STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1950-014

Over de uitbreiding van een paar bekende stellingen uit de vlakke meetkunde

Prof.Dr. W. van der Woude

"Elementaire Onderwerpen van hoger standpunt uit"

October 1950

Rapport ZW 1950/014
11 October 1950.

"Over de uitbreiding van een paar bekende stellingen
uit de vlakke meetkunde"

door

door Prof. Dr W. van der Woude

in de serie "Elementaire Onderwerpen van hoger standpunt uit".

Opmerkingen vooraf.

1. De stellingen straks toe te passen:

Eenvoudigste eigenschappen van de éénbladige hyperboloïde, speciaal van de daarop liggende lijnenstelsels.

Projectieve transformatie op een rechte; speciaal: zijn X_i, Y_i, Z_i puntreeksen op l en is $X_i \barwedge Y_i$ en $X_i \barwedge Z_i$, dan is $Y_i \barwedge Z_i$.

($\barwedge$ betekent projectief met).

2. Veel voorkomende uitbreiding van een planimetrische stelling op R_3:

$$\left.\begin{array}{l}\text{drie rechten}\\ \text{door een punt}\end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{vier rechten met}\\ \text{hyperboloïdische ligging}\end{array}\right.$$

Voorbeeld: De hoogtelijnen h_i van een viervlak hebben hyperboloïdische ligging.

Bewijs. Elk wordt gesneden door de 4 rechten l_i, d.w.z. de rechten waarvan elk loodrecht staat op een zijvlak in zijn hoogtepunt.

Gevraagd, als uitbreiding van bekende stellingen:

I. Hoe bepaalt men 6-tallen punten met de volgende eigenschap: een vla door drie der punten, hoe ook gekozen, staat loodrecht op het vlak door drie andere punten (10 eisen)?

II. Liggen dergelijke zestallen op een orthogonale ruimtehyperbool?

Antwoord. Neem vier punten willekeurig: tetraëder $P_1 P_2 P_3 P_4$. Men vindt dan tot de meetkundige plaats, waarop P_5 en P_6 liggen, behoren

1. de straks in het voorbeeld genoemde rechten l_i (dadelijk in te zien
2. de vier hoogtelijnen h_i (Neem P_5 op h_4, dan is P_6 het snijpunt van vlak $P_1P_2P_3$ met de rechte door P_5, die h_1, h_2, h_3 snijdt).

Hieruit volgt: de gezochte meetkundige plaats is de straks - zie Voorbeeld - aangehaalde hyperboloïde. Op elke rechte van het stelsel rechten, waartoe l_i behoren, vormen P_5 en P_6 een involutie.

Algebraisch Gedeelte.

Antwoord op vraag II.

Orthogonale ruimtehyperbool bij rechthoekig assenstelsel:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\,\frac{\beta-\gamma}{\alpha} \\ y &= b\,\frac{\gamma-\alpha}{\beta} \\ z &= c\,\frac{\alpha-\beta}{\gamma} \\ \text{met } \alpha+\beta+\gamma &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Een punt P_i zal aangeduid worden door $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$.

Hulpformule hieruit $\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2 = \gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2 = \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2$

Dan blijkt eenvoudig door berekening:

1. richtingscoëfficiënten van P_1P_2:

$$\frac{a}{\alpha_1\alpha_2}, \quad \frac{b}{\beta_1\beta_2}, \quad \frac{c}{\gamma_1\gamma_2};$$

2. richtingscoëfficiënten van $P_1P_2P_3$ uit

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{a}{\alpha_1\alpha_2} & \dfrac{b}{\beta_1\beta_2} & \dfrac{c}{\gamma_1\gamma_2} \\ \\ \dfrac{a}{\alpha_1\alpha_3} & \dfrac{b}{\beta_1\beta_3} & \dfrac{c}{\gamma_1\gamma_3} \end{matrix} \right\|,$$

dus $\dfrac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{a}$, $\dfrac{\beta_1\beta_2\beta_3}{b}$, $\dfrac{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}{c}$.

3. Voorwaarde vlak $P_1P_2P_3 \perp$ vlak $P_4P_5P_6$.

$$\frac{\Pi\alpha_i}{a^2} + \frac{\Pi\beta_i}{b^2} + \frac{\Pi\gamma_i}{c^2} = 0 \quad (i = 1,\ldots 6)$$

Uit de symmetrische vorm blijkt, dat dan aan al de eisen - elk vlak door 3 der punten $\perp$ op het vlak door de anderen - is voldaan. Zijn 5 punten willekeurig op de kromme gekozen, dan het zesde uit

$$\left.\begin{aligned} \alpha\,\frac{\Pi\alpha_j}{a^2} + \beta\,\frac{\Pi\beta_j}{b^2} + \gamma\,\frac{\Pi\gamma_j}{c^2} &= 0 \\ \alpha+\beta+\gamma &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (j = 1,\ldots 5)$$

Hieruit één punt P_6 behalve in een bijzonder geval, waarbij P_6 willekeurig is.