STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1960 - 010

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

Prof.dr. J.H. van Lint

23 november 1960

Over de problemen rond de verdeling van rechthoeken in ongelijke vierkanten

MC
1960

ZW 1960-010

Serie „Elementaire onderwerpen..."

Over de problemen rond de verdeling van rechthoeken in ongelijke vierkanten

Prof. Dr J.H. van Lint
23 november 1960

1. Vele der bekende mathematische puzzels en spelletjes, door ons recreatie-wiskunde genoemd, hebben triviale oplossingen. Vaak is dit echter niet het geval en blijkt bij de analyse van de opgave een moeilijk probleem de grondslag te zijn; een ware uitdaging voor de wiskundige. Bij het probleem dat wij thans willen bespreken was dit ook zo. De vraag is of een rechthoek, i.h.b. een vierkant, in incongruente vierkanten kan worden verdeeld. Naast deze zijn dan direct vele andere vragen te stellen zoals bv.: "Wat is het minimum aantal incongruente vierkanten nodig om een rechthoek samen te stellen ?" enz.

Een eerste behandeling van dit probleem vinden we in 1903. M.Dehn [1] toont dan aan dat de verhouding van de rechthoekszijden van een in vierkanten verdeelde rechthoek rationaal moet zijn en dat tevens de verhouding van deze zijden en de zijden van de gebruikte vierkanten (= elementen van de verdeling) rationaal moet zijn. Hierbij zien wij reeds de belangrijkste moeilijkheid nl. dat naast het metrische probleem nog het topologische probleem is op te lossen hoe de vierkanten aan elkaar sluiten.

In 1925 werd door Z.Moroń [2] het eerste voorbeeld gevonden van een rechthoek verdeeld in (negen) ongelijke vierkanten. In 1930 vinden we nog een opmerking van Lusin geciteerd waarin de onmogelijkheid een vierkant in ongelijke vierkanten te verdelen zeer waarschijnlijk genoemd wordt. Het duurt tot 1939 voor het tegendeel wordt aangetoond door R.Sprague [3] die een voorbeeld geeft van een vierkant verdeeld in 55 ongelijke vierkanten.

We geven nu enige definities waarna we de problemen kunnen noemen die ons interesseren.

(Def.1) Een verdeling van een rechthoek in vierkanten heet <u>perfect</u> als alle elementen verschillend zijn. Anders heet de verdeling <u>imperfect</u>. <u>Niet triviaal imperfect</u> heet de verdeling als er wel gelijke elementen zijn maar deze geen zijde gemeen hebben. (Dit mag ook niet door een triviale verplaatsing te bereiken zijn.)

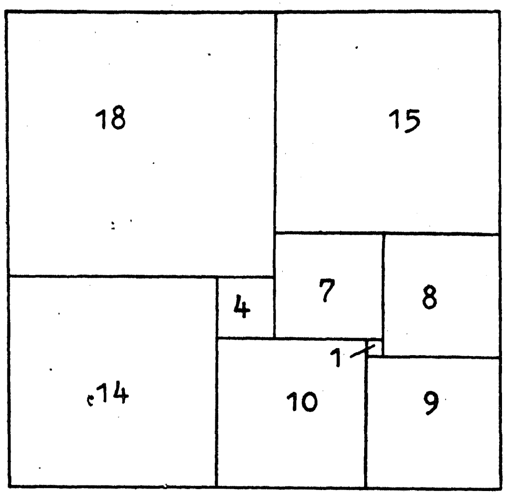
(Def.2) Een verdeling heet <u>samengesteld</u> als door verwijderen van enkele (niet alle) zijden van vierkanten een verdeling van de oorspronkelijke rechthoek in rechthoeken ontstaat. Is dit niet het geval dan heet de verdeling <u>enkelvoudig</u>.

