imv} F(v)dv = \tfrac{1}{2}\left\{ F(a) + F(a+1) \right\} \qquad \text{(a reëel)}$$

is de laatste uitdrukking gelijk aan

$$-2 \left\{ F(0) + 2\,F(1) + \ldots + 2\,F([\kappa]) \right.$$

met $F(v) = \cos xv \sin(y\sqrt{\kappa^2-v^2})$. Daarmee is (6) opnieuwe bewezen.