STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

ZW 1949-011

Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen vanuit hoger standpunt belicht"

Prof. Dr. J.C.H. Gerretsen

QUATERNIONEN

Rapport Z.W., 1949-011.
23 November 1949.

Voordracht door Prof.Dr J.C.H. Gerretsen
in de serie
Elementaire onderwerpen van hoger standpunt uit.

QUATERNIONEN.

1. Definitie en rekenregels. Quaternionen zijn systemen van reële getallen viertallen $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, waarmee op de volgende wijze wordt gerekend:

a) OPTELLING.

$$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_0+\beta_0, \alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \alpha_3+\beta_3).$$

b) VERMENIGVULDIGING met een GETAL.

$$\lambda(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\lambda\alpha_0, \lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3) = (\alpha_0\lambda, \alpha_1\lambda, \alpha_2\lambda, \alpha_3\lambda) = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\lambda .$$

Dientengevolge bezit ieder quaternion een basisvoorstelling:

$$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 ,$$

met

$$e_0 = (1,0,0,0),\ e_1 = (0,1,0,0),\ e_2 = (0,0,1,0),\ e_3 = (0,0,0,1)$$

c) QUATERNIONISCHE VERMENIGVULDIGING.

Geschiedt door op de basisvoorstelling de regels van het letterrekenen toe te passen, met inachtneming der volgorde der factoren, terwijl

$$e_0 e_i = e_i,\ (i = 0,1,2,3),\ e_1 e_2 = -e_2 e_1 = e_3,\ e_2 e_3 = -e_3 e_2 = e_1,$$
$$e_3 e_1 = -e_1 e_3 = e_2 .$$

Het product blijkt associatief en distributief te zijn, maar niet commutatief.

Quaternionen, waarvoor alleen α_0 van nul verschilt, volgen dezelfde rekenregels als de reële getallen; we zullen ze daarom met de reële getallen identificeren en door Griekse letters voorstellen. Quaternionen, waarvoor $\alpha_0 = 0$ heten vectoren. Deze duiden we met kleine letters aan. Men kan ze op de gebruikelijke wijze meetkundig interpreteren als lijnsegmenten in de driedimensionale ruimte. Algemene quaternionen zullen we met hoofdletters aanduiden. Ieder quaternion is dus te beschouwen als de som van een reëel getal en een vector:

$$A = \alpha + a.$$

Het quaternionische product van twee vectoren a en b is het quaternion:

$$ab = (\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\alpha_3 e_3)(\beta_1 e_1+\beta_2 e_2+\beta_3 e_3) = -\,a.b + a\times b,$$

met

$$a.b = \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3 \,. \qquad \text{(scalair product)}$$

$$a\times b = (\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)e_1+(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)e_2+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)e_3 \quad \text{(vectorproduct)}$$

Algemene productregel:

$$AB = (\alpha + a)(\beta + b) = \alpha\beta - a.b + \alpha b + \beta a + a\times b.$$

2. Vectorrekening.

$$a.b = -\tfrac{1}{2}(ab + ba)$$
$$a\times b = \tfrac{1}{2}(ab + ba)$$

$a.b = b.a$, $a\times b = -\,b\times a$.
Vectoren heten onderling orthogonaal, indien $a.b = 0$, dus $ab + ba = 0$.

$a.(b\times c) = b.(c\times a) = c.(a\times b)$. Men duidt dit getal aan met (a,b,c) (determinantenproduct). Er geldt

$(a,b,c) = (b,c,a) = (c,a,b) = -\,(a,c,b) =$ enz.

Indien $(a,b,c) \neq 0$ dan heet het teken van (a,b,c) de schroefzin der vectoren a,b,c. De schroefzin van e_1, e_2, e_3 is positief.

$a.(b\times c) = b(c.a) - c(a.b)$

$(a\times b).(c\times d) = (a.c)(b.d) - (a.d)(b.c)$ (Lagrange)

$(a\times b)\times(c\times d) = (a,b,d)c - (a,b,c)d$

$(a,b,c)d = (b,c,d)a + (c,a,d)b + (a,b,d)c$ (Ontbinding langs drie vectoren).

3. Norm van een quaternion.

Het geconjugeerde van het quaternion $A = \alpha + a$ is het quaternion $A^* = \alpha - a$. Er geldt de productstelling

$$(AB)^* = B^*A^*.$$

De norm $N(A)$ van het quaternion A is het getal $N(A) = AA^* = A^*A$
$= \alpha_0^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2$. Steeds is $N(A) \geqq 0$. De norm is slechts nul indien het quaternion gelijk is aan 0, dus aan (0,0,0,0).

Bij iedere $A \neq 0$ bestaat er een A^{-1} zodat

$$AA^{-1} = A^{-1}A = 1, \text{ terwijl } A^{-1} = \frac{A^*}{N(A)}\,.$$

In het bijzonder is $N(a) = -\,aa = a.a$.
Een quaternion met norm 1 heet genormeerd.
De quaternionen vormen een (niet-commutatief) lichaam.