We onderzoeken de volgende problemen:

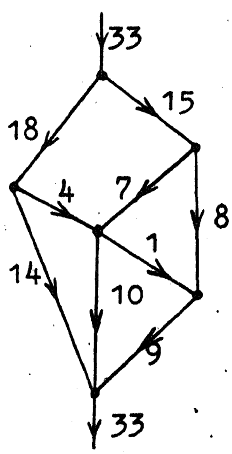
(1.1) Bepaal N_1 = minimum aantal vierkanten nodig om een rechthoek perfect te verdelen.
(1.2) Bepaal N_2 = minimum aantal vierkanten nodig om een vierkant perfect te verdelen.
(1.3) Bepaal N_3 = minimum aantal vierkanten nodig om een vierkant enkelvoudig te verdelen.
(1.4) Bepaal N_4 = minimum aantal vierkanten nodig om een vierkant perfect en enkelvoudig te verdelen.
(1.5) Welke rechthoeken zijn perfect in vierkanten te verdelen?

De problemen (1.2) en (1.4) zijn nog onopgelost.

2. We geven nu een schets van de verrassende oplossing van het probleem, gevonden door R.L.Brooks, C.A.B.Smith, A.H.Stone en W.T.Tutte in 1940 [4]. Zij brachten de verdeling van de rechthoek in verband met een electrisch netwerk. Hoe we dit verband duidelijk kunnen zien is door C.J.Bouwkamp beschreven [5]. Laten we veronderstellen dat de verdeling in vierkanten is aangebracht op een rechthoekige dunne metalen plaat. We veronderstellen dat de onder- en bovenzijde van het vierkant electroden zijn van perfect geleidend materiaal. Als tussen deze electroden een potentiaalverschil V bestaat zal er een electrische stroom I docr de plaat lopen. Door een geschikte keuze van de eenheden kunnen we I = horizontale rechthoekszijde nemen. De stroomlijnen lopen nu verticaal, de equipotentiaallijnen horizontaal. Als we oneindig dunne sneden aanbrengen in de plaat langs de verticale segmenten verandert er niets aan de stroom. Elk vierkantje is nu op te vatten als een draad waar een stroom door loopt. De draden vormen een electrisch netwerk. Bekijken we bv. de rechthoek (Moroń)



waarvoor door C.J.Bouwkamp [5] de volgende code is ingevoerd: (18,15)(7,8)(14,4)(10,1)(9), dan is hiervan door de sneden het volgende netwerk gemaakt



Door onze eenheden keuze blijken alle "draden" de weerstand 1 te hebben.

We brengen nog een draad aan waarin we de stroombron opgenomen denken. Zo is aan een verdeling van een rechthoek in n vierkanten een planair netwerk van n+1 draden toegevoegd. Hebben we omgekeerd een planair netwerk van n+1 draden en brengen we in één der takken een stroombron aan dan beantwoordt hieraan een verdeling van een rechthoek in vierkanten. De zijden van de vierkanten d.w.z. de stromen in de takken zijn nu met behulp van de wetten van Kirchhoff eenvoudig te berekenen.

In de electriciteitsleer kennen we een zekere dualiteit bij verwisseling van stroom en spanning. Voor onze verdeling in vierkanten vinden we dit terug als we de stroom nu horizontaal laten lopen. Het net (na afsluiting) dat we vinden is het duale van het oorspronkelijke (duaal = hoekpunten in mazen van het oorspronkelijke; toegevoegde draden, en alleen deze, snijden elkaar).

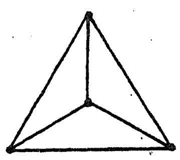
Willen we nu alle rechthoeken vinden die perfect of niet-triviaal imperfect in N vierkanten kunnen worden verdeeld dan moeten we dus alle netwerken zoeken met N takken zonder in serie of parallel lopende draden. We mogen zelfs veronderstellen dat dit geldt voor het afgesloten netwerk (N+1 takken). Van duale netwerken kunnen we er één weglaten.

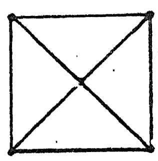
3. Stelling: $N_1 = 9$.

