STICHTING

MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49

AMSTERDAM

ZW 1958 - 010

Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen van hoger standpunt belicht"

Prof.dr. B. Meulenbeld

16 april 1958

"Oneindige exponentialen"

1958

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

ZW 1958-010

Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen van hoger standpunt belicht"

door

Prof.Dr B. Meulenbeld

16 april 1958

"Oneindige exponentialen"

Onder kettingexponentiaal zullen we verstaan:

$$E(a_o,a_1,\dots,a_n) = a_o^{a_1^{a_2^{\cdot^{\cdot^{a_n}}}}}$$, n heet de orde van de exponentiaal.

Eigenschappen:

1. $E(a_o,a_1,\dots,a_m,a_{m+1},\dots,a_n)=E\{a_o,a_1,\dots,a_m,E(a_{m+1},\dots,a_n)\}$
2. $E(a_o,a_1,\dots,a_m,1,a_{m+2},\dots,a_n)=E(a_o,a_1,\dots,a_m)$
3. $E(a_o,a_1,\dots,a_m,0,a_{m+2},\dots,a_n)=E(a_o,a_1,\dots,a_{m-1})$.

Nu beperken tot geval: $a_i \geq 0$.

Als $\lim\limits_{n\to\infty} E(a_o,\dots,a_n)$ bestaat en $=k$, dan noemen we de oneindige exponentiaal (o.e.) convergent met waarde k. Anders divergent.

$E(a_m,a_{m+1},\dots)$ heet de m^{de} restexponentiaal van $E(a_o,a_1,\dots)$.

Als elke restexponentiaal convergeert, heet de o.e. eigenlijk convergent. Als de o.e. convergeert, maar tenminste een van zijn restexponentialen divergeert, dan heet de o.e. oneigenlijk convergent.

Stellingen (triviaal).

1. Als een van de restexponentialen convergeert, convergeert de o.e.
2. Als een van de restexponentialen divergeert, divergeert ook elke volgende restexponentiaal.

Als $E(a_o,a_1,\dots,a_n)$ onbeperkt aangroeit met n, heet de o.e. eigenlijk divergent; als $E(a_o,a_1,\dots,a_n)$ begrensd is bij $n\to\infty$, en toch geen limiet heeft, heet de o.e. <u>oneigenlijk divergent</u> of <u>oscillerend</u>.

3. Als één exponent in een o.e. < 1, dan zal de o.e. convergeren of oscilleren.
4. Als al de exponenten in een o.e. > 1 zijn, zal $E(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ in waarde monotoon met n toenemen.
   Een ketting-exponentiële functie is $E(a_0, a_1, \ldots, a_n, x)$.
   Een grafisch proces kan worden aangegeven om voor verschillende waarden van x deze functie uit te rekenen.
   Hiermede kan men de volgende stellingen bewijzen:
5. Als $a > e^{\frac{1}{e}}$ zal $E(a, a, \ldots)$ eigenlijk divergeren.
6. Als $e^{-e} \leq a \leq e^{\frac{1}{e}}$, dan is $E(a, a, \ldots)$ convergent met waarde k, die voldoet aan $k = a^k$ $(\frac{1}{e} \leq k \leq e)$.
7. Is $0 < a < e^{-e}$ dan is $E(a, a, \ldots)$ oneigenlijk divergent. $E(a, a, \ldots)$ oscilleert tussen twee waarden k_1 en k_2, waarbij
   $$k_1 = a^{k_2} \text{ en } k_2 = a^{k_1} \text{ en } 0 < k_1 < \frac{1}{e} < k_2 < 1.$$
8. De functie $E(a_0, a_1, \ldots, a_n, x)$ is een monotoon toenemende of afnemende functie al naargelang er een even of oneven aantal van de a_i kleiner zijn dan 1.
9. Als al de a_i liggen in het convergentie-interval, d.i.
   $$e^{-e} \leq a_i \leq e^{\frac{1}{e}} \qquad (i=0,1,2,\ldots)$$
   en als $0 \leq x \leq e$, dan geldt:
   $$0 \leq E(a_0, a_1, \ldots, a_n, x) \leq e.$$
10. Als al de a_i liggen in het convergentie-interval, dan nadert het verschil tussen de grootste en kleinste waarden van $E(a_0, a_1, \ldots, a_n, x)$ in het interval $0 \leq x \leq e$ tot nul, als $n \to \infty$.
11. De o.e. $E(a_0, a_1, \ldots)$ convergeert als vanaf zekere m
    $$e^{-e} \leq a_i \leq e^{\frac{1}{e}} \qquad (i=m, m+1, \ldots).$$

Toepassing op de transcendente vergelijking:

$$y^x = x^y.$$