4. Argument van een quaternion.

Een genormeerd quaternion Q kunnen we schrijven als $Q = \kappa + q$ met $\kappa^2 + N(q) = 1$. We kunnen stellen $\cos\psi = \kappa$. Door de voorwaarden $0 \leqq \psi \leqq \pi$ is ψ ondubbelzinnig bepaald. Men noemt ψ het argument van het quaternion. Stellen we $e \sin\psi = q$, dan is e door $N(e) = 1$ volledig bepaald. We hebben dus:

$$Q = \cos\psi + e \sin\psi. \quad ee = -1 \text{ (analogon der complexe getallen).}$$

Ieder genormeerd quaternion blijkt het product te zijn van twee genormeerde vectoren a en b,

$$Q = - a.b + a \times b.$$

Blijkbaar is $\cos\psi = - a.b$. We zullen $\vartheta = \pi - \psi$ noemen de hoek der vectoren a en b, zodat $\cos\vartheta = a.b$. Voorts is $\sin\vartheta = \sin\psi = (a \times b).\ e = (a,b,e)$, en daar dit getal positief blijkt te zijn, is de schroefzin van a,b en e positief, althans, indien $\psi \neq 0$ en $\neq \pi$.

Een vlak loodrecht op een genormeerde vector a wordt door die vector georiënteerd, doordat we de zijde, waarheen die vector wijst positief kunnen noemen. Denken we ons twee snijdende of samenvallende georiënteerde vlakken. De aan de positieve zijden daarvan gelegen halve ruimten hebben een tweevlakshoek gemeen. Daaraan geven we de grootte ψ, indien $\pi - \psi$ de hoek is der vectoren a en b. We kunnen blijkbaar een quaternion steeds door een vlakkenpaar representeren.

5. Sferische trigonometrie.

De letters a,b,c zullen nu niet meer vectoren aanduiden. De enige vectoren, die voorkomen duiden we met de letter e aan, die van een passende index is voorzien.

We denken ons gegeven drie niet in één vlak gelegen genormeerde vectoren e_a, e_b, e_c. Het levert voor het volgende gemak op om de schroefzin daarvan positief te onderstellen. De vlakken door een punt O loodrecht op die vectoren sluiten een drievlakshoek in, die op de gebruikelijke wijze met een boldriehoek op een om O beschreven boloppervlak in verband kan worden gebracht. De tweevlakshoek der vlakken loodrecht op e_b en e_c geven we de grootte α, enz. We hebben

$$e_b\, e_c = \cos\alpha + e_\alpha \sin\alpha, \text{ waaruit } -e_b.e_c = \cos\alpha,$$

$$e_b \times e_c = e_\alpha \sin\alpha .$$

en cykl. Daarbij zijn e_α, enz. genormeerde vectoren, terwijl $(e_b.e_c, e_\alpha) > 0$. Voorts is $e_\beta \times e_\gamma \sin\beta \sin\gamma = (e_c \times e_a) \times (e_a \times e_b) = e_a (e_a, e_b, e_c)$. We mogen stellen

$$e_a \sin a = e_\beta \times e_\gamma ,$$

waarbij a voorstelt de hoek der vectoren e_β en e_γ . Dus $a+\alpha=\pi$.
Zonder moeite blijkt $(e_a, e_b, e_c) = \sin a \sin\beta \sin\gamma$ en cykl, waaruit:

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma} \qquad \text{(sinusregel)}$$

Wegens $e_\beta \cdot e_\gamma = \cos a$ hebben we:

$$e_\beta\, e_\gamma = -\cos a + e_a \sin a, \text{ en cykl.}$$

Uit de relatie

$$e_\beta\, e_\gamma\, e_\gamma\, e_\alpha\, e_\alpha\, e_\beta = -1$$

leidt men vooreerst af

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma \quad \text{(cosinusregel)}$$

en verder

$$\sin a \cos b = \sin b \cos a \cos\gamma + \sin c \cos\beta \quad \text{(projectieregel)}$$
$$\sin b \cos a = \sin a \cos b \cos\gamma + \sin c \cos\beta$$

Door toepassing van de sinusregel volgt nog

$$\sin a \operatorname{ctg} b = \cos a \cos\gamma + \sin\gamma \operatorname{cgt}\beta \qquad \text{(cotangentenregel)}$$
$$\sin b \operatorname{cgt} a = \cos b \cos\gamma + \sin\gamma \operatorname{ctg}\alpha$$

Hiermede zijn de grondformules der sferische trigonometrie gevonden.
Analoge relaties vindt men uit de identiteit

$$e_b\, e_c\, e_c\, e_a\, e_a\, e_b = -1.$$

Eenvoudiger echter door te letten op de relatie $a+\alpha=\pi$, enz (overgang van de driehoek op de pooldriehoek).

Literatuur:

Louis Brand, Vector and Tensor Analysis, New York - London 1947.