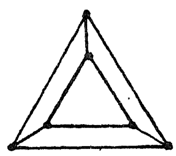
Bewijs: Voor een planair netwerk met K hoekpunten, T takken en M mazen geldt volgens de polyederstelling van Euler: $K + M = T + 2$. Daar in ieder hoekpunt minstens 3 takken samen komen is $3K \leqslant 2T$. Voor het duale netwerk geldt $K' = M$, $M' = K$ en $T' = T$ waaruit we afleiden

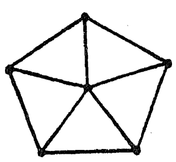
$$\frac{1}{3} T + 2 \leqslant (K,M) \leqslant \frac{2}{3} T$$

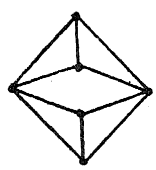
Hieruit vinden we éenvoudig dat alle planaire netwerken met ten hoogste 10 takken de volgende zijn:

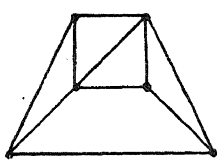

a


b


c


d


e


f

Van de meesten zien we direct dat de bijbehorende vierkanten-verdelingen een vierkant met zijde 0 (nulstroom) bezit of triviaal-imperfect is (gelijke stromen). Alleen f levert een verdeling in 9 vierkanten. Eén daarvan is imperfect. Twee zijn perfect. Een daarvan is reeds genoemd. De andere is (36,33)(5,28)(25,9,2)(7)(16) gevonden door Brooks c.s.

4. We hebben gezien dat N_1 door expliciet uitrekenen van alle mogelijkheden is gevonden. Dit is ook voor N_3 het geval en zo zullen ook N_2 en N_4 bepaald worden. We zullen hierover direct meer zeggen doch eerst het existentieprobleem (1.5) bespreken.
Hiervoor geldt de
<u>stelling</u>: <u>Alle rechthoeken met zijden die een rationale verhouding hebben zijn perfect in vierkanten te verdelen</u>.

Het bewijs berust op een hulpstelling die beweert dat een vierkant op oneindig veel manieren perfect in vierkanten kan worden verdeeld zodanig dat ieder tweetal verdelingen geen enkel element gemeen heeft. Het bewijs is door Sprague [6] gevonden en gebruikt de theorie van Brooks c.s. niet.

5. In het geciteerde artikel [5] van C.J.Bouwkamp zijn alle vierkantenverdelingen van orde $\leqslant 13$ bepaald. Hieruit bleek:
<u>Stelling</u> $N_3 = 13$, nl. door het voorbeeld
(12,11)(1,3,7)(11,2)(5)(2,5)(4,1)(3).

De berekeningen zijn vaak het eenvoudigst uit te voeren door direct de vergelijkingen van Kirchhoff op te lossen. Systematisch kan het als volgt geschieden. Aan het afgesloten netwerk voegen we een matrix A toe door de hoekpunten P te nummeren en te definieren
a_{rr} = aantal takken dat in P_r samenkomt.

$$a_{rs} = \begin{cases} 0 \text{ als } P_r \text{ en } P_s \text{ niet verbonden} \\ -1 \text{ als } P_r \text{ en } P_s \text{ wel verbonden.} \end{cases}$$

We zien dan:

(5.1) det A = 0, alle 1° cofactoren hebben dezelfde waarde C. C is de <u>complexiteit</u> van het net d.i. het aantal "volledige bomen" in het netwerk. (Een volledige boom is een samenhangend netwerk dat alle hoekpunten van het oorspronkelijke netwerk bevat en een deel van de takken en geen gesloten circuit bevat.) Laat in de tak die P_x en P_y verbindt een stroombron geplaatst zijn. Definieer [xy,rs] = cofactor van a_{ys} in de cofactor van a_{xr}. Het is nu eenvoudig na te rekenen dat als we van P_r naar P_s een stroom [xy,rs] aannemen de stromen aan de wetten van Kirchhoff voldoen.

(5.2) Als we normeren door de halve omtrek van de rechthoek gelijk aan de complexiteit te nemen en de totale stroom gelijk aan de horizontale rechthoekszijde dan is de stroom in de tak P_rP_s precies

[xy,rs]. Hieruit blijkt op triviale wijze dat de rechthoekszijden en alle vierkanten rationale verhoudingen hebben.
We kunnen met bovenstaande methode, uitgaande van een netwerk alle bijbehorende vierkanten-verdelingen uitrekenen. Door de publicaties van Brooks c.s. en Bouwkamp en door het in 1948 door T.H.Willcocks [7] gevonden vierkant
(55,39,81)(16,9,14)(4,5)(3,1)(20)(56,18)(38)(30,51)(64,31,29)(8,43)(2,35)(33)
was de stand van probleem (1.2):

(5.3) $$13 < N_2 \leqslant 24.$$

Door een voorbeeld van Brooks (1950), cf. [8], was de stand van probleem (1.4) geworden

(5.4) $$13 < N_4 \leqslant 38.$$

6. Onlangs heeft ons puzzeltje weer een schat van nieuwe problemen aan ons voorgelegd namelijk toen men ging proberen om de 2 openstaande vragen met behulp van electronische rekenmachines op te lossen. We noemen er enkele:

(6.1) Gegeven een netwerk. Gevraagd een matrixmethode zoals in 5. genoemd die zo snel mogelijk alle bijbehorende vierkanten-verdelingen oplevert.

(6.2) Als de machine de stromen heeft berekend hoe moet hij dan de codering vinden, d.w.z. de groepjes bij elkaar zetten.

(6.3) Moeten we de machine netwerken geven of kan hij die zelf (allemaal) construeren (en dan van dualen er één weglaten).

Vooral (6.3) was een zeer lastig probleem. Het bleek nl. erg moeilijk te zijn om aan de matrix A te zien of een netwerk planair is. Bovendien was dit tijdrovend.

Deze problemen zijn nu ook opgelost en wel door C.J.Bouwkamp, A.J.W.Duijvestijn en P.Medema. De door hun gevonden methoden zijn nog niet gepubliceerd. De eerste resultaten zijn in tabelvorm [9] enige weken geleden verschenen. Hierin staan alle enkelvoudige verdelingen van rechthoeken in ten hoogste 15 vierkanten. Een nevenresultaat was

(6.4) (November 1960) In (5.3) en (5.4) kan 13 door 15 worden vervangen.

Het probleem (1.2) zal vermoedelijk binnenkort door dezelfde heren geheel opgelost zijn met behulp van de nieuwe zeer snelle rekenmachine van het Philips Rekencentrum.

LITERATUUR

[1] M.Dehn, Zerlegung von Rechtecke in Rechtecken, Math.Ann. 57, (1903).

[2] Z.Moroń, Przeglad Mat.Fiz. 3 (1925).

[3] R.Sprague, Beispiel einer Zerlegung eines Quadrates in lauter verschiedene Quadrate, Math.Z. 45 (1939).

[4] R.L.Brooks, C.A.B.Smith, A.H.Stone, W.T.Tutte, The dissection of rectangles into squares, Duke Math.J. 7 (1940).

[5] C.J.Bouwkamp, On the dissection of rectangles into squares, Proc.Kon.Ned.Ak.v.Wet. 49 (1946) en 50 (1947).

[6] R.Sprague, Über die Zerlegung von Rechtecke in lauter verschiedene Quadrate, Journal f.d.r.und ang.Math. 182 (1940).

[7] T.H.Willcocks, Some perfect squared squares, Canadian J.of Math. 3 (1951).

[8] W.T.Tutte, Squaring the square, Canadian J.of Math. 2 (1950).

[9] C.J.Bouwkamp, A.J.W.Duijvestijn, P.Medema, Tables relating to simple squared rectangles of orders nine through fifteen, T.H.Eindhoven (1960).